Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ulf Janfalk

Utbildningskod: TATA31
Modul: TEN1

Tentamen i Linjär algebra (TATA31/TEN1) 2024–03–12, 8–13.

Inga hjälpmedel, förutom passare, linjal eller gradskiva. OBS! Inga formler eller liknande tryckta på linjal eller gradskiva. Ej räknedosa.
För godkänt räcker 9 poäng och minst 3 uppgifter med 2 eller 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning ($\geq$ 11p) ht2023 ger 3 poäng på uppgift 1 (som alltså inte behöver lösas) och 16p eller mer ger 4 poäng på uppgift 1. Markera detta genom att skriva ”G” respektive ”G+1” i rutan för uppgift 1 på raden märkt “X här/*here*”.
Fullständiga motiveringar krävs. Lösningar läggs ut tisdag 9/1 på

http://courses.mai.liu.se/GU/TATA31/tentor.html

Resultat meddelas via e-post inom 15 arbetsdagar.
Alla koordinater för vektorer och punkter är, om ej annat anges, givna med avseende på ett positivt orienterat ON-system, $\mathbb{R}^n$ är ett euklidiskt rum med standardskalärprodukten och standardbasen ett positivt orienterat ON-system.

1. För vilka värden på $a, b \in \mathbb{R}$ skär de tre planen

$$x - y + az = -b, \quad x + ay + 3z = b, \quad 2x - y + 3z = 1$$

varann längs en linje? Ligger någon av punkterna $(4, 1, -2)$ och $(4, 2, -2)$ på denna skärningslinje?

(3 p) 2. Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har avbildningsmatrisen

$$A_{\underline{e}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & c \\ a & 1 & 1 \\ 1 & b & 0 \end{pmatrix}$$

i standardbasen $\underline{e}$. Bestäm, om möjligt, $a, b, c \in \mathbb{R}$ så att $(-2, 1, 1)$ och $(0, 1, 1)$ blir egenvektorer till F (med olika egenvärden). Bestäm samtliga egenvärden och återstående egenvektorer.

(3 p) 3. Underrummen $\mathbb{U}, \mathbb{V} \subset \mathbb{R}^5$ definieras som

$$\mathbb{U} = [(1, 2, 1, 0, 1), (-1, 1, 0, 2, 1), (0, 1, 2, 1, 1)],$$
$$\mathbb{V} = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5\colon \begin{array}{rl} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{array} . \right\}$$

Bestäm en bas i $\mathbb{U} \cap \mathbb{V}$ samt dess dimension. ($\mathbb{U} \cap \mathbb{V}$ = de vektorer i $\mathbb{R}^5$ som tillhör *både* $\mathbb{U}$ och $\mathbb{V}$).

VÄND!

(3 p) 4. De linjära avbildningarna $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ och $G\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ har i standardbaserna för de aktuella rummen avbildningsmatriserna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{respektive} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bestäm avbildningsmatrisen till den sammansatta avbildningen $F \circ G$ samt bestäm bas och dimension för $N(F \circ G)$ och $V(F \circ G)$.

(3 p) 5. Låt $\mathbf{v} = (-1, 2, -5, 10) \in \mathbb{R}^4$ och

$$\mathbb{U} = [(2, 1, -1, 3), (1, -3, 1, -1)] \subset \mathbb{R}^4.$$

Använd *minstakvadrat-metoden* till att beräkna $\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}$. Ange därefter avståndet mellan $\mathbf{v}$ och $\mathbb{U}$ respektive mellan $\mathbf{v}$ och $\mathbb{U}^\perp$.

(3 p) 6. Ekvationen

$$4x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$$

definierar en ellipsoid (behöver ej visas). Ange ellipsoidens medelpunkt och halvaxellängder (längsta och kortaste räcker).

(3 p) 7. Låt $p(x) \in \mathbb{P}_2$. Visa att det finns konstanter $A, B, C \in \mathbb{R}$ så att

$$\frac{p(x)}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2},$$

d.v.s. att *partialbråksuppdelning* alltid fungerar.

