Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ulf Janfalk

Utbildningskod: TATA31
Modul: TEN1

Tentamen i Linjär algebra (TATA31/TEN1) 2023–01–09, 14–19.

Inga hjälpmedel, förutom passare, linjal eller gradskiva. OBS! Inga formler eller liknande tryckta på linjal eller gradskiva. Ej räknedosa.
För godkänt räcker 9 poäng och minst 3 uppgifter med 2 eller 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning ($\geq$ 11p) ht2022 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas) och 16p eller mer ger 4 poäng på uppgift 1. Markera detta genom att skriva ”G” respektive ”G+1” i rutan för uppgift 1.
Fullständiga motiveringar krävs. Lösningar läggs ut tisdag 10/1 på

http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html

Resultat meddelas via e-post inom 10 arbetsdagar.
Alla koordinater för vektorer och punkter är, om ej annat anges, givna med avseende på ett positivt orienterat ON-system, $\mathbb{R}^n$ är ett euklidiskt rum med standardskalärprodukten och standardbasen ett positivt orienterat ON-system.

(2 p) 1. (a) Punkterna $P_1 = (6, 6, 3)$ och $P_2 = (4, 2, -3)$ är varandras spegelbilder i ett plan Π. Ange ekvationen för Π på normalform. För full poäng krävs en tydlig figur som visar hur du tänkt.

(1 p) (b) Bestäm inversen till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Redovisa endast kontrollen av att ditt svar är korrekt genom att beräkna $A^{-1}A$. **OBS!** Kalkylen för att ta fram inversen skall ***INTE*** redovisas.

(3 p) 2. Bestäm den lösning till nedanstående system av differensekvationer

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - b_{n-1} \\ b_n = 2a_{n-1} + b_{n-1} \end{cases}$$

för vilken gäller att

$$\lim_{n\to\infty} 2^{-n} a_n = 3.$$

(3 p) 3. Betrakta linjerna L_1: $3x - y = 0$, L_2: $x + 2y = 0$ och låt de linjära avbildningarna $F, G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definieras av att

$$F(\mathbf{u}) = \mathbf{u}\text{:s ortogonala projektion på } L_1,$$
$$G(\mathbf{u}) = \mathbf{u}\text{:s ortogonala projektion på } L_2.$$

Bestäm avbildningsmatriserna till F, G och $F \circ G$ i standardbasen.
$(F \circ G(\mathbf{u}) = F(G(\mathbf{u})))$

VÄND!

(3 p) 4. Betrakta underrummet

$$\mathbb{U} = [(1,-1,1,-1,1),(1,1,0,1,1),(1,2,3,2,1),(0,2,9,2,0)] \subset \mathbb{R}^5.$$

Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}$ och fyll ut den till en ON-bas i $\mathbb{R}^5$.

(3 p) 5. Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ har i standardbaserna för $\mathbb{R}^5$ och $\mathbb{R}^3$ avbildningsmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bestäm en bas i $N(F)$, en bas i $V(F)$ samt deras respektive dimension. Ange också alla $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^5$ sådana att $F(\mathbf{u}) = (1,-1,3)$.

6. Betrakta den kvadratiska formen

$$Q(\mathbf{u}) = Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

(2 p) (a) Ange det största respektive minsta värde som $Q(\mathbf{u})$ kan anta då $|\mathbf{u}| = 3$ samt för vilka $\mathbf{u}$ dessa antas.

(1 p) (b) Ange de punkter på ytan $Q(\mathbf{u}) = -8$ som ligger närmast origo.

