Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ulf Janfalk

Utbildningskod: TATA31
Modul: TEN1

Tentamen i Linjär algebra (TATA31/TEN1) 2024–01–08, 14–19.

Inga hjälpmedel, förutom passare, linjal eller gradskiva. OBS! Inga formler eller liknande tryckta på linjal eller gradskiva. Ej räknedosa.
För godkänt räcker 9 poäng och minst 3 uppgifter med 2 eller 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning ($\geq$ 11p) ht2023 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas) och 16p eller mer ger 4 poäng på uppgift 1. Markera detta genom att skriva ”G” respektive ”G+1” i rutan för uppgift 1 på raden märkt “X här/*here*”.
Fullständiga motiveringar krävs. Lösningar läggs ut tisdag 9/1 på

http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html

Resultat meddelas via e-post inom 15 arbetsdagar.
Alla koordinater för vektorer och punkter är, om ej annat anges, givna med avseende på ett positivt orienterat ON-system, $\mathbb{R}^n$ är ett euklidiskt rum med standardskalärprodukten och standardbasen ett positivt orienterat ON-system.

(1 p) 1. (a) Bestäm en ekvation på ***normalform*** för planet Π som går genom punkterna $(1,0,1), (1,3,-1)$ och $(-1,1,1)$.

(1 p) (b) Ge ett exempel på en linje som går genom punkten $(3,2,1)$ och som ***inte*** skär Π.

(1 p) (c) Bestäm spegelbilden av din linje från (b) i planet Π från (a).

(3 p) 2. Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ har avbildningsmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & a \\ -1 & -2 & a & -2 \\ -2 & a & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

i standardbasen. För vilka värden på $a \in \mathbb{R}$ har nollrummet positiv dimension ($\dim N(F) \geq 1$)? För det till beloppet minsta av de a-värden du får fram, bestäm baser i $N(F)$ och $V(F)$ samt avgör om $\mathbf{v} = (-1,2,0,2)$ tillhör $V(F)$ eller inte.

(3 p) 3. Beräkna A^n, n =heltal där

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Svaret skall ges på formen $A^n = a_1^n A_1 + a_2^n A_2 + a_3^n A_3$ där a_1, a_2, a_3 är reella tal och A_1, A_2, A_3 är konstanta 3×3-matriser. (OBS! Inget extra krav, detta är en ledning!)

(3 p) 4. Låt $\mathbf{v} = (2,0,1,2,-2) \in \mathbb{R}^5$ och

$$\mathbb{U} = \left\{ (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5\colon \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Bestäm avståndet mellan $\mathbb{U}$ och $\mathbf{v}$ samt för vilket $\mathbf{u} \in \mathbb{U}$ som detta minsta avstånd antas.

(3 p) 5. Låt $\underline{\mathbf{e}}_5$ beteckna standardbasen i $\mathbb{R}^5$ och $\underline{\mathbf{e}}_3$ standardbasen i $\mathbb{R}^3$. För den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ gäller att

$$F\left(\underline{\mathbf{e}}_5\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\underline{\mathbf{e}}_3\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix},\ F\left(\underline{\mathbf{e}}_5\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\underline{\mathbf{e}}_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ F\left(\underline{\mathbf{e}}_5\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\underline{\mathbf{e}}_3\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},$$

$$F\left(\underline{\mathbf{e}}_5\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right)=\underline{\mathbf{e}}_3\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix},\ F\left(\underline{\mathbf{e}}_5\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right)=\underline{\mathbf{e}}_3\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}$$

Bestäm F:s matris i standardbaserna för $\mathbb{R}^5$ och $\mathbb{R}^3$.
Bevisa att ditt svar är korrekt genom att med hjälp av din nyss framtagna avbildningsmatris beräkna funktionsvärdena ovan och se att de överensstämmer med de givna.

6. Låt $\mathbf{u} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ och $Q(\mathbf{u}) = 5x_1^2 + 6x_1x_2 - 3x_2^2$.

(2 p) (a) Bestäm det största respektive minsta värde Q kan anta då $|\mathbf{u}| = 5$ samt för vilka $\mathbf{u}$ dessa värden antas.

