Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ulf Janfalk

Utbildningskod: TATA31
Modul: TEN1

Tentamen i Linjär algebra (TATA31/TEN1) 2023–03–14, 8–13.

Inga hjälpmedel, förutom passare, linjal eller gradskiva. OBS! Inga formler eller liknande tryckta på linjal eller gradskiva. Ej räknedosa.
För godkänt räcker 9 poäng och minst 3 uppgifter med 2 eller 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning ($\geq$ 11p) ht2022 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas) och 16p eller mer ger 4 poäng på uppgift 1. Markera detta genom att skriva ”G” respektive ”G+1” i rutan för uppgift 1 på raden märkt “X här/*here*”.
Fullständiga motiveringar krävs. Lösningar läggs ut onsdag 15/3 på

http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html

Resultat meddelas via e-post inom 10 arbetsdagar.
Alla koordinater för vektorer och punkter är, om ej annat anges, givna med avseende på ett positivt orienterat ON-system, $\mathbb{R}^n$ är ett euklidiskt rum med standardskalärprodukten och standardbasen ett positivt orienterat ON-system.

1. Bestäm en ekvation på ***normalform*** till planet Π som innehåller punkterna

$$P_1 = (1, 0, 1), \quad P_2 = (2, 1, 1) \quad \text{och} \quad P_3 = (-1, 2, 3).$$

Bestäm sedan avståndet mellan Π och $P_4 = (1, 1, 4)$ samt den punkt i Π som ligger närmast P_4.

(2 p) 2. (a) Bestäm minsta-kvadratlösningen till den (olösbara) matrisekvationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(1 p) (b) Använd resultatet i (a) till att beräkna ortogonalprojektionen av $\mathbf{u} = (1, 3, 1, -1, 4)$ på underrummet

$$\mathbb{U} = [(1, 1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0, 1)] \subset \mathbb{R}^5.$$

3. Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ har i standardbaserna för $\mathbb{R}^5$ och $\mathbb{R}^3$ matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & a \\ -2 & 1 & 3 & 2 & b \\ -1 & 0 & 1 & 1 & c \end{pmatrix}.$$

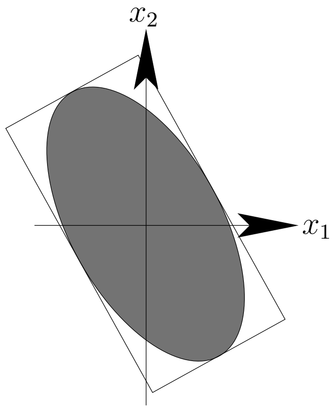
Bestäm $a, b, c \in \mathbb{R}$ så att $\mathbf{u} = (1, 2, 3, -2, -5) \in N(F)$. Bestäm därefter en bas i $N(F)$ och en bas i $V(F)$ samt deras respektive dimension.

VÄND!

4. Ekvationen

$$17x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2 = 720$$

definierar en ellips (behöver ej visas). Runt ellipsen ritas en rektangel enligt figur. Bestäm ellipsens halvaxellängder samt koordinaterna för rektangels hörn. (Figuren skall bara ses som en *principskiss.*)



5. Betrakta underrummet

$$\mathbb{U} = [1 + x^2 + 2x^3, 1 + 2x - x^2 - 4x^3, 3 + x + 2x^2 + 3x^3, 5 + 4x + x^2 - 2x^3] \subset \mathbb{P}_3.$$

Bestäm en bas i $\mathbb{U}$ samt $\mathbb{U}$:s dimension. Fyll ut basen i $\mathbb{U}$ till en bas i $\mathbb{P}_3$ och ange koordinaterna för $\mathbf{q} = 1 + x - 2x^3$ i den bas du valt.

6. Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ har i standardbasen matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 & 6 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 12 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 18 \\ 8 & 16 & 24 & 32 & 24 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 26 \end{pmatrix}.$$

(1 p) (a) Bestäm egenvärdena till F. (Att $43^2 = 1849$ och $\sqrt{1369} = 37$ får användas utan bevis.)