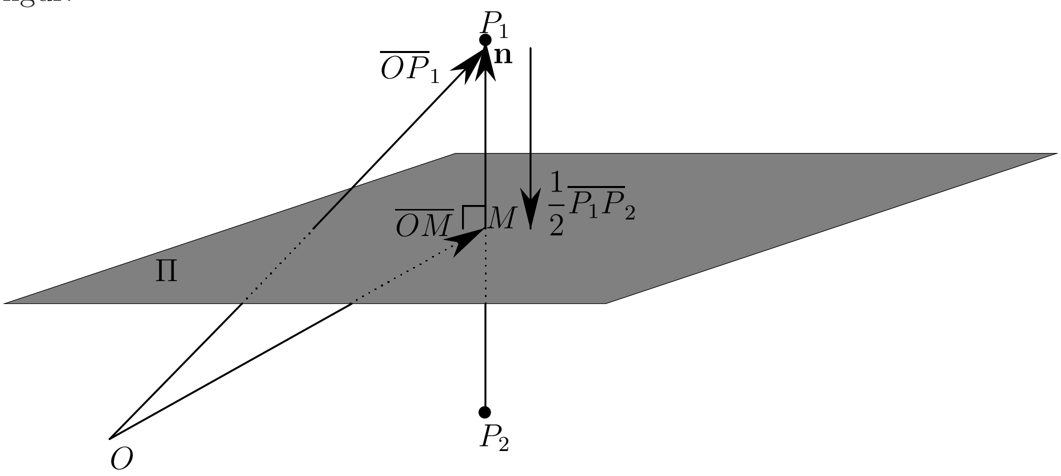
(3 p) 7. Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har i standardbasen matrisen

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 3 & 2 & 6 \\ -6 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ge en fullständig geometrisk beskrivning av vad F och $F \circ F$ gör med vektorerna i $\mathbb{R}^3$.

Lösningsförslag till TATA31, Linjär algebra, 2023–01–09.

1. (a) Om P_1 och P_2 är varandras spegelbilder så är $\overline{P_1P_2}$ parallell Π:s normal och mittpunkten M på sträckan mellan P_1 och P_2 måste ligga i Π, se nedanstående figur.



Beräkning av dessa ger

$$\overline{P_1P_2} = \overline{OP}_2 - \overline{OP}_1 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} = -2\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\overline{OM} = \overline{OP}_1 + \frac{1}{2}\overline{P_1P_2} = \overline{OP}_1 + \frac{1}{2}\left(\overline{OP}_2 - \overline{OP}_1\right) = \frac{1}{2}\left(\overline{OP}_1 + \overline{OP}_2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Med $\mathbf{n} = (1,2,3)$ fås nu

$$\begin{aligned} \Pi: &\quad x + 2y + 3z = D, \\ M \in \Pi: &\quad 5 + 4{\cdot}2 + 3{\cdot}0 = 13 = D, \end{aligned}$$

d.v.s. Π: $\quad x + 2y + 3z = 13$

(b) Den sedvanliga kalkylen ger att

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -4 \\ 13 & 3 & -5 \\ -5 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

För att verifiera att detta är korrekt beräknar vi

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -4 \\ 13 & 3 & -5 \\ -5 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11{\cdot}1 + 2{\cdot}(-1) - 4{\cdot}2 & 11{\cdot}0 + 2{\cdot}2 - 4{\cdot}1 & 11{\cdot}2 + 2{\cdot}3 - 4{\cdot}7 \\ 13{\cdot}1 + 3{\cdot}(-1) - 5{\cdot}2 & 13{\cdot}0 + 3{\cdot}2 - 5{\cdot}1 & 13{\cdot}2 + 3{\cdot}3 - 5{\cdot}7 \\ -5{\cdot}1 - 1{\cdot}(-1) + 2{\cdot}2 & -5{\cdot}0 - 1{\cdot}2 + 2{\cdot}1 & -5{\cdot}2 - 1{\cdot}3 + 2{\cdot}7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Skriv på matrisform. Då fås

$$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = AX_{n-1}.$$

Beräkna egenvärden och egenvektorer till A.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(1-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = \\ &= (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \iff \lambda = 2, 3, \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\lambda = 2}}: \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\underline{\underline{\lambda = 3}}: \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_3 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Detta ger att lösningen kan skrivas

$$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = C_1 2^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 3^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

så att $a_n = C_1 2^n + C_2 3^n$. Då gäller

$$2^{-n} a_n = 2^{-n}\left(C_1 2^n + C_2 3^n\right) = C_1 + C_2 \left(\frac{3}{2}\right)^n \to \begin{cases} +\infty & \text{om } C_2 > 0, \\ C_1 & \text{om } C_2 = 0, \\ -\infty & \text{om } C_2 < 0 \end{cases} \quad \text{då } n \to \infty.$$

