Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ulf Janfalk

Utbildningskod: TATA31
Modul: TEN1

Tentamen i Linjär algebra (TATA31/TEN1) 2023–08–18, 14–19.

Inga hjälpmedel, förutom passare, linjal eller gradskiva. OBS! Inga formler eller liknande tryckta på linjal eller gradskiva. Ej räknedosa.
För godkänt räcker 9 poäng och minst 3 uppgifter med 2 eller 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning ($\geq$ 11p) ht2022 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas) och 16p eller mer ger 4 poäng på uppgift 1. Markera detta genom att skriva "G" respektive "G+1" i rutan för uppgift 1 på raden märkt "X här/*here*".
Fullständiga motiveringar krävs. Lösningar läggs ut måndag 21/8 på

http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html

Resultat meddelas via e-post inom 10 arbetsdagar.
Alla koordinater för vektorer och punkter är, om ej annat anges, givna med avseende på ett positivt orienterat ON-system, $\mathbb{R}^n$ är ett euklidiskt rum med standardskalärprodukten och standardbasen ett positivt orienterat ON-system.

(1 p) 1. (a) Ange ekvationen för planet Π genom punkterna

$$P_1 = (1,1,1), \quad P_2 = (2,3,1), \quad P_3 = (3,2,0).$$

(1 p) (b) Bestäm spegelbilden av punkten $P_4 = (3,0,4)$ i Π.

(1 p) (c) Ange en punkt som ligger på dubbelt så långt avstånd från Π som P_4.

(1 p) 2. (a) Beräkna det karakteristiska polynomet, $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

och verifiera Cayley-Hamiltons sats, d.v.s. att $p(A) = 0$ (nollmatrisen).
Anmärkning: Om $p(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\lambda + \beta$ så är $p(A) = A^2 + \alpha A + \beta I$ där I =enhetsmatrisen.

(2 p) (b) Utnyttja $p(A) = 0$ till att skriva A^{-1} på formen $aA + bI$ där $a, b \in \mathbb{R}$ samt verifiera, i enlighet med *definitionen* av matrisinvers, att detta är inversen.

3. Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ ges av

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = (x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5,\, x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5,\, 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 3x_5).$$

Bestäm F:s matris med avseende på standardbaserna i $\mathbb{R}^5$ och $\mathbb{R}^3$. Ange därefter en bas i nollrummet och en bas i värderummet samt deras respektive dimension.

VÄND!

4. Låt $\mathbf{v} = (1, 15, 1, -3) \in \mathbb{R}^4$ och betrakta underrummet

$$\mathbb{U} = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right\} \subset \mathbb{R}^4.$$

Bestäm vektorer $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{U}$ och $\mathbf{v}_2 \in \mathbb{U}^\perp$ så att $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$. För full poäng krävs att du ***redovisar*** kontrollerna som krävs för att garantera att $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ har de efterfrågade egenskaperna.

5. Betrakta underrummen

$$\begin{aligned} \mathbb{U} &= \left\{ \mathbf{p}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in \mathbb{P}_3 \colon a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \right\}, \\ \mathbb{V} &= \left[1 + 2x + 3x^2,\ x + x^2 + x^3,\ 1 + x + x^2 - x^3,\ 2 + x - x^2 - 3x^3 \right] \end{aligned}$$

i $\mathbb{P}_3$. Bestäm baser i $\mathbb{U}$, $\mathbb{V}$ och $\mathbb{U} \cap \mathbb{V}$ samt deras respektive dimension.
Basvektorerna skall skrivas som de polynom de är, inte med koordinater i någon bas.

6. Visa att andragradsytan

$$12x_1^2 + 15x_2^2 - 8x_1 x_3 + 18x_3^2 = 40$$

i $\mathbb{R}^3$ är en ellipsoid. Bestäm de punkter på ytan som ligger närmast respektive längst ifrån origo samt vilket avstånd dessa har till origo. Ange också en punkt som har avstånd 3 till *ytan*.

7. Om den linjära avbildningen $F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vet man att den är *symmetrisk* och *inte inverterbar*. Vidare vet man att vektorerna $(4, 1, -8)$ och $(7, 4, 4)$ är egenvektorer till F med egenvärde -3 respektive 3. Bestäm F:s matris i standardbasen.
För full poäng krävs att du redovisar de kontroller som krävs för att garantera att ditt svar är rätt.

Lösningsförslag till TATA31, Linjär algebra, 2023–08–18.