(2 p) (b) Har du räknat rätt i (a) kommer du ha fått ett egenvärde med algebraisk multiplicitet 3 (ett så kallat *trippelegenvärde*) och två enkelegenvärden. Bestäm en ON-bas i egenrummet till trippelegenvärdet .

7. De linjära avbildningarna $F, G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definieras enligt följande:

$$F \text{ utför en spegling i planet } 2x - y + z = 0,$$
$$G \text{ utför en spegling i planet } -x + 2y + z = 0.$$

Ge en fullständig geometrisk beskrivning av $F \circ G$.

Lösningsförslag till TATA31, Linjär algebra, 2023–03–14.

1. Vi börjar med att beräkna två vektorer i planet för att med hjälp av dessa “kryssa” fram planets normal och med hjälp av denna skriva upp planets ekvation.

$$\overline{P_1P_2} = \overline{OP_2} - \overline{OP_1} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\overline{P_1P_3} = \overline{OP_3} - \overline{OP_1} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix} = 2\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{n}_\Pi \parallel \overline{P_1P_2}\times\overline{P_1P_3} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\times\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \Longrightarrow$$

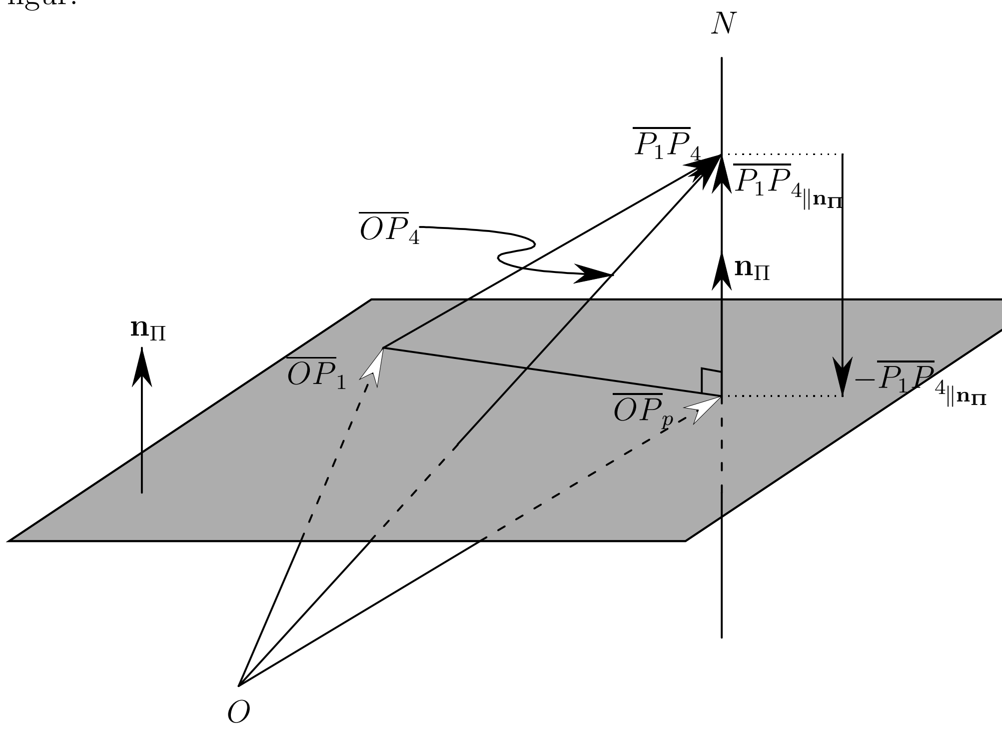
$$\begin{matrix}1 & & -1\\ 1 & & 1\end{matrix}$$

$$\Longrightarrow \Pi: \quad x - y + 2z = D.$$

För att bestämma D sätter vi in P_1 i ekvationen och som kontroll av att vi räknat rätt sätter vi in P_2 och P_3.