Följaktligen, om $2^{-n} a_n$ skall ha gränsvärdet 3 då $n \to \infty$ så måste $C_2 = 0$ och $C_1 = 3$ vilket ger

$$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = 3 \cdot 2^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot 3^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^n \\ 6 \cdot 2^n \end{pmatrix}.$$

3. För att hitta vilka vektorer vi skall projicera på skriver vi först de två linjerna på parameterform. Vi får

$$L_1\colon 3x - y = 0 \iff \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} t \\ 3x = 3t \end{pmatrix} = t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = t\mathbf{v}_1, \ t \in \mathbb{R},$$

$$L_2\colon x + 2y = 0 \iff \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2y = -2t \\ t \end{pmatrix} = t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = t\mathbf{v}_2, \ t \in \mathbb{R}$$

vilket ger $F(\mathbf{u}) = \mathbf{u}_{\|\mathbf{v}_1}$ och $G(\mathbf{u}) = \mathbf{u}_{\|\mathbf{v}_2}$. Enligt **Sats 7.3.1**, sid 174 fås nu respektive avbidniningssmatris genom att vi beräknar vad F respektive G gör med standardbasvektorerna.

$$F(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_{1\|\mathbf{v}_1} = \frac{1}{10}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$F(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_{1\|\mathbf{v}_1} = \frac{1}{10}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{3}{10}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix},$$

$$G(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_{1\|\mathbf{v}_2} = \frac{1}{5}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = -\frac{2}{5}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix},$$

$$G(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_{1\|\mathbf{v}_2} = \frac{1}{5}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$$

vilket ger

$$A_F = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}1 & 3\\3 & 9\end{pmatrix}, \quad A_G = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & -2\\-2 & 1\end{pmatrix}.$$

Slutligen ger **Sats 7.6.2**, sid 186 att

$$A_{F\circ G} = A_F A_G \frac{1}{10}\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 3\\3 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -2\\-2 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{50}\begin{pmatrix}-2 & 1\\-6 & 3\end{pmatrix}.$$

Observera att den sammansatta avbildningen $F\circ G$ ***INTE*** blir symmetrisk trots att både F och G är symmetriska.

4. Kalla de genererande vektorerna $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$. Vi börjar på standardsättet och studerar beroendeekvationen samt "L.K = godtycklig vektor", d.v.s.

$$\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_3\mathbf{u}_3 + \lambda_4\mathbf{u}_4 = \mathbf{0}, \mathbf{x}$$

Anledningen att vi här studerar "L.K = godtycklig vektor" är att vi genom denna ekvation får de ekvationer som definierar $\mathbb{U}$ och via dessa ekvationer kan vi sedan få fram vektorer som genererar $\mathbb{U}$:s ortogonala komplement som är lämpliga att fylla ut med då vill skapa en ON-bas i $\mathbb{R}^5$. Vi får

$$\left(\begin{array}{cccc|cc}1 & 1 & 1 & 0 & 0 & x_1\\-1 & 1 & 2 & 2 & 0 & x_2\\1 & 0 & 3 & 9 & 0 & x_3\\-1 & 1 & 2 & 2 & 0 & x_4\\1 & 1 & 1 & 0 & 0 & x_5\end{array}\right) \underset{\sim}{\substack{r_5-r_1\\r_4-r_2\\r_2+r_1}} \left(\begin{array}{cccc|cc}1 & 1 & 1 & 0 & 0 & x_1\\0 & 2 & 3 & 2 & 0 & x_1+x_2\\0 & -1 & 2 & 9 & 0 & -x_1+x_3\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2+x_4\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1+x_5\end{array}\right) \underset{\sim}{\substack{r_2+2r_3\\r_2\leftrightarrow r_3}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cc}1 & 1 & 1 & 0 & 0 & x_1\\0 & -1 & 2 & 9 & 0 & -x_1+x_3\\0 & 0 & 7 & 20 & 0 & -x_1+x_2+2x_3\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2+x_4\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1+x_5\end{array}\right).$$