Lösningsförslag till TATA31, Linjär algebra, 2024–03–12.

1. Planen skär varann längs en linje om ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - \;\; y + az = -b \\ x + ay + 3z = b \\ 2x - \;\; y + 3z = 1 \end{cases} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & -b \\ 1 & a & 3 & b \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

har oändligt många lösningar för några värden på $a, b \in \mathbb{R}$. Ser vi ekvationssystemet på matrisform så är det nödvändigt att determinanten av koefficientmatrisen är 0. Lös därför ekvationen

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & a & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-2r_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & a+1 & 3-a \\ 0 & 1 & 3-2a \end{vmatrix} = (a+1)(3-2a) - (3-a) =$$

$$= -2a^2 + a + 3 - 3 + a = -2a^2 + 2a = -2a(a-1) = 0 \iff a = 0, 1.$$

Ur determinantkriteriet, **Sats 4.7.2**, sid 93 följer då att systemet kan ha oändligt många lsöningar endast om $a = 0$ eller 1.

$\underline{\underline{a=0}}:\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -b \\ 1 & 0 & 3 & b \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-2r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -b \\ 0 & 1 & 3 & 2b \\ 0 & 1 & 3 & 1+2b \end{array}\right) \overset{r_3-r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -b \\ 0 & 1 & 3 & 2b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$

d.v.s. lösning saknas för alla $b \in \mathbb{R}$,

$\underline{\underline{a=1}}:\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -b \\ 1 & 1 & 3 & b \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-2r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -b \\ 0 & 2 & 2 & 2b \\ 0 & 1 & 1 & 1+2b \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-2r_3 \\ r_3 \leftrightarrow r_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -b \\ 0 & 1 & 1 & 1+2b \\ 0 & 0 & 0 & -2-2b \end{array}\right),$

d.v.s. lösning saknas för alla $b \neq -1$. För $b = -1$ fås

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \implies \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + y - z = 2t \\ -1 - z = -1 + t \\ -t \end{pmatrix}$$

vilket ger skärningslinjen

$$L:\ \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Slutligen, för att avgöra om någon av punkterna $(4, 1, -2)$ och $(4, 2, -2)$ ligger på skärningslinjen ser vi att detta r endast möjligt om $t = 2$. Insättning i uttrycket för L ger då

$$\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\,\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

d.v.s. $(4, 1, -2)$ ligger på linjen och $(4, 2, -2)$ ligger inte på linjen.

2. Insättning av de givna vektorerna i F ger

$$F(-2, 1, 1) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & c \\ a & 1 & 1 \\ 1 & b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1+c \\ -2a+2 \\ -2+b \end{pmatrix} = \lambda_1\, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$F(0,1,1) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & c \\ a & 1 & 1 \\ 1 & b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1+c \\ 2 \\ b \end{pmatrix} = \lambda_2 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Ur (2) fås

$$\begin{cases} 1 + c = \lambda_2 \cdot 0 = 0 \iff c = -1, \\ \quad 2 = \lambda_2, \\ \quad b = \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

som insatt i (1) ger

$$\begin{cases} 1 + c = 0 = -2\lambda_1 \iff \lambda_1 = 0, \\ -2a + 2 = \lambda_1 = 0 \iff a = 1, \\ b - 2 = 2 - 2 = \lambda_1 = 0 \text{ (OK)} \end{cases}.$$