$$\begin{aligned} P_1 \in \Pi: &\quad 1 - 0 + 2\cdot 1 = 3 = D,\\ \text{Kontroll:} &\quad P_2 \in \Pi: \quad 2 - 1 + 2\cdot 1 = 3 \quad \text{OK},\\ &\quad P_3 \in \Pi: \quad -1 - 2 + 2\cdot 3 = 3 \quad \text{OK}. \end{aligned}$$

För att få fram avstånd till P_4 och närmaste punkt Π betraktar vi nedanstående figur.



Om man väljer att använda normallinjen N eller projektion på $\mathbf{n}_\Pi$ spelar ingen roll. Här redovisas metoden med projektion. Vi får

$$\overline{P_1P_4} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix},$$

$$\overline{P_1P_4}_{\|\mathbf{n}_\Pi} = \frac{\overline{P_1P_4}\bullet\mathbf{n}_\Pi}{|\mathbf{n}_\Pi|^2}\mathbf{n}_\Pi = \frac{1}{6}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = \frac{5}{6}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},$$

$$\overline{OP}_p = \overline{OP}_4 - \overline{P_1P}_{4_{\perp\mathbf{n}_\Pi}} = \frac{1}{6}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}6\\6\\24\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}5\\-5\\10\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{6}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\11\\14\end{pmatrix}.$$

Ur detta får vi att avståndet mellan Π och P_4 är

$$\left|\overline{P_1P}_{4_{\|\mathbf{n}_\Pi}}\right| = \left|\frac{5}{6}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right| = \frac{5}{6}\left|\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right| = \frac{5}{6}\sqrt{6}$$

och att $P_p = \left(\frac{1}{6}, \frac{11}{6}, \frac{14}{6}\right)$ är den punkt i Π som ligger närmast P_4.
För kontrollens skull sätter vi in P_p i ekvationen för Π.

$$\frac{1}{6}(1 - 11 + 2\cdot 14) = \frac{1}{6}(29 - 11) = \frac{18}{6} = 3 \quad OK.$$

2. (a) Minsta-kvadratlösningen fås genom att lösa *normalekvationerna* $A^tAX = A^tY$ där

$$A = \begin{pmatrix}1&1\\1&0\\1&1\\1&0\\1&1\end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix}1\\3\\1\\-1\\4\end{pmatrix},$$

$$A^tA = \begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&0&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\\1&1\\1&0\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5&3\\3&3\end{pmatrix},$$

$$A^tY = \begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&0&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\1\\-1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}5&3\\3&3\end{pmatrix}X = \begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix} \iff$$

$$\iff X = \begin{pmatrix}5&3\\3&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix} = 2\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3&-3\\-3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$

d.v.s. minsta-kvadratlösningen är $X_0 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

(b) Vi observerar att med A:s kolonnrum $= \mathbb{U}$ och $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}}\,Y$ så gäller enligt **Sats 6.4.1**, sid 162 att

$$\mathbf{u}_{\|\mathbb{U}} = \underline{\mathbf{e}}\,Y_{\|\mathbb{U}} = \underline{\mathbf{e}}\,AX_0 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. Om $\mathbf{u} \in N(F)$ så gäller att $F(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$. Beräkning av $F(\mathbf{u})$ med hjälp av avbildningsmatrisen ger

$$F(\mathbf{u}) = F(1,2,3,-2,-5) = F\left(\underline{\mathbf{e}}_5\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}\right) = \underline{\mathbf{e}}_3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & a \\ -2 & 1 & 3 & 2 & b \\ -1 & 0 & 1 & 1 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\mathbf{e}}_3\begin{pmatrix} 10-5a \\ 5-5b \\ -5c \end{pmatrix} = \mathbf{0} = \underline{\mathbf{e}}_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases}$$

