LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Ulf Janfalk

Utbildningskod: TATA31
Provkod: KTR1

Kontrollskrivning i Linjär algebra 2023–10–25, 8–12.

Inga hjälpmedel, förutom passare, linjal eller gradskiva. OBS! Inga formler eller liknande tryckta på linjal eller gradskiva. Ej räknedosa.
På uppgift 1–14 skall ***endast svar*** ges. Varje rätt svar ger 1 poäng, fel svar 0 poäng.
Flera svar får och bör ges på samma blad, helst i nummerordning.
Uppgift 15 och 16 ger tre poäng vardera; ***fullständiga och välmotiverade lösningar krävs.***
Minst 11 poäng tillgodoräknas som tre poäng på uppgift 1 på tentamen.
Minst 16 poäng ger ytterligare en bonuspoäng på tentamen.
Rätten att tillgodoräkna sig bonus består under läsåret 2023-2024.
Resultatet meddelas via e-post. Lösningar läggs ut efter skrivtidens slut på

http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html

Om inget annat sägs, är alla koordinater för vektorer i planet och rummet givna relativt en högerorienterad ON-bas.

1. Skriv nedanstående ekvationssystem i matrisform och ange dess lösningar på parameterform
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 1 \\ \qquad\qquad\quad x_3 + x_4 = 2 \\ \qquad x_2 \qquad\qquad\quad = 7 \end{cases}.$$

2. Betrakta matriserna
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 13 \\ -2 & 4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}.$$
Beräkna det/de av uttrycken nedan som är definierade:
$$A^tB, \quad AB^t, \quad AB, \quad A+B.$$

3. Tag ett nytt pappersark och rita på detta ett vanligt rätvinkligt koordinatsystem (höger ON). Låt **två rutor** svara mot **en längdenhet**. Låt $\underline{\mathbf{e}}$ vara en ON-bas där $\mathbf{e}_1$ pekar i den vågräta koordinataxelns riktning och $\mathbf{e}_2$ i den lodräta axelns riktning. Rita i detta koordinatsystem in, så exakt som möjligt, vektorerna
$$\mathbf{u} = 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{v} = -2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,$$
den ortogonala projektionen av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$ och den ortogonala projektionen av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{u}$.

4. Ange ekvationen på normalform till det plan Π genom punkten $(1,2,3)$ som är ortogonalt mot linjen
$$L\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} \sin 1 \\ \cos 1 \\ \tan 1 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} \ln 2 \\ \pi \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

5. Linjen L i har riktningsvektorn $(1, 2)$. Ange ekvationen på *normalform* till den normal till L som går genom punkten $(3, 4)$.

6. Ange en ***enhetsvektor*** som är ortogonal mot både $\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$ och $3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$.

7. Bestäm avståndet mellan punkten $(2, -3, 3)$ och planet Π: $2x - y + 3z = 0$.

8. Vilken punkt på linjen L: $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ ligger närmast punketn $(5, 7)$?

9. Bestäm skärningspunkten (om sådan finnes) mellan linjerna

$$L_1\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{och}$$
$$L_2\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

10. Dela upp $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$ i komponenter så att $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ där $\mathbf{v}_1$ ligger i planet med ekvation $2x - y + 2z = 0$ och $\mathbf{v}_2$ är ortogonal mot samma plan.

11. Betrakta underrummet $\mathbb{U} = [(1, 1, 0), (1, 0, 1)] \subset \mathbb{R}^3$. Ge ett exempel på en vektor $\mathbf{v}$ som ***inte*** tillhör $\mathbb{U}$ samt ett exempel på en vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{U}$ som ***inte*** är en av de vektorer som genererar $\mathbb{U}$.

12. Betrakta underrummet $\mathbb{U}$ av $\mathbb{R}^5$ definierat genom

$$\mathbb{U} = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5\colon \begin{array}{c} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ \text{och} \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 0 \end{array} \right\}$$

och låt

$$\mathbf{v}_1 = (1, 3, 0, 0, -5), \quad \mathbf{v}_2 = (2, 1, 0, -1, 1), \quad \mathbf{v}_3 = (0, 0, 5, 10, 5), \quad \mathbf{v}_4 = (0, 0, 0, 1, 0).$$

Vilken/vilka av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ och $\mathbf{v}_4$ tillhör $\mathbb{U}$?