1. (a) Utgående från de tre punkterna beräknar vi två vektorer i planet för att sedan, via deras kryssprodukt, ta fram en normal till det sökta planet. Insättning av en av de givna punkterna ger sedan konstanten i planets ekvation och de två återstående punkterna sätts in som kontroll. Vi får

$$\overline{P_1P_2} = \overline{OP}_2 - \overline{OP}_1 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},$$

$$\overline{P_1P_3} = \overline{OP}_3 - \overline{OP}_1 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix},$$

$$\begin{array}{c} \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\times\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix} = -\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}, \mathbf{n} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}, \\ \begin{matrix}1 & \quad & 2\\ 2 & \quad & 1\end{matrix} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Pi\colon 2x - y + 3z = D, \quad & P_1 \in \Pi \Longrightarrow 2 - 1 + 3 = 4 = D, \\ & P_2 = (2,3,1) \in \Pi : \; 4 - 3 + 3 = 4 \text{ OK}, \\ & P_3 = (3,2,0) \in \Pi : \; 6 - 2 + 0 = 4 \text{ OK}, \end{aligned}$$

d.v.s. det sökta planet är $\Pi : \; 2x - y + 3z = 4$.

(b) Börja med att bilda en vektor från Π till P_4, t.ex. $\overline{P_1P_4}$ och beräkna sedan de vektorer vi behöver, se figur nedan.

$$\overline{P_1P_4} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} \quad \text{(slump att det råkade bli } \mathbf{n}\text{)},$$

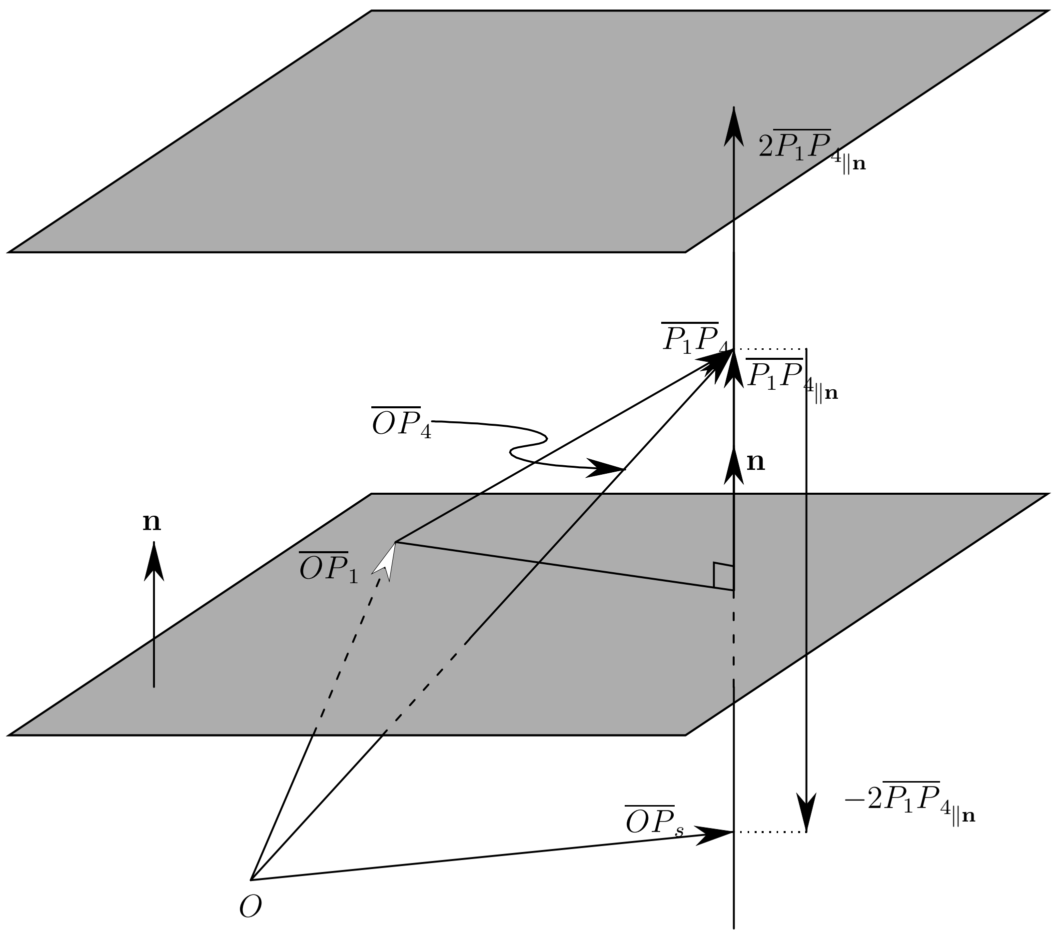
$$\overline{P_1P}_{4_{\|\mathbf{n}}} = \frac{1}{|\mathbf{n}|^2}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} = \mathbf{n},$$

$$\overline{OP}_s = \overline{OP}_4 - 2\overline{P_1P}_{4_{\|\mathbf{n}}} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}$$