Vi börjar med att lösa beroendeekvationen. Vi får

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\lambda_2-\lambda_3 = -23t+20t = -3t\\2\lambda_3+9\lambda_4 = -40t+63t = 23t\\-20\lambda_4/7 = -20t\\7t\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}-3\\23\\-20\\7\end{pmatrix}, \quad t\in\mathbb{R}$$

vilket ger att

$$-3\mathbf{u}_1 + 23\mathbf{u}_2 - 20\mathbf{u}_3 + 7\mathbf{u}_4 = \mathbf{0} \iff \mathbf{u}_4 = (3\mathbf{u}_1 - 23\mathbf{u}_2 + 20\mathbf{u}_3)/7$$

och vi kan därför utse $\mathbf{u}_4$ till löjligt element. Studerar vi sedan "L.K = godtycklig vektor" ser vi att denna ekvation är lösbar omm

$$-x_2 + x_4 = 0 \quad \text{och} \quad -x_1 + x_5 = 0.$$

Skriver vi dessa två ekvationer som skalärprodukter fås

$$-x_2 + x_4 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0, \quad -x_1 + x_5 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0,$$

d.v.s. de vektorer som är lösningar till "L.K = godtycklig vektor" är de som är ortogonala mot

$$(0, -1, 0, 1, 0) \quad \text{och} \quad (-1, 0, 0, 0, 1).$$

Sammantaget ger detta att

$$\begin{aligned} \mathbb{U} &= [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3] = [(1, -1, 1, -1, 1), (1, 1, 0, 1, 1), (1, 2, 3, 2, 1)] = \\ &= \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \colon \begin{array}{c} -x_1 + x_5 = 0, \\ -x_2 + x_4 = 0 \end{array} \right\}, \\ \mathbb{U}^\perp &= [(0, -1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 0, 1)]. \end{aligned}$$

Vi börjar med att observera att $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$ så för att skapa en ON-bas i $\mathbb{U}$ räcker det med att normera dem och ortogonalisera $\mathbf{u}_3$ med hjälp av Gram-Schmidtmetoden. Vi får

$$\mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{u}}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \widehat{\mathbf{u}}_2 = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{3_{\parallel[\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2]}} &= (\mathbf{u}_3 \bullet \mathbf{f}_1)\, \mathbf{f}_1 + (\mathbf{u}_3 \bullet \mathbf{f}_2)\, \mathbf{f}_2 = \\ &= \frac{1}{5} \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{5} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{6}{4} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ 0 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{10} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 17 \\ 13 \\ 2 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{u}_{3_{\perp[\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2]}} = \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_{3_{\parallel[\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2]}} = \frac{1}{10} \left(\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 17 \\ 13 \\ 2 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 28 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix} = \frac{7}{10} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_3 = \widehat{\mathbf{u}_{3_{\perp[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}}} = \frac{1}{\sqrt{20}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\1\\4\\1\\-1\end{pmatrix}$$

och $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ är en ON-bas i $\mathbb{U}$. (Glöm inte att i sista steget före normering kolla att din "$\mathbf{u}_{3_{\perp[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}}$" verkligen är $\perp$ mot $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$!).
Som utfyllnad till bas i $\mathbb{R}^5$ väljer vi de två vektorer som genererar $\mathbb{U}^\perp$ då dessa per konstruktion är ortogonala mot $\mathbb{U}$. Då de dessutom är ortogonala mot varann räcker det att normera dem för att vi skall ha en ON-bas i $\mathbb{U}^\perp$, d.v.s.

$$\mathbf{f}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

är en ON-bas i $\mathbb{U}$. Därmed är $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_5$ en ON-mängd i $\mathbb{R}^5$ med "rätt antal" element, d.v.s. en ON-bas i $\mathbb{R}^5$ enligt **Sats 6.3.3**, sid 143.