13. Lös beroendeekvationen för nedanstående vektorer i $\mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{u}_1 = (1, 2, 1), \ \mathbf{u}_2 = (1, 1, 1), \ \mathbf{u}_3 = (-1, 1, -2), \ \mathbf{u}_4 = (2, 3, 4).$$

14. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lös ekvationen $\left(AXB^{-1}\right)^t = C$.

(3 p) 15. Avgör för vilka värden på de reella talen a och b som ekvationssystemet

$$\begin{cases} x \quad - \quad z = b \\ ax + y + z = 3 \\ -x + ay + 3z = -1 \end{cases}$$

har entydig lösning, ingen lösning respektive oändligt många lösningar. Fås oändligt många lösningar för något val av a och b skall lösningsmängden anges.

(3 p) 16. En ljusstråle genom punkten $P = (1, 1, -1)$ speglas i planet $\Pi :\; x - 2y + z = 4$ och går sedan genom punkten $Q = (-6, 3, 4)$. I vilken punkt träffar ljusstrålen planet?

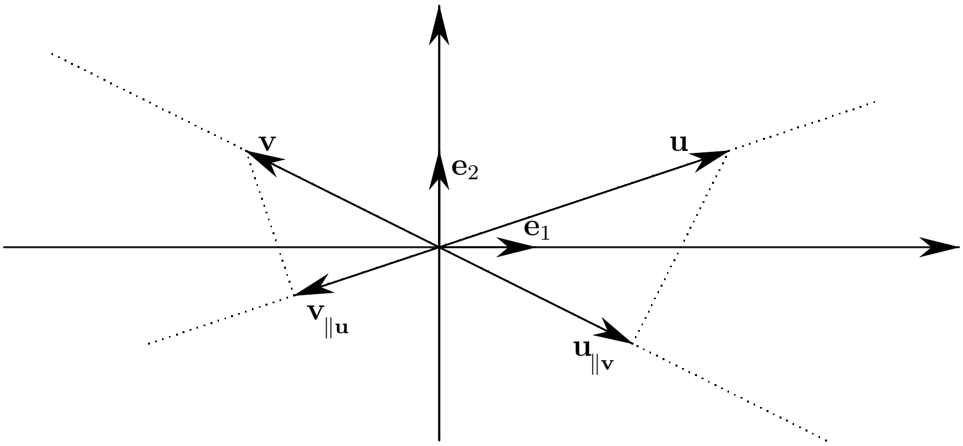
Lösningsförslag till TATA31. Linjär algebra, 2024–10–25

1. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right)$, $\quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$

2. AB är inte definierad,

$$A^tB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}, \quad AB^t = \begin{pmatrix} 27 & 6 & -9 \\ 55 & 10 & -17 \\ 83 & 14 & -25 \end{pmatrix}, \quad A+B = \begin{pmatrix} 2 & 15 \\ 1 & 8 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

3.



4. Π: $(\ln 2)x + \pi y + \sqrt{2}z = \ln 2 + 2\pi + 3\sqrt{2}$

5. $x + 2y = 11$

6. T.ex. $\dfrac{1}{\sqrt{45}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3\sqrt{5}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

7. $\dfrac{8}{7}\sqrt{14}$

8. $(6, 5)$

9. $(3/2, 3/2, 7/2)$

10. $\mathbf{v}_1 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{\|\mathbf{n}} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

11. T.ex. $\mathbf{v} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{u} = (2, 1, 1)$

12. $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{U}, \quad \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4 \notin \mathbb{U}$

13. $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$

14. $X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -28 & -8 \\ -3 & 17 & 3 \end{pmatrix}$

15. Skriv ekvationssystemet på matrisform, beräkna determinanten av koefficientmatrisen A och beräkna för vilka värden på a som determinanten är 0.

$$\det A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ a & 1 & 1 \\ -1 & a & 3 \end{pmatrix} \overset{k_1+k_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ a+1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Utveckling} \\ \text{efter rad 1} \end{bmatrix} =$$

$$= (-1)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix} = -(a^2+a-2) = -(a+2)(a-1) = 0 \iff$$

$$\iff a = -2, 1$$

Determinantkriteriet, Korollarium 4.7.2, sid 93 ger då att vi har

entydig lösning för alla $b \in \mathbb{R}$ om $a \neq 1$ och $a \neq -2$.