Därmed har vi fått fram att med $a = 1, b = 2, c = -1$ så är $(-2, 1, 1)$ en egenvektor med egenvärde 0 och $(0, 1, 1)$ en egenvektor med egenvärde 2. Lös nu sekularekvatioonen på vanligt sätt och beräkna det återstående egenvärdet (och kontrollera genom detta även den tidigare kalkylen) och dess egenvektorer.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} \overset{k_2+k_3}{=} \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda & -\lambda \end{vmatrix} \overset{r_3-r_2}{=} (2-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Utv. efter} \\ \text{rad 3} \end{bmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)(-1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-1-\lambda)(-\lambda) = 0 \iff$$

$$\iff \lambda = -1, 2, 0,$$

$$\underline{\underline{\lambda = -1}}: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_3-r_2 \\ r_2-r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X_{-1} = \begin{pmatrix} 3t \\ -2t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ovanstående kalkyl visar då att -1 är egenvärde med egenvektor $(3, -2, 1)$ (samt att de tidigare angivna egenvärdena 2 och 0 är korrekta).

3. Enklast är att beskriva $\mathbb{U}$ som lösningsrum genom att studera "linjärkombination = godtycklig vektor" och därefter bestämma de vektorer som löser ekvationerna för *både* $\mathbb{U}$ och $\mathbb{V}$. Låt $\mathbf{u}_1 = (1, 2, 1, 0, 1), \mathbf{u}_2 = (-1, 1, 0, 2, 1), \mathbf{u}_3 = (0, 1, 2, 1, 1)$. Då fås

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \iff$$

$$\iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x_1 \\ 2 & 1 & 1 & x_2 \\ 1 & 0 & 2 & x_3 \\ 0 & 2 & 1 & x_4 \\ 1 & 1 & 1 & x_5 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-r_1 \\ r_5-r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x_1 \\ 0 & 3 & 1 & -2x_1+x_2 \\ 0 & 1 & 2 & -x_1+x_3 \\ 0 & 2 & 1 & x_4 \\ 0 & 2 & 1 & -x_1+x_5 \end{array}\right) \overset{\substack{r_5-r_4 \\ r_2-3r_3 \\ r_4-2r_3 \\ r_2 \leftrightarrow r_3}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 2 & -x_1+x_3 \\ 0 & 0 & -5 & x_1+x_2-3x_3 \\ 0 & 0 & -3 & 2x_1-2x_3+x_4 \\ 0 & 0 & 0 & -x_4-x_1+x_5 \end{array}\right) \overset{5r_4-3r_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 2 & -x_1+x_3 \\ 0 & 0 & -5 & x_1+x_2-3x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 7x_1-3x_2-x_3+5x_4 \\ 0 & 0 & 0 & -x_1-x_4+x_5 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \mathbb{U} = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5\colon \begin{array}{l} 7x_1 - 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \\ -x_1 - x_4 + x_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Lös ekvationssystemet bestående av ekvationerna för både $\mathbb{U}$ och $\mathbb{V}$. För att förenkla kalkylen sätter vi ekvationerna med x_1-koefficient $= 1$ överst.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 7 & -3 & -1 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-4r_1 \\ r_4-7r_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 7 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 7 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{r_4-r_3 \\ r_3-3r_1 \\ -r_2}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + 4s + 4t = 4s + 5t \\ s + 2t + 8s + 8t = 9s + 10t \\ s \\ -t \\ 4s + 4t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad s, t, \in \mathbb{R},$$

d.v.s. $(4, 9, 1, 0, 4), (5, 10, 0, -1, 4)$ är en bas i $\mathbb{U} \cap \mathbb{V}$ som därmed har dimension 2.

4. Enligt **Sats 7.6.2**, sid 186 är AB avbildningsmatris till $F \circ G$. Vi får

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ -4 & -3 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Beräkna sedan nollrummet på vanligt sätt genom att lösa $ABX = \mathit{0}$,