(1 p) (b) Vilken sorts kurva definieras av $Q(\mathbf{u}) = 1$? Ange de punkter på kurvan som ligger närmast origo och vilket det kortaste avståndet är.

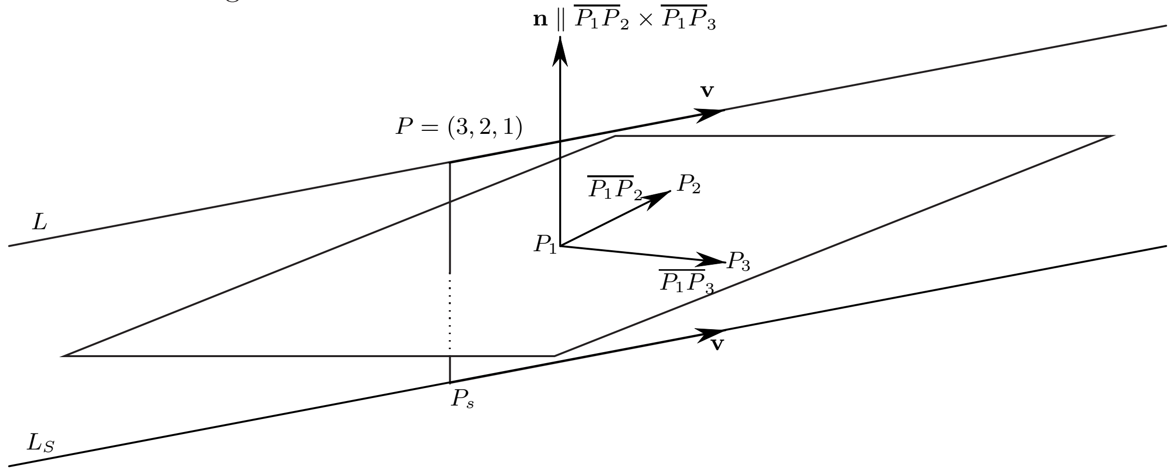
(3 p) 7. De linjära avbildningarna $F_1, F_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är speglingar (behöver ej visas) och har i standardbasen matriserna

$$A_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ -2 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Ge en fullständig beskrivning av vad $F_1 \circ F_2$ gör med vektorerna i $\mathbb{R}^3$.

Lösningsförslag till TATA31, Linjär algebra, 2024–01–08.

1. Nedanstående figur förklarar vad som behöver beräknas.



(a) Sätt $P_1 = (1, 0, 1), P_2 = (1, 3, -1)$, $P_3 = (-1, 1, 1)$ och beräkna

$$\overline{P_1P_2} = \overline{OP}_2 - \overline{OP}_1 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix},$$

$$\overline{P_1P_3} = \overline{OP}_3 - \overline{OP}_1 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\overline{P_1P_2} \times \overline{P_1P_3} = \underline{\mathbf{e}}\begin{array}{c}\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}\\0\\3\end{array} \times \underline{\mathbf{e}}\begin{array}{c}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\\-2\\1\end{array} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix} = 2\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

Med $\mathbf{n} = (1, 2, 3)$ fås att det sökta planets ekvation på normalform är

$$\Pi\colon\ x + 2y + 3z = D,$$
$$P_1 \in \Pi\colon\ 1 + 2\cdot 0 + 3\cdot 1 = 4 = D$$

så det sökta planets ekvation är $x + 2y + 3z = 4$.

(b) Om en linje *inte* skär Π måste dess riktningsvektor $\mathbf{v}$ vara ortogonal mot planets normal $\mathbf{n}$. Tag en sådan, vilken som helst, t.ex. $\mathbf{v} = (2, -1, 0)$. Då vi söker en linje genom punkten $P = (3, 2, 1)$ blir

$$L\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

parameterformen för en linje med den sökta egenskapen.

