LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Ulf Janfalk

Utbildningskod: TATA31
Provkod: KTR1

Kontrollskrivning i Linjär algebra 2022–10–26, 8–12.

Inga hjälpmedel, förutom passare, linjal eller gradskiva. OBS! Inga formler eller liknande tryckta på linjal eller gradskiva. Ej räknedosa.
På uppgift 1–14 skall ***endast svar*** ges. Varje rätt svar ger 1 poäng, fel svar 0 poäng.
Flera svar får och bör ges på samma blad, helst i nummerordning.
Uppgift 15 och 16 ger tre poäng vardera; ***fullständiga och välmotiverade lösningar krävs.***
Minst 11 poäng tillgodoräknas som tre poäng på uppgift 1 på tentamen.
Minst 16 poäng ger ytterligare en bonuspoäng på tentamen.
Rätten att tillgodoräkna sig bonus består under läsåret 2022-2023.
Resultatet meddelas via e-post. Lösningar läggs ut efter skrivtidens slut på

http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html

Om inget annat sägs, är alla koordinater för vektorer i planet och rummet givna relativt en högerorienterad ON-bas.

1. Skriv nedanstående ekvationssystem i matrisform och ange dess lösningar på parameterform
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 \qquad\qquad - 4x_6 = 1 \\ \qquad\qquad\qquad x_4 - 2x_6 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\quad x_5 \qquad = 2 \end{cases}.$$

2. Betrakta matriserna
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Beräkna det/de av uttrycken nedan som är definierade:
$$A + B^t, \quad B^tA, \quad AB, \quad A^tB.$$

3. Tag ett nytt pappersark och rita på detta ett vanligt rätvinkligt koordinatsystem (höger ON). Låt **två rutor** svara mot **en längdenhet**. Låt $\underline{\mathbf{e}}$ vara en ON-bas där $\mathbf{e}_1$ pekar i den vågräta koordinataxelns riktning och $\mathbf{e}_2$ i den lodräta axelns riktning. Rita i detta koordinatsystem in, så exakt som möjligt, vektorerna $\mathbf{u} = 7\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2$, den ortogonala projektionen av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$ och den ortogonala projektionen av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{u}$.

4. Låt $\mathbf{u}_1 = \cos x + \ln x$, $\mathbf{u}_2 = -3\cos x + \ln x$ och $\mathbf{v} = 3\cos x + 5\ln x$. Skriv $\mathbf{v}$ som en linjärkombination av $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$.

5. Ange ekvationen på parameterform till den linje L genom punkten $(2, -3, 4)$ som är vinkelrät mot planet $2x + y - 3z = \pi$.

6. Ange en ***enhetsvektor*** som är ortogonal mot både $2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3$ och $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$.

VÄND!

7. Bestäm den punkt i planet Π: $2x - y + z = 3$ som ligger närmast punkten $(1, 0, 0)$.

8. Låt L vara linjen genom $(2, -1, 3)$ med riktningsvektor $\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$. Bestäm avståndet mellan L och punkten $(-2, 1, -4)$.

9. Bestäm $a, b \in \mathbb{R}$ så att

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ blir en lösning till matrisekvationen } \begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ -1 & a & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

10. Låt $P = (-1, 3)$ och $Q = (5, -1)$. Bestäm mittpunktsnormalen N till sträckan mellan P och Q, d.v.s. den linje som går genom mittpunkten på sträckan mellan P och Q och är vinkelrät mot sträckan mellan P och Q. Svara på valfri form.

11. Betrakta underrummet $\mathbb{U}$ av $\mathbb{R}^4$ definierat genom

$$\mathbb{U} = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{c} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ \text{och} \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

och låt

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 1), \qquad \mathbf{v}_2 = (1, 4, 3, 0), \qquad \mathbf{v}_3 = (2, 1, 0, 1), \qquad \mathbf{v}_4 = (4, 0, 0, 1).$$

Vilken/vilka av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ och $\mathbf{v}_4$ tillhör $\mathbb{U}$?

12. Beräkna vinkeln mellan vektorerna

$$\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \quad \text{och} \quad \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$$

13. Bestäm inversen till

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

14. Lös matrisekvationen $\left(A^t\right)^{-1} X \left(B^t - B\right)^{-1} = C$ där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3 p) 15. Avgör för vilka värden på de reella talen a och b som ekvationssystemet

$$\begin{cases} x \quad + \quad az = b \\ 2x - \quad y + 4z = 3 \\ ax + ay - \quad z = b \end{cases}$$

har entydig lösning, ingen lösning eller oändligt många lösningar. Fås oändligt många lösningar för något val av a och b skall lösningsmängden anges.