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & 0 & -2 & -4 & 0 \\ -4 & -3 & 2 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \overset{r_2+2r_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -5 & 0 \end{array}\right) \overset{r_1/2-r_2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -5 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r - 3t \\ -2r + s + 5t \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r, s, t \in \mathbb{R} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow N(F \circ G) = [(2, -2, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1, 0), (-3, 5, 0, 0, 1)]$$

och $\dim N(F \circ G) = 3$.
Dimensionssatsen, **Sats 7.5.6**, sid 182 ger då att

$$\dim V(F \circ G) = \dim \mathbb{R}^5 - \dim N(F \circ G) = 5 - 3 = 2$$

så att $V(F{\circ}G)$ är ett två-dimensionellt underrum av $\mathbb{R}^2$. Följaktligen är $V(F{\circ}G) = \mathbb{R}^2$ och som bas kan vi välja vilken som helst bas i $\mathbb{R}^2$, t.ex. standardbasen eller vilka två som helst icke-parallella kolonnvektorer i $F{\circ}G$:s avbildningsmatris AB.

5. Sätt $\mathbf{u}_1 = (2,1,-1,3)$ och $\mathbf{u}_2 = (1,-3,1,-1)$ och studera (den olösbara) ekvationen

$$x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 = x_1\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\3\end{pmatrix} + x_2\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-3\\1\\-1\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\underbrace{\begin{pmatrix}2&1\\1&-3\\-1&1\\3&-1\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}}_{X} = \underline{\mathbf{e}}\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\2\\-5\\10\end{pmatrix}}_{Y} = \mathbf{v}$$

Enligt **Sats 6.4.1**, sid 162 gäller att *normalekvationerna* $A^tAX = A^tY$ alltid är lösbara och om X_0 är en lösning till dessa så är $\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} = \underline{\mathbf{e}}\,AX_0$.

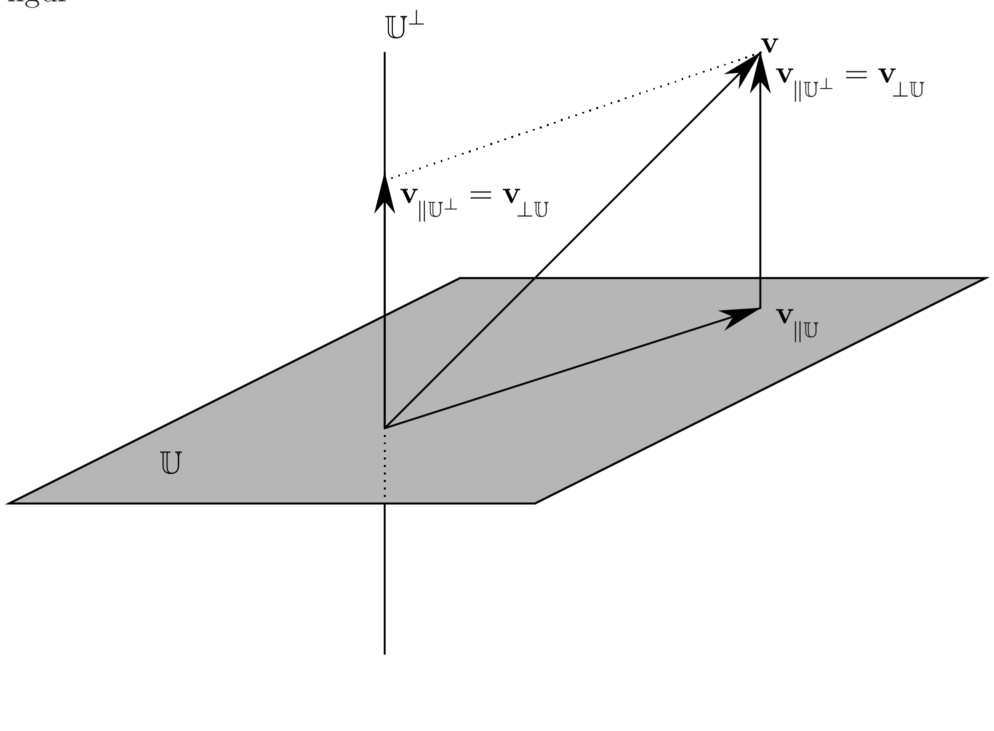
$$A^tA = \begin{pmatrix}2&1&-1&3\\1&-3&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&-3\\-1&1\\3&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15&-5\\-5&12\end{pmatrix},$$