Återstår att kontrollera $a = 1$ respektive $a = -2$ separat.

$$\underline{\underline{a=1}}: \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & b \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right) \underset{\sim}{\overset{r_2-r_1}{r_3+r_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & 2 & 3-b \\ 0 & 1 & 2 & b-1 \end{array}\right) \overset{r_3-r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & 2 & 3-b \\ 0 & 0 & 0 & 2b-4 \end{array}\right),$$

d.v.s. vi har ingen lösning om $2b-4 \neq 0 \iff b \neq 2$. Om $b = 2$ fås

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-z=2-t \\ 1-2z=1-2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\underline{\underline{a=-2}}: \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & b \\ -2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & -1 \end{array}\right) \underset{\sim}{\overset{r_2+2r_1}{r_3+r_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & -1 & 3+2b \\ 0 & -2 & 2 & b-1 \end{array}\right) \overset{r_3+2r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & -1 & 3+2b \\ 0 & 0 & 0 & 5+5b \end{array}\right),$$

d.v.s. ingen lösning om $b \neq -1$ och oändligt många om $b = -1$. Om $b = -1$ fås

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} -1+t \\ 1+t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

Vi sammanfattar

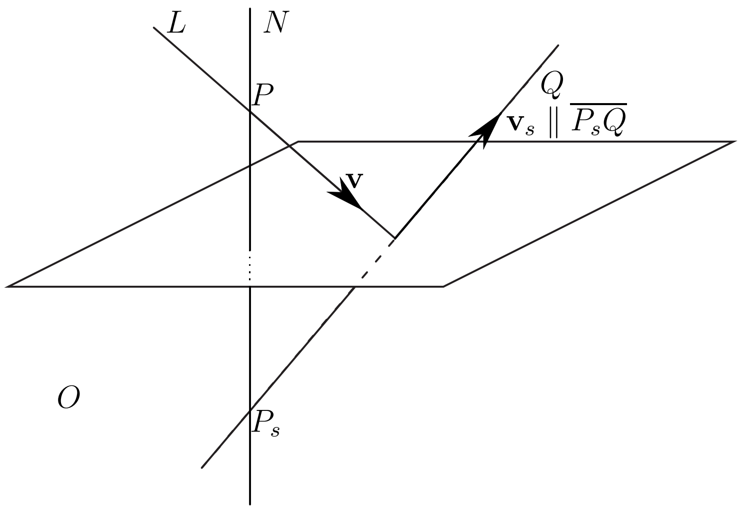
- Entydig lösning för alla högerled, d.v.s. för alla $b \in \mathbb{R}$ om $a \neq 1$ och $a \neq -2$.
- Ingen lösning om $a = 1, b \neq 2$ eller $a = -2,\ b \neq -1$.
- Oändligt många lösningar om $a = 1$ och $b = 2$ med lösningsmängd

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

eller $a = -2$, $b = -1$ med lösningsmängd

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

16. Se figur nedan



Låt L vara den linje som den infallande ljusstrålen genom P följer. Beräkna P:s spegelpunkt P_s. Den reflekterade strålen kommer då att ha samma riktning som vektorn P_sQ. Drag den normal N till Π som går genom P och sätt in dess parameterform i ekvationen för Π.

$$N\colon\ \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \qquad \Pi :\ x - 2y + z = 4$$

$$1 + t - 2(1 - 2t) + (-1 + t) = 6t - 2 = 4 \iff t = 1.$$

Då vi är i P för $t = 0$, i planet Π för $t = 1$ så är vi i P_s för $t = 2$. Insättning i parameterformen för N ger

$$\Longrightarrow \overline{OP}_s = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d.v.s. $P_s = (3, -3, 1)$. Beräkna $\overline{P_sQ}$, skriv upp ekvationen på parameterform för linjen L_s som den reflekterade ljusstrålen följer och sätt in denna i ekvationen för Π för att beräkna skärningspunkten R:

$$\overline{P_sQ} = \overline{OQ} - \overline{OP}_s = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$L_s\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (3-3t) - 2(-3+2t) + (1+t) = -6t + 10 = 4 \iff t = 1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \overline{OR} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

d.v.s. skärningspunkten $R = (0, -1, 2)$.