vilket ger att avbildningsmatrisen blir

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

För att bestämma en bas i $N(F)$ löser vi $AX = 0$ på vanligt sätt

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2+2r_1 \\ r_3+r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{2r_2-5r_3 \\ r_1-r_3 \\ r_3/2\leftrightarrow r_2}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X = \begin{pmatrix} r+s \\ -r-t \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r,s,t \in \mathbb{R}$$

vilket ger att

$$(1,-1,1,0,0), \quad (1,0,0,1,0), \quad (0,-1,0,0,1)$$

är en bas i $N(F)$ som således har dimension 3.
Då $\dim \mathbb{R}^5 = 5$ följer det ur Dimensionssatsen, **Sats 7.5.6**, sid 182 att $\dim V(F) = 5 - 3 = 2$. Enligt **Sats 7.5.4**, sid 181 är $V(F) =$ höljet av avbildningsmatrisens kolonner. Då $\mathbf{k}_4 = -\mathbf{k}_1$ och $\mathbf{k}_5 = \mathbf{k}_2$ kan $\mathbf{k}_4$ och $\mathbf{k}_5$ utses till löjliga element. Då vi vet att $\dim V(F) = 2$ och ingen av de återstående tre är parallell med någon av de andra två kan vi välja två stycken, vilka som helst, av $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ och $\mathbf{k}_3$ till bas i $V(F)$, t.ex. $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$.

4. Skriv den kvadratiska formen i ekvationens vänsterled på matrisform och bestäm egenvärden och egenvektorer.

$$Q(\mathbf{u}) = 17x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = X^tAX,$$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 17-\lambda & 3 \\ 3 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (17-\lambda)(9-\lambda) - 9 = \lambda^2 - 26\lambda + 144 = 0 \iff$$

$$\iff \lambda = 13 \pm \sqrt{169-144} = 13 \pm 5 = 8, 18,$$

$$\underline{\underline{\lambda = 8}}: \quad \left(\begin{array}{cc|c} 9 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_8 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{\lambda = 18}}: \quad \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{18} = t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

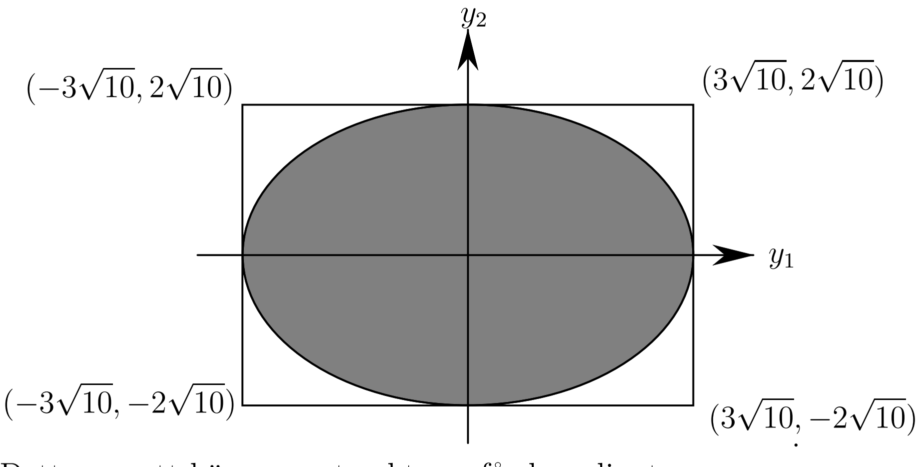
$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{f}} = \frac{1}{10}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Byte till denna ON-bas av egenvektorer ger

$$Q(\mathbf{u}) = 8y_1^2 + 18y_2^2 = 720 \iff$$

$$\iff \frac{8}{720}y_1^2 + \frac{18}{720}y_2^2 = \frac{y_1^2}{90} + \frac{y_1^2}{40} = \left(\frac{y_1}{3\sqrt{10}}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{2\sqrt{10}}\right)^2 = 1.$$