(c) Då L inte skär planet kommer dess spegelbild L_s att ha samma riktningsvektor. Det räcker därmed att hitta en punkt som ligger på L_s, t.ex. spegelbilden av den givna punkten $P = (3, 2, 1)$. Beräkna därför

$$\overline{P_1P} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix},$$

$$\overline{P_1P}_{\|\mathbf{n}} = \frac{\overline{P_1P}\bullet\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n} = \frac{1}{14}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}\bullet\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \frac{3}{7}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},$$

$$\overline{OP}_s = \overline{OP} - 2\overline{P_1P}_{\|\mathbf{n}} = \frac{1}{7}\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}21\\14\\7\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}6\\12\\18\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{7}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}15\\2\\-11\end{pmatrix},$$

d.v.s. $P_s = (15/7, 2/7, -11/7)$. Spegelbilden av den valda linjen blir därför

$$L_s\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{1}{7}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}15\\2\\-11\end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

2. Att $\dim N(F) \geq 1$ innebär att ekvationen $AX = \mathit{0}$ skall ha lösningar $X \neq \mathit{0}$ vilket enligt Korollarium 4.7.2, sid 93 kräver att $\det A = 0$. Beräkna därför

$$\det A = \begin{vmatrix}1&2&-1&2\\-2&1&2&a\\-1&-2&a&-2\\-2&a&2&1\end{vmatrix} \overset{\substack{r_3+r_1\\r_4-r_1}}{=} \begin{vmatrix}1&2&-1&2\\-2&1&2&a\\0&0&a-1&0\\0&a-1&0&1-a\end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{3+3}(a-1)^2\begin{vmatrix}1&2&2\\-2&1&a\\0&1&-1\end{vmatrix} \overset{k_3+k_2}{=} (a-1)^2\begin{vmatrix}1&2&4\\-2&1&a+1\\0&1&0\end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{3+2}(a-1)^2\begin{vmatrix}1&4\\-2&a+1\end{vmatrix} = -(a-1)^2(a+9) = 0 \iff a = -9, 1(\text{dubbel}).$$

Det till beloppet minsta av dessa a-värden är $a = 1$. För $a = 1$, ställ upp nollrumsekvationen $AX = \mathit{0}$ tillika beroendeekvationen för $V(F)$ samt **INTE** "L.K = godtycklig vektor" utan vi nöjer oss med L.K $= (-1, 2, 0, 2)$ eftersom detta är den enda vektor vi skall kontrollera. Det går naturligtvis bra att göra som "vanligt", det blir bara lite jobbigare. Då fås

$$\underline{\underline{a=1}}\colon \left(\begin{array}{cccc|cc}1&2&-1&2&0&-1\\-2&1&2&1&0&2\\-1&-2&1&-2&0&0\\-2&1&2&1&0&2\end{array}\right) \overset{\substack{r_3+r_1\\r_4-r_2\\r_2+2r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cc}1&2&-1&2&0&-1\\0&5&0&5&0&0\\0&0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right) \overset{\substack{r_2/r_5\\r_1+2r_2}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cc}1&0&-1&0&0&-1\\0&1&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

Vi börjar med $N(F)$. Då fås

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s\\-t\\s\\t\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

vilket ger att $(1,0,1,0),(0,-1,0,1)$ är en bas i $N(F)$.
Låt $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4$ vara kolonnvektorerna i A. Då är $V(F)=[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4]$ och lösningen till beroendeekvationen för dessa är den ekvation vi precis löst. Därav följer det att $\mathbf{v}_3=-\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_4=\mathbf{v}_2$ (vilket ju också syns tydligt i ursprungsmatrisen). När vi till sist tittar på L.K $=(-1,2,0,2)$ ser vi att den tredje ekvationen är $0=-1$ vilket då ger att $(-1,2,0,2)\notin V(F)$.