(3 p) 16. Betrakta underrummet

$$\mathbb{U} = [(1, -2, 0, 1, 1), (2, -4, -1, 1, 1), (0, 0, 1, 1, 1), (2, 1, 2, 0, 1)] \subset \mathbb{R}^5.$$

Beskriv $\mathbb{U}$ med så få vektorer som möjligt. Ge ett exempel på en vektor $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ som tillhör $\mathbb{U}$ men som INTE är någon av de ursprungliga genererande vektorerna samt en vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^5$ som inte tillhör $\mathbb{U}$.

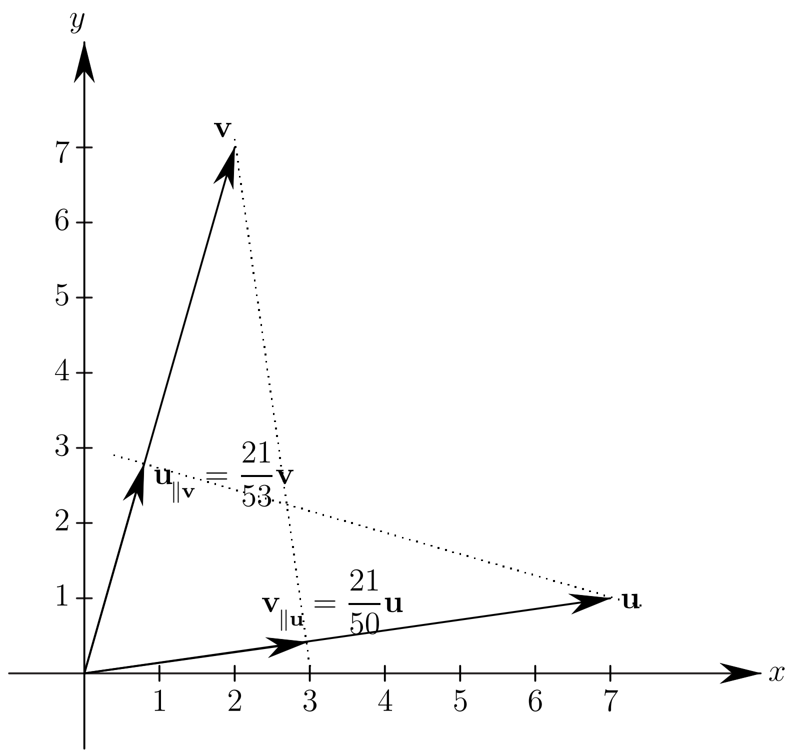
Lösningsförslag till TATA31. Linjär algebra, 2023–10–26

1. $\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $r, s, t \in \mathbb{R}$

2. $B^t A$ och AB^t är inte definierade

$$A + B^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 10 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

3.



4. $\mathbf{q} = \frac{9}{2}\mathbf{u}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{u}_2$

5. L: $\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

6. $\frac{1}{\sqrt{19}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

7. $\frac{1}{6}(8, -1, 1)$

8. $\dfrac{5}{2}\sqrt{6}$

9. $a = -4,\ b = -1.$

10. $N : \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$ eller $3x - 2y = 4$ eller $y = \dfrac{3}{2}x - 2$

11. $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{U}, \quad \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4 \notin \mathbb{U}$

12. $\dfrac{\pi}{6}$

13. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

14. $X = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -8 \\ 8 & -10 \end{pmatrix}$

15. Skriv ekvationssystemet på matrisform, beräkna determinanten av koefficientmatrisen A och beräkna för vilka värden på a som determinanten är 0.

$$\det A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 2 & -1 & 4 \\ a & a & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{k_1+2k_2 \\ k_3+4k_2}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 0 \\ 3a & a & 4a-1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Utveckling} \\ \text{efter rad 2} \end{bmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & a \\ 3a & 4a-1 \end{vmatrix} = -(4a - 1 - 3a^2) = 3a^2 - 4a + 1 = 0 \iff$$

$$\iff a^2 - \frac{4}{3}a + \frac{1}{3} = 0 \iff a = \frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{3}{9}} = \frac{2 \pm 1}{3} = 1, \frac{1}{3}.$$

Determinantkriteriet, Korollarium 4.7.2, sid 93 ger då att vi har

$$\text{entydig lösning för alla } b \in \mathbb{R} \text{ om } a \neq 1 \text{ och } a \neq \frac{1}{3}.$$

Återstår att kontrollera $a = 1$ respektive $a = \dfrac{1}{3}$ separat.

$$\underline{\underline{a = 1}}: \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b \\ 2 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & b \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & -1 & 2 & 3-2b \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \overset{r_3+r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & -1 & 2 & 3-2b \\ 0 & 0 & 0 & 3-2b \end{array}\right),$$

d.v.s. vi har ingen lösning om $3 - 2b \neq 0 \iff b \neq \dfrac{3}{2}$. Om $b = \dfrac{3}{2}$ fås