Ur detta följer att storaxeln ligger i riktningen $\mathbf{f}_1$ och har längd $3\sqrt{10}$ och lillaxeln i riktning $\mathbf{f}_2$ med längd $2\sqrt{10}$. I basen $\underline{\mathbf{f}}$ blir figuren (koordinater relativt basen $\underline{\mathbf{f}}$)



Detta ger att hörnens ortsvektorer får koordinaterna

$$\pm\,\underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 3\sqrt{10} \\ 2\sqrt{10} \end{pmatrix} = \pm\sqrt{10}\frac{1}{\sqrt{10}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \pm\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 9 \\ -7 \end{pmatrix},$$

$$\pm\,\underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} -3\sqrt{10} \\ 2\sqrt{10} \end{pmatrix} = \pm\sqrt{10}\frac{1}{\sqrt{10}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \pm\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix},$$

d.v.s. hörnens koordinater i den ursprungliga basen är

$$\pm(9,-7), \quad \pm(3,11).$$

5. Kalla de genererande polynom $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_4$, ställ, i vanlig ordning, upp beroendeekvationen, "L.K. = godtyckligt polynom" och lös beroendeekvationen. Vi får

$$\lambda_1\mathbf{p}_1 + \lambda_2\mathbf{p}_2 + \lambda_3\mathbf{p}_1 + \lambda_4\mathbf{p}_4 = \mathbf{0},\ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3,$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 3 & 5 & 0 & a_0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 0 & a_1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & a_2 \\ 2 & -4 & 3 & -2 & 0 & a_3 \end{array}\right) \underset{\sim}{\substack{r_3-r_1 \\ r_4-2r_1}} \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 3 & 5 & 0 & a_0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 0 & a_1 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & 0 & -a_0+a_2 \\ 0 & -6 & -3 & -12 & 0 & -2a_0+a_3 \end{array}\right) \underset{\sim}{\substack{r_3+r_2 \\ r_4+3r_2}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 3 & 5 & 0 & a_0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_0+a_1+a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2a_0+3a_1+a_3 \end{array}\right),$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_2 - 3\lambda_3 - 5\lambda_4 = s + 2t - 6s - 5t = -5s - 3t \\ (-\lambda_3 - 4\lambda_4)/2 = -s - 2t \\ 2s \\ t \end{pmatrix} =$$

$$= s\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Med lösningarna för $s = 1, t = 0$ respektive $s = 0, t = 1$ insatta i beroendeekvationenföljer det att

$$-5\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 + 2\mathbf{p}_3 = \mathbf{0} \iff \mathbf{p}_3 = (5\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)/2,$$
$$-3\mathbf{p}_1 - 2\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_4 = \mathbf{0} \iff \mathbf{p}_4 = 3\mathbf{p}_1 + 2\mathbf{p}_2,$$

d.v.s. $\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$ kan utses till löjliga element och $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ är linjärt oberoende. Satsen om löjliga element, **Sats 5.3.16**, sid 111, ger då att

$$\mathbb{U} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4] = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2]$$

och att $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ är en bas i $\mathbb{U}$.
För att bestämma utfyllnaden studerar vi "L.K. = godtyckligt polynom". Denna är lösbar omm

$$-a_0 + a_1 + a_2 = 0, \quad -2a_0 + 3a_1 + a_3 = 0,$$

vilket innebär att ett polynom $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ är en L.K. av $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ omm dessa samband gäller, d.v.s.

$$\mathbb{U} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2] = \left\{ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{P}_3\colon \begin{array}{rl} -a_0 + a_1 + a_2 & = 0, \\ -2a_0 + 3a_1 \qquad + a_3 & = 0 \end{array} \right\}.$$