3. Om vi ser $A=A_{\underline{\mathbf{e}}}$ som avbildningsmatris till en linjär avbildning $F\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ kan vi undersöka om det finns en bas av egenvektorer och i så fall byta till den. I denna nya bas blir i så fall $A_{\underline{\mathbf{f}}}$ en diagonalmatris och då är det enkelt att beräkna matrispotensen. Börja därför ed att räkna ut egenvärden och egenvektorer.

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-2-\lambda & -1 & 5\\ 3 & 2-\lambda & -3\\ -1 & -1 & 4-\lambda\end{vmatrix}\overset{r_3-r_1}{=}\begin{vmatrix}-2-\lambda & -1 & 5\\ 3 & 2-\lambda & -3\\ \lambda+1 & 0 & -\lambda-1\end{vmatrix}\overset{k_1+k_3}{=}$$
$$=\begin{vmatrix}3-\lambda & -1 & 5\\ 0 & 2-\lambda & -3\\ 0 & 0 & -\lambda-1\end{vmatrix}=0\iff\lambda=-1,2,3.$$

Då vi fick tre *olika* egenvärden är F diagonaliserbar enligt Korollarium 8.2.7, sid 212. Bestäm egenvektorerna.

$$\underline{\underline{\lambda=-1}}:\ \left(\begin{array}{rrr|r}-1&-1&5&0\\3&3&-3&0\\-1&-1&5&0\end{array}\right)\overset{\substack{r_2+3r_1\\ r_3-r_1\\ -r_1}}{\sim}\left(\begin{array}{rrr|r}1&1&-5&0\\0&0&12&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\Longrightarrow X_{-1}=t\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R},$$

$$\underline{\underline{\lambda=2}}:\ \left(\begin{array}{rrr|r}-4&-1&5&0\\3&0&-3&0\\-1&-1&2&0\end{array}\right)\overset{\substack{r_1-4r_3\\ r_2+3r_1\\ -r_3\leftrightarrow r_1}}{\sim}\left(\begin{array}{rrr|r}1&1&-2&0\\0&-3&3&0\\0&3&-3&0\end{array}\right)\overset{\substack{r_3+r_2\\ -r_2/3}}{\sim}\left(\begin{array}{rrr|r}1&1&-2&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X_2=t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{\lambda=3}}:\ \left(\begin{array}{rrr|r}-5&-1&5&0\\3&-1&-3&0\\-1&-1&1&0\end{array}\right)\overset{\substack{r_1-5r_3\\ r_2+3r_1\\ -r_3\leftrightarrow r_1}}{\sim}\left(\begin{array}{rrr|r}1&1&-1&0\\0&-4&0&0\\0&4&0&0\end{array}\right)\overset{\substack{r_3+r_2\\ -r_2/4}}{\sim}\left(\begin{array}{rrr|r}1&1&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X_3=t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R},$$

$$\mathbf{f}_1=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\mathbf{f}_2=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\mathbf{f}_3=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\Longrightarrow\underline{\mathbf{f}}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\underline{\mathbf{e}}T\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow A_{\underline{\mathbf{f}}}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\Longrightarrow A_{\underline{\mathbf{f}}}^n=\begin{pmatrix}(-1)^n&0&0\\0&2^n&0\\0&0&3^n\end{pmatrix}$$

Eftersom $A_{\underline{\mathbf{e}}}^n = TA_{\underline{\mathbf{f}}}^n T^{-1}$ behöver vi först beräkna T^{-1}.

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2+r_1 \\ -r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{r_1+r_3 \\ r_2-r_3}}{\sim}
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{r_3-r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.
$$

Vid insättning i basbytesformeln, $TA_{\underline{\mathbf{f}}}^n T^{-1}$, splittra upp $A_{\underline{\mathbf{f}}}$ enligt nedan för att förenkla beräkningen.