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2-z=3/2-t \\ 2z=2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\underline{\underline{a = \frac{1}{3}}}: \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/3 & b \\ 2 & -1 & 4 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & -1 & b \end{array}\right) \overset{\substack{3r_1\\3r_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 3b \\ 2 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 3b \end{array}\right) \overset{\substack{r_1-3r_3\\r_2-2r_3\\r_1\leftrightarrow r_3}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 3b \\ 0 & -3 & -10 & 3-6b \\ 0 & -3 & -10 & -6b \end{array}\right) \overset{r_3-r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 3b \\ 0 & -3 & -10 & 3-6b \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

så lösning saknas för alla värden på $b \in \mathbb{R}$. Vi sammanfattar

- Entydig lösning för alla högerled, d.v.s. för alla $b \in \mathbb{R}$ om $a \neq 1$ och $a \neq \frac{1}{3}$.
- Ingen lösning om $a = 1, b \neq \frac{3}{2}$ eller $a = \frac{1}{3}, b \in \mathbb{R}$.
- Oändligt många lösningar om $a = 1$ och $b = \frac{3}{2}$ och lösningsmängden ges av

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

16. Kalla de genererande vektorerna $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ och ställ upp beroendeekvationen samt LK = godtycklig vektor $\in \mathbb{R}^5$. Då fås

$$\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_3\mathbf{u}_3 + \lambda_4\mathbf{u}_4 = \mathbf{0}, \mathbf{x} \iff \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & x_1 \\ -2 & -4 & 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & x_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & x_5 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2+2r_1\\r_4-r_1\\r_5-r_1}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 2x_1+x_2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & x_3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & -x_1+x_4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -x_1+x_5 \end{array}\right) \overset{\substack{r_4-r_3\\r_5-r_3\\r_2\leftrightarrow r_3}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & x_1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 2x_1+x_2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & -x_1-x_3+x_4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & -x_1-x_3+x_5 \end{array}\right) \overset{\substack{5r_4\\5r_5}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & x_1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 2x_1+x_2 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & 0 & -5x_1-5x_3+5x_4 \\ 0 & 0 & 0 & -15 & 0 & -5x_1-5x_3+5x_5 \end{array}\right) \overset{\substack{r_4+4r_3\\r_5+3r_3}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & x_1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 2x_1+x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3x_1+4x_2-5x_3+5x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1+3x_2-5x_3+5x_5 \end{array}\right).$$

Om vi börjar med beroendeekvationen och på vanligt sätt löser ut en variabel per ekvation så fås

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\lambda_2 - 2\lambda_4 = -2t \\ \lambda_3 + \lambda_4 = t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Om vi sätter in lösningen för $t = 1$ i beroendeekvationen så fås att

$$-2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 = \mathbf{0} \iff \mathbf{u}_3 = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2,$$

d.v.s. vi kan utse $\mathbf{u}_3$ till löjligt element. Satsen om löjliga element, Sats 5.3.16, sid 111 ger då att $\mathbf{u}_3$ kan strykas ur höljet utan att detta förändras, d.v.s.

$$\begin{aligned}\mathbb{U} &= [(1,-2,0,1,1),(2,-4,-1,1,1),{\color{red}(0,0,1,1,1)},(2,1,2,0,1)] = \\ &= [(1,-2,0,1,1),(2,-4,-1,1,1),(2,1,2,0,1)]\,.\end{aligned}$$

Om vi nu går tillbaka till den ursprungliga beroendeekvationen, stryker $\mathbf{u}_3$ och genomför samma radoperationer igen så ser vi att denna nya beroendeekvation får entydig lösning, d.v.s. de återstående tre är linjärt oberoende.
Återstår att finna de efterfrågade exemplen. Då höljet består av ALLA linjärkombinationer av de genererande vektorerna blir, t.ex.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\1\end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-4\\-1\\1\\1\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\-6\\-1\\2\\2\end{pmatrix}$$

ett exempel på en nollskild vektor som tillhör $\mathbb{U}$ och som själv inte är någon av de genererande vektorerna.
Ekvationen "LK = godtycklig vektor" är lösbar omm

$$3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 0 \quad \text{och} \quad x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 5x_5 = 0,$$

d.v.s. en vektor tillhör $\mathbb{U}$ omm dess koordinater uppfyller BÅDA ekvationerna. Detta ger

$$\mathbb{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4] = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \colon \begin{array}{r} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 5x_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Som exempel på en vektor $\mathbf{v}$ som INTE tillhör $\mathbb{U}$ kan vi ta vilken som helst vektor vars koordinater INTE uppfyller en eller båda ekvationerna, t.ex.

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, 0, 0)$$

som inte uppfyller någon av de båda ekvationerna.