$$A^tY = \begin{pmatrix}2&1&-1&3\\1&-3&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\\-5\\10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}35\\-22\end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}15&-5&35\\-5&12&-22\end{array}\right) \underset{r_1\leftrightarrow -r_2}{\overset{r_1+3r_2}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|c}5&-12&22\\0&31&-31\end{array}\right) \underset{r_1+12r_2}{\overset{r_2/31}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|c}5&0&10\\0&1&-1\end{array}\right) \Longrightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} = \underline{\mathbf{e}}\,AX_0 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2&1\\1&-3\\-1&1\\3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\5\\-3\\7\end{pmatrix}.$$

För att enklare se hur de efterfrågade avstånde skall beräknas, studera nedanstående figur



Vi ser då att

$$\min_{\mathbf{w}\in\mathbb{U}^\perp} |\mathbf{v}-\mathbf{w}| = \left|\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}\right| = \left|\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\5\\-3\\7\end{pmatrix}\right| = \sqrt{92},$$

$$\min_{\mathbf{u}\in\mathbb{U}} |\mathbf{v}-\mathbf{u}| = \left|\mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}}\right| = \left|\mathbf{v}-\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}\right| = \left|\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-5\\10\end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\5\\-3\\7\end{pmatrix}\right| = \left|\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-4\\-3\\-2\\3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{38}$$

6. Skriv ekvationen på matrisform och beräkna egenvärden och egenvektorer för den kvadratiska formen

$$4x_1^2+4x_2^2+5x_3^2-2x_1x_3-2x_2x_3+2x_1+2x_2-x_3 =$$
$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&0&-1\\0&4&-1\\-1&-1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = 1,$$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix}4-\lambda & 0 & -1\\ 0 & 4-\lambda & -1\\ -1 & -1 & 5-\lambda\end{vmatrix} \overset{r_2-r_1}{=} \begin{vmatrix}4-\lambda & 0 & -1\\ \lambda-4 & 4-\lambda & 0\\ -1 & -1 & 5-\lambda\end{vmatrix} =$$
$$= (\lambda-4)\begin{vmatrix}4-\lambda & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 5-\lambda\end{vmatrix} \overset{k_1+k_2}{=} (\lambda-4)\begin{vmatrix}4-\lambda & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ -2 & -1 & 5-\lambda\end{vmatrix} =$$
$$= -(\lambda-4)\begin{vmatrix}4-\lambda & -1\\ -2 & 5-\lambda\end{vmatrix} = -(\lambda-4)((4-\lambda)(5-\lambda)-2) =$$
$$= -(\lambda-4)\left(\lambda^2-9\lambda+18\right) = -(\lambda-4)\left(\lambda^2-(3+6)\lambda+3\cdot 6\right) =$$
$$= -(\lambda-4)(\lambda-3)(\lambda-6) = 0 \iff \lambda = 3,4,6,$$

$$\underline{\underline{\lambda=3}}: \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&1&-1&0\\-1&-1&2&0\end{array}\right) \overset{r_3+r_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&1&-1&0\\0&-1&1&0\end{array}\right) \overset{r_3+r_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow X_3 = t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad t\in\mathbb{R}, \quad \mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$\underline{\underline{\lambda=4}}: \left(\begin{array}{ccc|c}0&0&-1&0\\0&0&-1&0\\-1&-1&1&0\end{array}\right) \Longrightarrow X_4 = t\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad t\in\mathbb{R}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},$$

$$\underline{\underline{\lambda=6}}: \left(\begin{array}{ccc|c}-2&0&-1&0\\0&-2&-1&0\\-1&-1&-1&0\end{array}\right) \underset{r_1\leftrightarrow -r_3}{\overset{r_1-2r_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&-2&-1&0\\0&2&1&0\end{array}\right) \underset{r_2\leftrightarrow r_3}{\overset{r_2+r_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&2&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow X_6 = t\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}, \quad t\in\mathbb{R}, \quad \mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},$$

$$\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}\,T = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1\sqrt{3} & 1\sqrt{2} & 1\sqrt{6} \\ 1\sqrt{3} & -1\sqrt{2} & 1\sqrt{6} \\ 1\sqrt{3} & 0 & -2\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad X_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = TX_{\underline{\mathbf{f}}}.$$