Då $\dim \mathbb{U} = 2$ och $\dim \mathbb{P}_3 = 4$ behöver vi enligt Satsen om rätt antal element, **Sats 5.4.19**, sid 121, fylla ut med två polynom. Med hjälp av **Sats 5.4.21**, sid 123 (Plus-satsen) väljer vi dessa genom att välja det första $\mathbf{q}_3$ som bryter mot $-a_0 + a_1 + a_2 = 0$ men uppfyller $-2a_0 + 3a_1 + a_3 = 0$, t.ex.

$$\mathbf{q}_3 = x^2 = 0{\cdot}1 + 0{\cdot}x + 1{\cdot}x^2 + 0{\cdot}x^3.$$

Enligt Plus-satsen är då $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}_3$ linjärt oberoende och därmed en bas i

$$[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}_3] = \left\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{P}_3\colon\ -2a_0 + 3a_1 + a_3 = 0\right\}$$

eftersom alla tre uppfyller denna ekvation. Som sista utfyllnadsvektor väljer vi en som bryter mot detta villkor, t.ex. $\mathbf{q}_4 = 1$. Plus-satsen än en gång ger då att $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4$ är linjärt obereonde. Då de nu också är rätt antal är de en bas i $\mathbb{P}_3$.
Återstår att bestämma koordinaterna för $\mathbf{q} = 1 + x - 2x^3$ i den aktuella basen. Koordinaterna fås enklast genom att lösa ekvationen

$$\lambda_1\mathbf{p}_1+\lambda_2\mathbf{p}_2+\lambda_3\mathbf{q}_3+\lambda_4\mathbf{q}_4 = \lambda_1\underline{\mathbf{x}}_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}+\lambda_2\underline{\mathbf{x}}_3\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\-4\end{pmatrix}+\lambda_3\underline{\mathbf{x}}_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_4\underline{\mathbf{x}}_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=$$

$$=\underline{\mathbf{x}}_3\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&2&0&0\\1&-1&1&0\\2&-4&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\end{pmatrix}=\underline{\mathbf{x}}_3\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-2\end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&1&1\\0&2&0&0&1\\1&-1&1&0&0\\2&-4&0&0&-2\end{array}\right)\underset{\sim}{\overset{r_3-r_1}{r_4-2r_1}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&1&1\\0&2&0&0&1\\0&-2&1&-1&-1\\0&-6&0&-2&-4\end{array}\right)\underset{\sim}{\overset{r_3+r_2}{r_4+3r_2}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&1&1\\0&2&0&0&1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&-2&-1\end{array}\right)\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}\iff\mathbf{q}=1+x-2x^3=0\mathbf{p}_1+\frac{1}{2}\mathbf{p}_2+\frac{1}{2}\mathbf{q}_3+\frac{1}{2}\mathbf{q}_4,$$

d.v.s. $\mathbf{q}$ har koordinaterna $0, 1/2, 1/2, 1/2$ i basen $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4$.

6. (a) Vi börjar med observerationen att raderna 2,3 och 4 är multipler av rad 1 och att rad 5 "nästan" är det. Detta skall vi utnyttja i de operationer vi skall genomföra.

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}2-\lambda&4&6&8&6\\4&8-\lambda&12&16&12\\6&12&18-\lambda&24&18\\8&16&24&32-\lambda&24\\6&12&18&24&26-\lambda\end{vmatrix}\overset{\substack{r_2-2r_1\\r_3-3r_1\\r_4-4r_1\\r_5-3r_1}}{=}$$

$$=\begin{vmatrix}2-\lambda&4&6&8&6\\2\lambda&-\lambda&0&0&0\\3\lambda&0&-\lambda&0&0\\4\lambda&0&0&-\lambda&0\\3\lambda&0&0&0&8-\lambda\end{vmatrix}\overset{\substack{k_1+2k_2\\k_1+3k_3\\k_1+4k_4\\k_1+3k_5}}{=}$$