5. Vi börjar med nollrummet $N(F)$, d.v.s. vi löser ekvationen $AX = \mathit{0}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&-1&1&-1&1&0\\-1&3&-2&3&-1&0\\3&1&1&1&3&0\end{array}\right) \overset{\substack{r_2+r_1\\r_3-3r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c}1&-1&1&-1&1&0\\0&2&-1&2&0&0\\0&4&-2&4&0&0\end{array}\right) \overset{\substack{r_1+r_2\\r_3-2r_2}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&0&1&1&0\\0&2&-1&2&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right) \Longrightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x_2-x_4-x_5=-r-s-t\\r\\2x_2+2x_4=2r+2s\\s\\t\end{pmatrix} =$$

$$= r\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\0\\2\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad r, s, t \in \mathbb{R}.$$

Detta ger

$$N(F) = [(-1,1,2,0,0), (-1,0,2,1,0), (-1,0,0,0,1)]$$

och då de genererande vektorerna är linjärt oberoende är de en bas i $N(F)$ som därmed har dimension 3. Dimensionssatsen, **Sats 7.5.6**, sid 182 ger då att

$$\dim V(F) = \dim \mathbb{R}^5 - \dim N(F) = 5 - 3 = 2.$$

Vidare, enligt **Sats 7.5.4**, sid 181 är värderummet = höljet av kolonnvektorerna, d.v.s.

$$V(F) = \left[\underline{\mathbf{e}}_3\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}_3\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}_3\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}_3\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}_3\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}\right].$$

Då de första två inte är parallella är de linjärt oberoende och "rätt antal", d.v.s. en bas i $V(F)$ enligt Satsen om rätt antal element, **Sats 5.4.19**, sid 121. (Man kan förstås gå vidare "som vanligt" och utnyttja basen i $N(F)$ för att utse löjliga element.)
Återstår att bestämma alla lösningar till

$$F(\mathbf{u}) = (1,-1,3) = \underline{\mathbf{e}}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{k}_1.$$

Enligt **Sats 7.3.1**, sid 174 består avbildningsmatrisens kolonner av det som F gör med de aktuella basvektorerna, dvs

$$F(\mathbf{e}_1) = F(1,0,0,0,0) = (1,-1,3).$$

Enligt **Sats 7.5.9**, sid 185 följer då att om $F(\mathbf{u}) = (1,-1,3)$ så är $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{u}_h$ där $\mathbf{u}_h \in N(F)$, d.v.s.

$$\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}}_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r,s,t \in \mathbb{R}.$$

Man får förstås precis detta om man ställer upp

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

och gör exakt samma radoperationer som då lösningen till $AX = \mathit{0}$ beräknades.

6. Skriv Q på matrisform och beräkna egenvärdena.

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{u}) &= Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3 = \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = X_{\underline{\mathbf{e}}}{}^t A_{\underline{\mathbf{e}}} X_{\underline{\mathbf{e}}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(A_{\underline{\mathbf{e}}} - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -2 \\ -1 & 1-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{r_2-r_1}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -2 \\ \lambda-2 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{k_1+k_2}{=} \\ &= \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -4 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (2-\lambda)\left(\lambda^2 - 2\lambda - 8\right) = 0 \iff \lambda = 2, 1 \pm \sqrt{1+8} = 1 \pm 3 = -2, 4. \end{aligned}$$

Då $A_{\underline{\mathbf{e}}}$ är avbildningsmatris till en symmetrisk avbildning finns det en ON-bas av egenvektorer. Om vi väljer denna så att $\mathbf{f}_1$ är egenvektor till -2, $\mathbf{f}_2$ till 2 och $\mathbf{f}_3$ till 4 så fås att i denna bas är

$$Q(\mathbf{u}) = -2y_1^2 + 2y_2^2 + 4y_3^2.$$

(a) Då $|\mathbf{u}| = 3$ ger **Sats 9.1.11**, sid 227 att

$$-2\,|\mathbf{u}|^2 = -2{\cdot}3^2 = -18 \le Q(\mathbf{u}) \le 4\,|\mathbf{u}|^2 = 4{\cdot}3^2 = 36$$

med likhet då $\mathbf{u}$ är en egenvektor av längd 3 till $\lambda_{min} = -2$ respektive $\lambda_{max} = 4$, d.v.s.

$$\mathbf{u}_{min} = \pm 3\mathbf{f}_1 \quad \text{och} \quad \mathbf{u}_{max} = \pm 3\mathbf{f}_3.$$

Återstår att beräkna dessa.