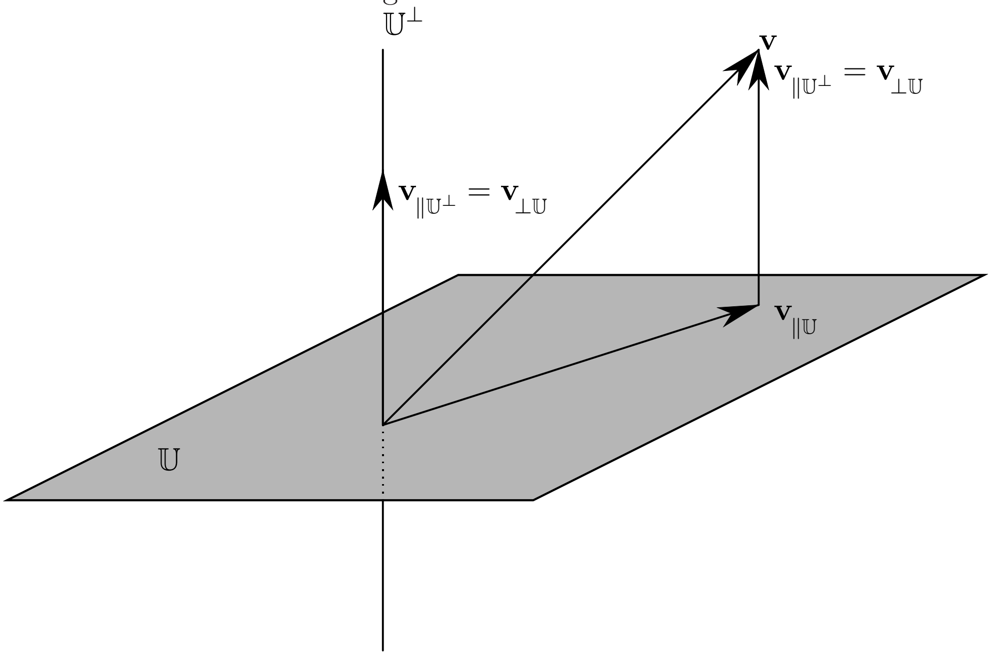
$$
A_{\underline{\mathbf{e}}}^n = T\left((-1)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \left((-1)^n \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right) =
$$

$$
= (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} + 3^n \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}
$$

vilket har den form som efterfrågades i uppgiften.

4. Tänk som i nedanstående figur för att inse vad som behöver beräknas.



Uppgiften kan lösas på flera olika sätt,

I. Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}$ och beräkna med hjälp av denna $\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}$. Enligt Sats 6.3.15, sid 150 är detta den sökta vektorn $\mathbf{u} \in \mathbb{U}$ som minimerar avståndet mellan $\mathbf{v}$ och $\mathbb{U}$. Enligt samma sats är det sökta avståndet $\left|\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}\right|$.

II. Bestäm en ON-bas i $\mathbb{U}^\perp$ och beräkna med hjälp av denna $\mathbf{v}_{\parallel\mathbb{U}^\perp} = \mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}}$. Enligt Sats 6.3.15, sid 150 är detta den vektor vars längd är det sökta minsta avståndet. Enligt samma sats fås den vektor som ger det sökta minsta avståndet som $\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}} = \mathbf{v}_{\parallel\mathbb{U}}$.

III. Ta fram en bas i $\mathbb{U}$ och beräkna projektionen från I. genom att använda minstakvadrat-metoden.

IV. Ta fram en bas i $\mathbb{U}^\perp$ och beräkna projektionen från II. genom att använda minstakvadrat-metoden.

Här redovisas metod IV. Då ekvationerna som definierar $\mathbb{U}$ kan tolkas som skalärprodukten mellan en godtycklig vektor $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ och $(1, 1, 1, 1, 1)$ respektive $(1, 2, 3, 4, 5)$ och att dessa skalärprodukter skall vara $= 0$ kan vi se $\mathbb{U}$ som rummet av alla vektorer ortogonala mot $(1, 1, 1, 1, 1)$ och $(1, 2, 3, 4, 5)$, d.v.s. $\mathbb{U}^\perp = [(1, 1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4, 5)]$. Bilda (den troligtvis olösbara) ekvationen

$$\lambda_1 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}}_{X} = \underline{\mathbf{e}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}}_{Y}.$$