$$=\begin{vmatrix}78-\lambda&4&6&8&6\\0&-\lambda&0&0&0\\0&0&-\lambda&0&0\\0&0&0&-\lambda&0\\24&0&0&0&8-\lambda\end{vmatrix}=\Big[\text{Utveckling efter rad 2, 3 och 4}\Big]=$$

$$= (-\lambda)^3 \begin{vmatrix} 78-\lambda & 6 \\ 24 & 8-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3((78-\lambda)(8-\lambda) - 24{\cdot}6) =$$

$$= -\lambda^3\left(\lambda^2 - 86\lambda + 8(78-18)\right) = -\lambda^3\left(\lambda^2 - 86\lambda + 480\right) = 0 \iff$$

$$\iff \lambda = 0 \text{ (trippel)}, 43 \pm \sqrt{1849-480} = 43 \pm \sqrt{1369} = 43 \pm 37 = 80, 6$$

(b) Vi bestämmer egenvektorerna till trippelegenvärdet 0 på vanligt sätt.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 6 & 8 & 6 & 0 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 12 & 0 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 18 & 0 \\ 8 & 16 & 24 & 32 & 24 & 0 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 26 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-3r_1 \\ r_4-4r_1 \\ r_5-3r_1 \\ r_1/2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right) \implies$$

$$\implies X_0 = t\begin{pmatrix} -2r-3s-4t \\ r \\ s \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r, s, t \in \mathbb{R}.$$

Välj någon av de ovanstående för att skapa den första basvektorn, normera och ortogonalisera sedan de andra m.h.a. Gram-Schmidtprocessen, t.ex.

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_{2_{\parallel \mathbf{f}_1}} = (\mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 = \frac{1}{5}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{6}{5}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_{2_{\perp \mathbf{f}_1}} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_{2_{\parallel \mathbf{f}_1}} = \frac{1}{5}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{5}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{70}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_{3_{\parallel[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}} = (\mathbf{u}_3 \bullet \mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 + (\mathbf{u}_3 \bullet \mathbf{f}_2)\,\mathbf{f}_2 =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{70}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{8}{5}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{6}{35}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{35}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -112 \\ 56 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 18 \\ 36 \\ -30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) =$$

$$
=\frac{1}{35}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-130\\20\\30\\0\\0\end{pmatrix}=\frac{10}{35}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-13\\2\\3\\0\\0\end{pmatrix}=\frac{2}{7}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-13\\2\\3\\0\\0\end{pmatrix},
$$

$$
\mathbf{u}_{3\perp[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}=\mathbf{u}_3-\mathbf{u}_{3\parallel[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]}==\frac{1}{7}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-28\\0\\0\\7\\0\end{pmatrix}-\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-26\\4\\6\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{7}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\-4\\-6\\7\\0\end{pmatrix}=
$$

$$
=-\frac{1}{7}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\4\\6\\-7\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{f}_3=\frac{1}{\sqrt{105}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\4\\6\\-7\\0\end{pmatrix}.
$$

Sammantaget har vi att

$$
\mathbf{f}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{f}_2=\frac{1}{\sqrt{70}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\6\\-5\\0\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{f}_3=\frac{1}{\sqrt{105}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\4\\6\\-7\\0\end{pmatrix}
$$

är en ON-bas i egenrummet till egenvärdet 0.

7. Speglingar är isometriska avbildningar och en sammansättning av isometriska avbldningar är isometrisk enligt **Sats 7.7.3**, sid 192 och om A är avbildningsmatris till F och B till G så har $F\circ G$ avbildningsmatris AB enligt **Sats 7.6.2**, sid 186. Vidare, avbildningsmatrisen till en spegling har determinant $=-1$ och enligt produktlagen för determinanter, **Sats 4.8.1**, sid 96 följer det att