$$\underline{\underline{\lambda = -2}}: \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_1+3r_2 \\ r_3-2r_2 \\ r_1\leftrightarrow -r_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & -8 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_3+r_2 \\ r_3/8}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X_{-2} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{\lambda = 4}}: \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_1-3r_2 \\ r_3-2r_2 \\ r_1\leftrightarrow -r_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-2r_3 \\ r_2\leftrightarrow r_3/2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X_4 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Med $\mathbf{f}_1 = (1,1,1)/\sqrt{3}$ och $\mathbf{f}_3 = (1,1,-2)/\sqrt{6}$ fås att Q:s minvärde -18 respektive maxvärde 36 antas för

$$\mathbf{u}_{min} = \pm\frac{3}{\sqrt{3}}(1,1,1) = \pm\sqrt{3}(1,1,1) \quad \text{och}$$
$$\mathbf{u}_{max} = \pm\frac{3}{\sqrt{6}}(1,1,-2) = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}(1,1,-2).$$

(b) Betrakta nu den yta som ges av $Q(\mathbf{u}) = -8$. För de $\mathbf{u}$ som satisfierar denna ekvation gäller nu, återigen enligt **Sats 9.1.11**, sid 227, att

$$-2\,|\mathbf{u}|^2 \le Q(\mathbf{u}) = -8 \le 4\,|\mathbf{u}|^2.$$

Den högra olikheten är trivialt sann för alla $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Den vänstra ger

$$-2\,|\mathbf{u}|^2 \le -8 \iff |\mathbf{u}|^2 \ge 4 \iff |\mathbf{u}| \ge 2,$$

med likhet då $\mathbf{u}$ är en egenvektor av längd 2 till $\lambda = -2$. Närmast origo, på avståndet 2, är de punkter P_{min} med ortsvektor $\overline{OP} = \pm 2\mathbf{f}_1$, d.v.s.

$$P_{min} = \pm\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

7. Vi börjar med att observera att alla tre kolonnvektorerna har samma längd,

$$\sqrt{2^2+3^2+6^2}/7 = \sqrt{49}/7 = 1$$

och att de är parvis ortogonala,

$$\mathbf{k}_1 \bullet \mathbf{k}_2 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 12 + 6 - 18 = 0,$$

$$\mathbf{k}_1 \bullet \mathbf{k}_3 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = -6 + 18 - 12 = 0,$$

$$\mathbf{k}_2 \bullet \mathbf{k}_3 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = -18 + 12 + 6 = 0.$$

Detta ger att $A_{\underline{\mathbf{e}}}$ är en ON-matris och därmed är F och $F \circ F$ isometriska avbildningar. För att avgöra vilken typ beräknar vi determinanten av $A_{\underline{\mathbf{e}}}$.

$$\det A_{\underline{\mathbf{e}}} = \frac{1}{7^3} \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 3 & 2 & 6 \\ -6 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{7^3} \cdot \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 6 & 4 & 12 \\ -6 & 3 & 2 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2 - 3r_1 \\ r_3 + 3r_1}}{=} \frac{1}{7^3} \cdot \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 0 & -14 & 21 \\ 0 & 21 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{7^3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 7^2 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{7}(2 - 9) = -1.$$

Enligt **Sats 7.7.6**, sid 195 är F antingen en spegling eller en vridspegling. Då en spegling är en symmetrisk avbildning och då $A_{\underline{\mathbf{e}}}$ ***inte*** är symmetrisk så följer det att F är en vridpegling. Vi väntar med $F \circ F$ och reder ut F först. Då F är en vridspegling har ekvationen $A_{\underline{\mathbf{e}}} X = -X$ en nollskild lösning vilket ger normalvektorn till det plan som vridspeglingen sker i. För att förenkla kalkylen sätter vi $A_{\underline{\mathbf{e}}} X = \dfrac{1}{7} B$ så att

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} X = \frac{1}{7} BX = -X \iff BX = -7X \iff (B + 7I)X = 0 \iff$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 6 & -3 & 0 \\ 3 & 9 & 6 & 0 \\ -6 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_1 - 3r_2 \\ r_3 + 2r_2 \\ r_1 \leftrightarrow r_2/3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -21 & -21 & 0 \\ 0 & 21 & 21 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2 + r_3 \\ -r_2/21}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sätt $\mathbf{f}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och fyll ut till en höger ON-bas med, t.ex.