(c) Alla punkter i det i figuren inritade planet har dubbla avståndet från P_4 till Π som avstånd till Π. Då avståndet från P_4 till Π är $\left|\overline{P_1P}_{4_{\|\mathbf{n}}}\right|$ får vi en punkt P_{x2} med det sökta avståndet genom att beräkna

$$\overline{OP}_4 + \overline{P_1P}_{4_{\|\mathbf{n}}} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-1\\7\end{pmatrix}.$$

Anmärkning: Finns ett motsvarande plan "under" Π också som nås genom att beräkna $\overline{OP}_4 - 3\overline{P_1P}_{4_{\|\mathbf{n}}} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-3\\3\\-5\end{pmatrix}$.



2. (a) Beräkning av först $p(\lambda)$ och därefter $p(A)$ ger

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(5-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 6\lambda - 1, \\
p(A) &= A^2 - 6A - I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - I = \\
&= \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 18 & 31 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 18 & 30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 7-6-1 & 12-12-0 \\ 18-18-0 & 31-30-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

(b) Ur ovanstående har vi alltså att

$$
p(A) = A^2 - 6A - I = 0 \iff A^2 - 6A = A(A-6I) = (A-6I)A = I \iff
$$
$$
\iff A^{-1} = A - 6I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},
$$

d.v.s. $a = 1, b = -6$. Slutligen,

$$
AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+6 & 2-2 \\ -15+15 & 6-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

vilket visar att vi har korrekt invers.

3. Skriv F på matrisform.

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = F\left(\underline{\mathbf{e}}_5\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}\right) = \underline{\mathbf{e}}_3\begin{pmatrix}x_1-x_2-x_3+x_4+3x_5\\x_2+2x_3+x_4-x_5\\2x_1+x_2+4x_3+5x_4+3x_5\end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\mathbf{e}}_3\begin{pmatrix}1&-1&-1&1&3\\0&1&2&1&-1\\2&1&4&5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}_3 AX.$$

För att bestämma baser i $N(F)$ och $V(F)$ löser vi $AX = \mathit{0}$. Vi får

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&-1&-1&1&3&0\\0&1&2&1&-1&0\\2&1&4&5&3&0\end{array}\right)\overset{r_3-2r_1}{\sim}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&-1&-1&1&3&0\\0&1&2&1&-1&0\\0&3&6&3&-3&0\end{array}\right)\overset{\substack{r_1+r_2\\r_3-3r_2}}{\sim}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&1&2&2&0\\0&1&2&1&-1&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right),$$

$$X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x_3-2x_4-2x_5 = -r-2s-2t\\-2x_3-x_4+x_5 = -2r-s+t\\r\\s\\t\end{pmatrix} =$$

$$= r\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad r,s,t\in\mathbb{R} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow N(F) = [(-1,-2,1,0,0),(-2,-1,0,1,0),(-2,1,0,0,1)].$$

Dessa tre generarande vektorer är också en bas i $N(F)$ då de spänner upp $N(F)$ och är linjärt oberoende per konstruktion. Därmed följer också att $\dim N(F) = 3$.
För att bestämm bas och dimension i $V(F)$ använder vi **Sats 7.5.4**, sid 181 som säger att

$$V(F) = [\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4,\mathbf{k}_5],$$

d.v.s. höljet av avbildningsmatrisens kolonnvektorer. Då beroendeekvationen för dessa blir den ekvation vi precis löst fås

$$\underline{\underline{r=1,s=0,t=0}}: \ -\mathbf{k}_1-2\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3=\mathbf{0} \iff \mathbf{k}_3=\mathbf{k}_1+2\mathbf{k}_2,$$
$$\underline{\underline{r=0,s=1,t=0}}: \ -2\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_4=\mathbf{0} \iff \mathbf{k}_4=2\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2,$$
$$\underline{\underline{r=0,s=0,t=1}}: \ -2\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_5=\mathbf{0} \iff \mathbf{k}_5=2\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2.$$

Satsen om löjliga element, **Sats 5.3.16**, sid 111 ger då att

$$V(F) = [\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4,\mathbf{k}_5] = [\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2]$$

d.v.s. $(1,0,2),(-1,1,1)$ är en bas i $V(F)$ och $\dim V(F) = 2$.