Studera nu motsvarande *normalekvationer* $A^tAX = A^tY$. Vi får

$$A^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 11 \end{pmatrix},$$

$$A^tY = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A^tAX = 5 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 11 \end{pmatrix} X = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff$$

$$X = \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{10} \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{10} \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Enligt Sats 6.4, sid 158 fås nu $\mathbf{v}_{\parallel\mathbb{U}^\perp}$ som

$$\mathbf{v}_{\parallel\mathbb{U}^\perp} = \frac{3}{5} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{3}{5} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\implies \text{sökt avstånd} = \left| \frac{3}{5}\,\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \frac{3}{5}\sqrt{15}.$$

Det $\mathbf{u} \in \mathbb{U}$ som har detta avstånd till $\mathbf{v}$ är

$$\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}^\perp} = \frac{1}{5}\left(\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 5 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{5}\,\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \\ 10 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

5. Enligt Sats 7.3.1, sid 174 skall vi för att få matrisen beräkna vad F gör med standardbasen i $\mathbb{R}^5$ och uttrycka resultatet i standardbasen i $\mathbb{R}^3$. För att undvika beteckningsförvirring skriver vi standardbasvektorerna i $\mathbb{R}^5$ som $\mathbf{e}_1^5, \mathbf{e}_2^5, \mathbf{e}_3^5, \mathbf{e}_4^5, \mathbf{e}_5^5$ och standardbasen i $\mathbb{R}^3$ som $\mathbf{e}_1^3, \mathbf{e}_2^3, \mathbf{e}_3^3$. Med dessa beteckningar kan vi skriva de i uppgiften givna värdena som

$$F(1,1,0,0,0) = F(\mathbf{e}_1^5 + \mathbf{e}_2^5) = \underline{\underline{F(\mathbf{e}_1^5) + F(\mathbf{e}_2^5) = \mathbf{e}_1^3 + 3\mathbf{e}_3^3}} = \underline{\mathbf{e}}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$F(0,1,1,0,0) = F(\mathbf{e}_2^5 + \mathbf{e}_3^5) = \underline{\underline{F(\mathbf{e}_2^5) + F(\mathbf{e}_3^5) = \mathbf{e}_1^3 + \mathbf{e}_2^3 + \mathbf{e}_3^3}} = \underline{\mathbf{e}}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$F(0,0,1,1,0) = F(\mathbf{e}_3^5 + \mathbf{e}_4^5) = \underline{\underline{F(\mathbf{e}_3^5) + F(\mathbf{e}_4^5) = \mathbf{e}_1^3 + \mathbf{e}_3^3 + 2\mathbf{e}_3^3}} = \underline{\mathbf{e}}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$F(0,0,0,1,1) = F(\mathbf{e}_4^5 + \mathbf{e}_5^5) = \underline{\underline{F(\mathbf{e}_4^5) + F(\mathbf{e}_5^5) = \mathbf{e}_1^3 + \mathbf{e}_2^3 + 3\mathbf{e}_3^3}} = \underline{\mathbf{e}}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} F(1,1,1,1,1) &= F(\mathbf{e}_1^5 + \mathbf{e}_2^5 + \mathbf{e}_3^5 + \mathbf{e}_4^5 + \mathbf{e}_5^5) = \\ &= \underline{\underline{F(\mathbf{e}_1^5) + F(\mathbf{e}_2^5) + F(\mathbf{e}_3^5) + F(\mathbf{e}_4^5) + F(\mathbf{e}_5^5) = 3\mathbf{e}_1^3 + 3\mathbf{e}_2^3 + 6\mathbf{e}_3^3}} = \underline{\mathbf{e}}_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5}$$