$$\mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{\mathbf{e}} \underset{\begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} \times \underline{\mathbf{e}} \underset{\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = T^t, \quad A_{\underline{\mathbf{f}}} = T^t A_{\underline{\mathbf{e}}} T =$$

$$= \frac{1}{7} T^t \begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 3 & 2 & 6 \\ -6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7/\sqrt{3} & 8/\sqrt{2} & -2/\sqrt{6} \\ 7/\sqrt{3} & 5/\sqrt{2} & 11/\sqrt{6} \\ -7/\sqrt{3} & -3/\sqrt{2} & 13/\sqrt{6} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -21/3 & 0 & 0 \\ 0 & 13/2 & 9/\sqrt{12} \\ 0 & -9/\sqrt{12} & 39/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 13/14 & 3\sqrt{3}/14 \\ 0 & -3\sqrt{3}/14 & 13/14 \end{pmatrix}.$$

Standardutseendet för en vridspegling vinkeln θ moturs sett från topppen av $\mathbf{f}_1$ är

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

vilket gör att vår avbildning är en vridspegling som vrider vinkeln $\theta = \arccos \dfrac{13}{14}$ medurs (eftersom $\sin\theta < 0$) sett från toppen av $\mathbf{f}_1$ följt av en spegling i normalplanet till $\mathbf{f}_1$, d.v.s. i planet $x - y + z = 0$.
Enligt **Sats 7.7.3**, sid 192 är $F \circ F$ också isometrisk och enligt **Sats 7.6.2**, sid 186 har $F \circ F$ avbildningsmatrisen $A^2_{\underline{\mathbf{e}}}$. Enligt produktlagen för determinanter, **Sats 4.8.1**, sid 96 är $\det A^2_{\underline{\mathbf{e}}} = (\det A_{\underline{\mathbf{e}}})^2 = (-1)^2 = 1$ och $F \circ F$ är därmed en vridning. Då

$$F \circ F(1,-1,1) = F(F(1,-1,1)) = F(-(1,-1,1)) = -F(1,-1,1) =$$
$$= -(-(1,-1,1)) = (1,-1,1)$$

har F och $F \circ F$ samma vridningsaxel och därmed att vridningsvinkeln är $2\arccos \dfrac{13}{14}$ medurs sett från toppen av $\mathbf{f}_1$.
Alternativ: Istället för den något räknetunga analysen av F kan man istället för att beräkna $A_{\underline{\mathbf{f}}}$ göra enligt följande efter att man bestämt vridningsaxeln. Tag en vektor $\perp (1,-1,1)$, t.ex. $\mathbf{u} = (1,1,0)$ och beräkna vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $F(\mathbf{u})$.

$$F(\mathbf{u}) = \frac{1}{7} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 3 & 2 & 6 \\ -6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u} \bullet F(\mathbf{u}) = |\mathbf{u}| \cdot \underbrace{|F(\mathbf{u})|}_{=|\mathbf{u}|} \cos\theta = 2\cos\theta = \frac{1}{7} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{13}{7} \iff$$

$$\iff \cos\theta = \frac{13}{14}$$

För att avgöra om vridningen sker med- eller moturs beräknar vi $\mathbf{u} \times \mathbf{F}(\mathbf{u})$. Då båda vektorerna är ortogonala mot $(1,-1,1)$ måste deras kryssprodukt bli parallell med denna och har de samma riktning sker vridningen moturs sett från toppen av $(1, -1, 1)$ och har de motsatt riktning sker vridningen medurs.

$$\mathbf{u}\times\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \frac{1}{7}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\\1\\1\end{array}\times\underline{\mathbf{e}}\begin{array}{c}\begin{pmatrix}8\\5\\-3\end{pmatrix}\\8\\5\end{array} = \frac{1}{7}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-3\\3\\-3\end{pmatrix} = -\frac{3}{7}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

så vridningen sker medurs.