4. Uppgiften kan lösas på flera sätt. Man kan beräkna projektionen på $\mathbb{U}$ eller på $\mathbb{U}^\perp$ antingen genom att konstruera en ON-bas för det rum man vill projicera på eller beräkna projektionen med minstakvadrat-metoden. Här skall vi lösa uippgfiten genom att bestämma en ON-bas i $\mathbb{U}^\perp$ och sen beräkna $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}^\perp}$. "Normalerna" till de generarande ekvationerna ger oss en bas i $\mathbb{U}$,d.v.s.

$$\mathbb{U}^\perp = [(1,1,1,2),(1,1,2,1)] = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2].$$

Bestäm nu en ON-bas i $\mathbb{U}^\perp$ med Gram-Scmidtmetoden genom att sätta

$$\mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{u}}_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(1,1,1,2)$$

och sen ortogonalisera $\mathbf{u}_2$.

$$\mathbf{u}_{2\|\mathbf{f}_1} = \frac{1}{7}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix} = \frac{6}{7}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_{2\perp\mathbf{f}_1} = \frac{1}{7}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}7\\7\\14\\7\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}6\\6\\6\\12\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{7}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\8\\-5\end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{91}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\8\\-5\end{pmatrix}.$$

Därmed har vi en ON-bas, $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ i $\mathbb{U}^\perp$.

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}^\perp} = (\mathbf{v}_2\bullet\mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 + (\mathbf{v}_2\bullet\mathbf{f}_2)\,\mathbf{f}_2 =$$

$$= \frac{1}{7}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\15\\1\\-3\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{91}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\15\\1\\-3\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\8\\-5\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\8\\-5\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{11}{7}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix} + \underbrace{\frac{39}{91}}_{=3/7}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\8\\-5\end{pmatrix} = \frac{1}{7}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}11\\11\\11\\22\end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\3\\24\\-15\end{pmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{7}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}14\\14\\35\\7\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\2\\5\\1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v} - \mathbf{v}_2 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\15\\1\\-3\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\2\\5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\13\\-4\\-4\end{pmatrix}.$$

Återstår de nödvändiga kontrollerna

$$\mathbf{v} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\15\\1\\-3\end{pmatrix} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}-1\\13\\-4\\-4\end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\2\\5\\1\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1+2\\13+2\\-4+5\\-4+1\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\15\\1\\-3\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 + 26 - 20 - 4 = 0 \iff \mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2,$$

$$\mathbf{v}_1 = (-1, 13, -4, -4) \in \mathbb{U} \iff \begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -1 + 13 - 4 - 8 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 + 13 - 8 - 4 = 0 \end{matrix},$$

$$\mathbf{v}_2 = (2, 2, 5, 1) \in \mathbb{U}^\perp \quad \text{ty} \quad -\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3\,\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1+3 \\ -1+3 \\ -1+6 \\ -2+3 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Har man gjort kontrollen att $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$ så räcker det att genomföra en av kontrollerna $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{U}$ och $\mathbf{v}_2 \in \mathbb{U}^\perp$ eftersom uppdelningen i ortogonala komponenter är entydig.

5. Vi börjar med att bestämma en bas i $\mathbb{U}$ genom parametrisering av den definierande ekvationen.

$$\mathbb{U} = \left\{ \mathbf{p}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in \mathbb{P}_3 \colon a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \right\},$$

$$\underline{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} -a_1 - a_2 - a_3 = -r - s - t \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix} = r\,\underline{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\,\underline{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$
$$= r(-1 + x) + s(-1 + x^2) + t(-1 + x^3), \quad r, s, t \in \mathbb{R},$$

d.v.s. $\quad -1 + x,\ -1 + x^2,\ -1 + x^3$ är en bas i $\mathbb{U}$ och därmed $\dim \mathbb{U} = 3$. För att bestämma en bas i $\mathbb{V}$ och sedan i $\mathbb{U} \cap \mathbb{V}$ löser vi beroendeekvationen och "LK = godtyckligt polynom". Vi får