Ur detta skall vi nu lösa ut $F(\mathbf{e}_1^5), \dots, F(\mathbf{e}_5^5)$. Detta kan förstås göras på en mängd olika sätt. Vi kan exempelvis observera att

$$\begin{aligned} (5) - (2) - (4) &= F(1,1,1,1,1) - F(0,1,1,0,0) - F(0,0,0,1,1) = F(1,0,0,0,0) = \\ &= \underline{\underline{F(\mathbf{e}_1^5)}} = \underline{\mathbf{e}}_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{6}$$

$$(5) - (1) - (4) = F(1,1,1,1,1) - F(1,1,0,0,0) - F(0,0,0,1,1) = F(0,0,1,0,0) =$$

$$= \underline{\underline{F(\mathbf{e}_3^5)}} = \underline{\mathbf{e}}_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$(5) - (1) - (3) = F(1,1,1,1,1) - F(1,1,0,0,0) - F(0,0,1,1,0) = F(0,0,0,0,1) =$$

$$= \underline{\underline{F(\mathbf{e}_5^5)}} = \underline{\mathbf{e}}_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$(1) - (6) = F(\mathbf{e}_1^5) + F(\mathbf{e}_2^5) - F(\mathbf{e}_1^5) = \underline{\underline{F(\mathbf{e}_2^5)}} = \underline{\mathbf{e}}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$(3) - (7) = F(\mathbf{e}_3^5) + F(\mathbf{e}_4^5) - F(\mathbf{e}_3^5) = \underline{\underline{F(\mathbf{e}_4^5)}} = \underline{\mathbf{e}}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Då avbildningsmatrisens kolonner består av koordinaterna för $F(\mathbf{e}_1^5), \ldots, F(\mathbf{e}_5^5)$ uttryckt i standardbasen i $\mathbb{R}^3$ får vi avbildningsmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Återstår att detta är korrekt matris.

$$F(1,1,0,0,0) = \underline{\mathbf{e}}_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$F(0,1,1,0,0) = \underline{\mathbf{e}}_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$F(0,0,1,1,0) = \underline{\mathbf{e}}_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$F(0,0,0,1,1) = \underline{\mathbf{e}}_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$F(1,1,1,1,1) = \underline{\mathbf{e}}_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

viket överensstämmer med förutsättningarna.

6. Skriv Q på matrisform och beräkna egenvärden och egenvektorer.

$$Q(\mathbf{u}) = 5x_1^2 + 6x_1x_2 - 3x_2^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = X_{\underline{\mathbf{e}}}{}^t A_{\underline{\mathbf{e}}} X_{\underline{\mathbf{e}}},$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 3 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(-3-\lambda) - 9 = \lambda^2 - 2\lambda - 24 =$$

$$= (\lambda - 1)^2 - 25 = 0 \iff \lambda = 1 \pm 5 = -4, 6,$$

$$\underline{\underline{\lambda = -4}}: \left(\begin{array}{cc|c} 9 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_{-4} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\underline{\underline{\lambda = 6}}: \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X_6 = t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{f}} = \frac{1}{\sqrt{10}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Enligt Sats 9.1.11, sid 227 gäller då $|\mathbf{u}| = 5$ att

$$\lambda_{min}\,|\mathbf{u}|^2 = -4{\cdot}5^2 = -100 \le Q(\mathbf{u}) \le \lambda_{max}\,|\mathbf{u}|^2 = 6{\cdot}5^2 = 150$$

med likhet i respektive olikhet då $\mathbf{u}$ är en egenvektor av längd 5 till respektive egenvärde. Följaktligen antas minvärdet -100 då

$$\mathbf{u} = \pm 5\mathbf{f}_1 = \pm\frac{5}{\sqrt{10}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

eftersom $\mathbf{f}_1$ är en enhetsegenvektor till $\lambda_{min} = -4$. På samma sätt fås att maxvärdet 150 antas då

$$\mathbf{u} = \pm 5\mathbf{f}_2 = \pm\frac{5}{\sqrt{10}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eftersom $\mathbf{f}_2$ är en enhetsegenvektor till $\lambda_{max} = 6$.