$$
\det AB=\det A\cdot\det B=(-1)\cdot(-1)=1.
$$

Följaktligen är $F\circ G$ en isometrisk avbildning vars avbildningsmatris har determinant $=1$, d.v.s. en vridning enligt **Sats 7.7.6**, sid 195. Då F och G speglar i var sitt plan inses att skärningslinjen mellan planen inte ändras av $F\circ G$, d.v.s. vridningsaxeln är parallell med skärningslinjens riktningsvektor vilken i sin tur är parallell med kryssprodukten mellan planens normaler,

$$
\mathbf{n}_F\times\mathbf{n}_G=\underline{\mathbf{e}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{array}{c}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\\2\\-1\end{array}\times\underline{\mathbf{e}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{array}{c}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\\-1\\2\end{array}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-3\\-3\\3\end{pmatrix}=-3\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}.
$$

Härifrån har vi huvudsakligen två alternativ:

I. Beräkna $F\circ G$(vektor $\perp$ vridningsaxeln) och därefter vinkeln mellan in- och utdata vilket då blir vridningsvinkeln och sedan kryssprodukten mellan in- och utdata för att avgöra orienteringen på vridningen, med- eller moturs.

II. Beräkna matriserna för F, G och $F \circ G$ för att sedan byta till "rätt bas" för matrisen till $F \circ G$.

Vi skall här genomföra det senare alternativet. Vi tar fram båda avbildningsmatriserna med avseende på standardbasen (F:s matris $= A_{\underline{\mathbf{e}}}$, G:s matris $= B_{\underline{\mathbf{e}}}$) genom att beräkna vad respektive spegling gör med standardbasvektorererna i $\mathbb{R}^3$. Vi får

$$F(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_{1_{\parallel \mathbf{n}_F}} = \mathbf{e}_1 - 2 \cdot \frac{1}{6}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \mathbf{e}_1 - \frac{1}{3}\cdot 2\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix},$$

$$F(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2 - \frac{1}{3}\cdot(-1)\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix},$$

$$F(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3 - \frac{1}{3}\cdot 1\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix} \iff$$

$$\iff A_{\underline{\mathbf{e}}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\\ 2 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix},$$

$$G(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_{1_{\parallel \mathbf{n}_G}} = \mathbf{e}_1 - 2 \cdot \frac{1}{6}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \mathbf{e}_1 - \frac{1}{3}\cdot(-1)\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix},$$

$$G(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2 - \frac{1}{3}\cdot 2\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\4\\2\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix},$$

$$G(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3 - \frac{1}{3}\cdot 1\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} \iff$$

$$\iff B_{\underline{\mathbf{e}}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -2\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}.$$

Återstår nu att beräkna avbildningsmatrisen till $F \circ G$ som enligt ovan är $A_{\underline{\mathbf{e}}}B_{\underline{\mathbf{e}}}$, bestämma en höger ON-bas där $\mathbf{f}_1$ är vridningsaxeln samt att byta till denna bas och tolka resultatet.

$$C_{\underline{\mathbf{e}}} = A_{\underline{\mathbf{e}}}B_{\underline{\mathbf{e}}} = \frac{1}{3^2}\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\\ 2 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -2\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}0 & 0 & -9\\ 9 & 0 & 0\\ 0 & -9 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\\1\\1\end{array} \times \underline{\mathbf{e}}\begin{array}{c}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\\-1\\1\end{array} = \frac{1}{\sqrt{6}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},$$

$$\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6}\end{pmatrix}, \quad C_{\underline{\mathbf{f}}} = T^{-1}C_{\underline{\mathbf{e}}}T =$$

$$= T^t\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3}\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1/2 & 3/(\sqrt{6}\cdot\sqrt{2})\\ 0 & -3/(\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}) & -3/6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2\\ 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases}\cos\theta = -\dfrac{1}{2},\\ \sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

vilket ger att vridningsvinkeln $\theta = 2\pi/3$ och vridningen sker medurs sett från toppen av $\mathbf{f}_1$ = vridningsaxeln eftersom $\sin\theta < 0$.