$$\lambda_1(1 + 2x + 3x^2) + \lambda_2(x + x^2 + x^3) + \lambda_3(1 + x + x^2 - x^3) + \lambda_4(2 + x - x^2 - 3x^3) =$$
$$= \lambda_1\,\underline{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2\,\underline{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3\,\underline{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_4\,\underline{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & a_0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & a_1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & a_3 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 3r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & a_0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & -2a_0 + a_1 \\ 0 & 1 & -2 & -7 & 0 & -3a_0 + a_2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & a_3 \end{array}\right) \overset{\substack{r_3 - r_2 \\ r_4 - r_2}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & a_0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & -2a_0 + a_1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 & -a_0 - a_1 + a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_0 - a_1 + a_3 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_3 - 2\lambda_4 \\ \lambda_3 + 3\lambda_4 = -t \\ -4t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 2 + x - x^2 - 3x^3 = -2(1 + 2x + 3x^2) + (x + x^2 + x^3) + 4(1 + x + x^2 - x^3)$$

så $2 + x - x^2 - 3x^3$ kan utses till löjligt element. Satsen om löjliga element och "LK = godtyckligt polynom" ger då att

$$\mathbb{V} = [1 + 2x + 3x^2,\ x + x^2 + x^3,\ 1 + x + x^2 - x^3]$$

$$= \left\{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in \mathbb{P}_3 \colon 2a_0 - a_1 + a_3 = 0 \right\}$$

så att $1 + 2x + 3x^2, x + x^2 + x^3, 1 + x + x^2 - x^3$ är en bas i $\mathbb{V}$ och att $\dim \mathbb{V} = 3$. $\mathbb{U} \cap \mathbb{V}$ består av de polynom som tillhör båda underrummen, d.v.s. uppfyller bådas ekvationer. För att hitta en bas så löser vi det ekvationssystem som då uppkommer, d.v.s.

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ 2a_0 - a_1 + 4a_3 = 0 \end{cases} \overset{ekv_2 - 2ekv_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ - 3a_1 - 2a_2 - a_3 = 0 \end{cases} \overset{\substack{ekv_1 + ekv_2 \\ -ekv_2}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a_0 - 2a_1 - a_2 = 0 \\ 3a_1 + 2a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \underline{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} 2a_1 + a_2 = 2s + t \\ s \\ t \\ -3a_1 - 2a_2 = -3s - 2t \end{pmatrix} = s\,\underline{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

d.v.s. $2 + x - x^3,\ 1 + x^2 - 2x^3$ är en bas i $\mathbb{U} \cap \mathbb{V}$ och $\dim(\mathbb{U} \cap \mathbb{V}) = 2$.

6. Börja med att skriva ekvationen på matrisform och bestäm egenvärdena.

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{u}) &= Q(\underline{\mathbf{e}}\,X_{\underline{\mathbf{e}}}) = 12x_1^2 + 15x_2^2 - 8x_1x_3 + 18x_3^2 = \\ &= X_{\underline{\mathbf{e}}}^t \begin{pmatrix} 12 & 0 & -4 \\ 0 & 15 & 0 \\ -4 & 0 & 18 \end{pmatrix} X_{\underline{\mathbf{e}}} = X_{\underline{\mathbf{e}}}^t A_{\underline{\mathbf{e}}} X_{\underline{\mathbf{e}}} = 40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(A_{\underline{\mathbf{e}}} - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 12-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & 15-\lambda & 0 \\ -4 & 0 & 18-\lambda \end{vmatrix} = (15 - \lambda) \begin{vmatrix} 12-\lambda & -4 \\ -4 & 18-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (15 - \lambda)((12 - \lambda)(18 - \lambda) - 16) = (15 - \lambda)\left(\lambda^2 - 30\lambda + 200\right) = \\ &= (15 - \lambda)(\lambda - 10)(\lambda - 20) = 0 \iff \lambda = 10, 15, 20. \end{aligned}$$

Då alla egenvärdena är positiva är ytan en ellipsoid.
Sats 9.1.11, sid 227 ger sedan

$$\lambda_{min} |\mathbf{u}|^2 = 10\,|\mathbf{u}|^2 \underset{I.}{\leq} Q(\mathbf{u}) = 40 \underset{II.}{\leq} 20\,|\mathbf{u}|^2 = \lambda_{max} |\mathbf{u}|^2 \iff$$

$$\iff \frac{40}{20} = 2 \underset{II.}{\leq} |\mathbf{u}|^2 \underset{I.}{\leq} \frac{40}{10} = 4 \iff \sqrt{2} \leq |\mathbf{u}| \leq 2,$$

d.v.s. närmast origo, på avstånd $\sqrt{2}$ är punkterna med ortsvektor $\pm\sqrt{2}\mathbf{f}_{max}$ och längst ifrån, på avstånd 2 är punkterna med ortsvektor $\pm 2\mathbf{f}_{min}$ där $\mathbf{f}_{max}$ och $\mathbf{f}_{min}$ är egenvektorer med längd 1 till $\lambda_{max} = 20$ respektive $\lambda_{min} = 10$.