(b) Eftersom egenvärdena har olika tecken definierar $Q(\mathbf{u}) = 1$ en *hyperbel.*
Sats 9.1.11, sid 227 igen ger nu

$$-4\,|\mathbf{u}|^2 \le 0 < 1 = Q(\mathbf{u}) \le 6\,|\mathbf{u}|^2 \iff |\mathbf{u}| \ge \frac{1}{\sqrt{6}}$$

med likhet omm $\mathbf{u}$ är en egenvektor till $\lambda_{max} = 6$ av längd $1/\sqrt{6}$. Alltså, av alla $\mathbf{u}$ sådana att $Q(\mathbf{u}) = 1$ är

$$\mathbf{u} = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{f}_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{60}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ortsvektor för den punkt på kurvan som är närmast origo, avstånd $1/\sqrt{6}$.

7. Eftersom speglingar är isometriska så kommer $F_1{\circ}F_2$ att vara isometrisk enligt Sats 7.7.3, sid 192 och A_1A_2 är dess avbildningsmatris enligt Sats 7.6.2, sid 186. Då

F_1 och F_2 är speglingar är, enligt Sats 7.7.6, sid 195, $\det A_1 = \det A_2 = -1$. Vidare, enligt produktlagen för determinanter, Sats 4.8.1, sid 96 gäller

$$\det(A_1A_2) = \det A_1 \cdot \det A_2 = (-1)\cdot(-1) = 1$$

och Sats 7.7.6, sid 195 ger att $F_1 \circ F_2$ är en vridning. Hade vi vetat vilka plan F_1 respektive F_2 speglar i hade vi enkelt kunnat bestämma vridningsaxeln som riktningsvektorn för skärniningslinjen mellan planen eftersom det är den enda riktning som inte ändras av speglingarna. Nu vet vi inte vilka planen är och därför blir det enklast att räkna ut A_1A_2 och sen beräkna vridningsaxeln som lösningen till $A_1A_2X = X$. Vi får

$$A_1A_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{B} = \frac{1}{3}B,$$

$$A_1A_2X = \frac{1}{3}BX = X \iff BX = 3X \iff BX - 3X = (B-3I)X = 0 \iff$$

$$\iff \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2+r_1 \\ r_3-2r_1 \\ -r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_3+r_2 \\ r_1+2r_2/3 \\ -r_2/3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vridningsaxeln ges alltså av $\mathbf{v} = (1,1,1)$. I princip finns det härifrån två alternativ, antingen sätter vi $\mathbf{f}_1 = \widehat{\mathbf{v}}$, fyller ut till en höger ON-bas och byter till denna varvid vi ur $A_{\underline{\mathbf{f}}}$ kan läsa av vridningsvinkel och om vridningen är med- eller moturs eller så kan vi beräkna $F(\mathbf{u})$ för en vektor $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ och sedan beräkna vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $F(\mathbf{u})$ vilket då blir vridningsvinkeln. Vi redovisar detta senare alternativ här. Välj, t.ex. $\mathbf{u} = (1,1,0)$ Då fås

$$F(1,1,0) = \frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u} \bullet F(\mathbf{u}) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 = |\mathbf{u}| \cdot |F(\mathbf{u})| \cos\theta = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cos\theta = 2\cos\theta \iff$$

$$\iff \cos\theta = \frac{1}{2} \iff \theta = \frac{\pi}{3}$$

eftersom vinkeln mellan två vektorer alltid ligger mellan 0 och π. Återstår att bestämma om vridningen är med- eller moturs. Beräkna kryssprodukten

$$\mathbf{u} \times F(\mathbf{u}) = \underline{\mathbf{e}}\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 1 \\ 1 \end{array} \times \underline{\mathbf{e}}\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ 0 \\ 1 \end{array} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eftersom denna har samma riktning som vridningsaxeln följer det ur kryssprodukts-definitionen att $\mathbf{u}, F(\mathbf{u}), \mathbf{v}$ är ett högersystem, dvs den minsta vridning som överför $\mathbf{u}$ i $F(\mathbf{u})$ syns moturs från spetsen av vridningsaxeln $\mathbf{v}$, alltså vridning $\pi/3$ moturs.