$$\underline{\underline{\lambda = 10}} : \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{10} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{\lambda = 20}} : \left(\begin{array}{ccc|c} -8 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{20} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\mathbf{f}_{min} = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\,X_{10} = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_{max} = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\,X_{20} = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix},$$

d.v.s. närmast origo ligger punkterna $\pm(-\sqrt{2}, 0, 2\sqrt{2})/\sqrt{5}$ och längst ifrån ligger $\pm(4, 0, 2)/\sqrt{5}$.
Återstår att ange en punkt på avstånd 3 från *ytan*. Enklast koordinater blir det om man går i riktningen som ges av $\mathbf{f}_{max}$. Eftersom avståndet från origo till ytan i denna riktning är 2 får vi en punkt på avstånd 3 från ytan om vi fortsätter ytterligare $3\mathbf{f}_{max}$ efter att vi nått ytan, d.v.s. totalt $5\mathbf{f}_{max}$. En punkt P med avstånd 3 till ytan fås då av

$$\overline{OP} = 5\mathbf{f}_{max} = 5\frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \iff P = (2\sqrt{5}, 0, \sqrt{5}).$$

7. Ur förutsättningarna följer

$$F \text{ symmetrisk} \iff \text{egenvektorer till skilda egenvärden är ortogonala}$$
$$F \text{ är inte inverterbar} \iff 0 \text{ är ett egenvärde.}$$

Då $F\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ finns inga fler egenvärden än 0 och de givna ±3. Eftersom egenvektorerna är ortogonala är egenvektorn till 0 parallell med

$$\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\1\\-8\end{pmatrix}\times\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}7\\4\\4\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}36\\-72\\9\end{pmatrix} = 9\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\-8\\1\end{pmatrix}.$$
$$\begin{matrix}4 & \quad 7\\ 1 & \quad 4\end{matrix}$$

Normerar vi de tre egenvektorerna (som alla har längd 9) får vi en ON-bas av egenvektorer

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{9}\underline{\mathbf{e}}\underset{\lambda=-3}{\begin{pmatrix}4\\1\\-8\end{pmatrix}}, \mathbf{f}_2 = \frac{1}{9}\underline{\mathbf{e}}\underset{\lambda=3}{\begin{pmatrix}7\\4\\4\end{pmatrix}}, \mathbf{f}_3 = \frac{1}{9}\underline{\mathbf{e}}\underset{\lambda=0}{\begin{pmatrix}4\\-8\\1\end{pmatrix}},$$

$$T = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}4 & 7 & 4\\ 1 & 4 & -8\\ -8 & 4 & 1\end{pmatrix}, \quad A_{\underline{\mathbf{f}}} = \begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = TA_{\underline{\mathbf{f}}}T^{-1} = [T^{-1} = T^t] = \frac{3}{9}T\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 1 & -8\\ 7 & 4 & 4\\ 4 & -8 & 1\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3\cdot9}\begin{pmatrix}4 & 7 & 4\\ 1 & 4 & -8\\ -8 & 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & -1 & 8\\ 7 & 4 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix}33 & 24 & 60\\ 24 & 15 & 24\\ 60 & 24 & -48\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}11 & 8 & 20\\ 8 & 5 & 8\\ 20 & 8 & -16\end{pmatrix}.$$

För att kontrollera svaret räknar vi ut F av de tre egenvektorerna.

$$F(4, 1, -8) = \underline{\mathbf{e}}\frac{1}{9}\begin{pmatrix}11 & 8 & 20\\ 8 & 5 & 8\\ 20 & 8 & -16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\1\\-8\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-108\\-27\\216\end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix}4\\1\\-8\end{pmatrix},$$

$$F(7,4,4) = \underline{\mathbf{e}}\,\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 11 & 8 & 20 \\ 8 & 5 & 8 \\ 20 & 8 & -16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 189 \\ 108 \\ 108 \end{pmatrix} = 3\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$F(4,-8,1) = \underline{\mathbf{e}}\,\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 11 & 8 & 20 \\ 8 & 5 & 8 \\ 20 & 8 & -16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d.v.s. den framräknade matrisen har de rätta egenskaperna.