Byte till denna ON-bas av egenvektorer ger

$$\begin{aligned}
&X_{\underline{\mathbf{e}}}{}^t \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} X_{\underline{\mathbf{e}}} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} X_{\underline{\mathbf{e}}} = \\
&= 3y_1^2 + 4y_2^2 + 6y_3^2 + \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\sqrt{3} & 1\sqrt{2} & 1\sqrt{6} \\ 1\sqrt{3} & -1\sqrt{2} & 1\sqrt{6} \\ 1\sqrt{3} & 0 & -2\sqrt{6} \end{pmatrix} X_{\underline{\mathbf{f}}} = \\
&= 3y_1^2 + 4y_2^2 + 6y_3^2 + \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \\
&= 3y_1^2 + 4y_2^2 + 6y_3^2 + \sqrt{3}y_1 + \sqrt{6}y_3 = \\
&= 3\left(y_1^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_1\right) + 4y_2^2 + 6\left(y_3^2 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_3\right) = \\
&= 3\left(\left(y_1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{1}{12}\right) + 4y_2^2 + 6\left(\left(y_3 + \frac{1}{2\sqrt{6}}\right)^2 - \frac{1}{24}\right) \\
&= 3\left(y_1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + 4y_2^2 + 6\left(y_3 + \frac{1}{2\sqrt{6}}\right)^2 - \frac{1}{2} = 1 \iff \\
&\iff 3\left(y_1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + 4y_2^2 + 6\left(y_3 + \frac{1}{2\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{3}{2} \\
&\iff 2\left(y_1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{8}{3}y_2^2 + 4\left(y_3 + \frac{1}{2\sqrt{6}}\right)^2 = \\
&= \left(\frac{y_1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}}{1/\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{\sqrt{3/8}}\right)^2 + \left(\frac{y_3 + \frac{1}{2\sqrt{6}}}{1/2}\right)^2 = 1.
\end{aligned}$$

Om vi kallar ellipsoidens medelpunkt M så följer det ur ovanstående att

$$\begin{aligned}
\overline{OM} &= \underline{\mathbf{f}} \begin{pmatrix} -1/2\sqrt{3} \\ 0 \\ -1/2\sqrt{6} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\mathbf{f}_1 - \frac{1}{2\sqrt{6}}\mathbf{f}_3 = -\frac{1}{6}\,\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{12}\,\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \\
&= -\frac{1}{12}\left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = -\frac{1}{12}\,\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\,\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \\
&\iff M = (-1/4, -1/4, 0).
\end{aligned}$$

Eftersom

$$\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{8}} < \sqrt{\frac{3}{8}} < \sqrt{\frac{4}{8}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

följer det att längsta halvaxeln är $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ lång och den kortaste är $\dfrac{1}{2}$.

7. Sätt högerledet på gemensamt bråk. Då fås

$$\frac{p(x)}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{A(x+1)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x-2)},$$

d.v.s. om $(x+1)(x-2), (x-1)(x-2), (x-1)(x+1)$ är en bas i $\mathbb{P}_2$ så följer påståendet. Då $\dim \mathbb{P}_2 = 3$ är de "rätt antal" och enligt satsen om rätt antal element, **Sats 5.4.19**, sid 121 räcker det att visa att de är linjärt oberoende. Ställ upp beroendeekvationen

$$\lambda_1(x+1)(x-2) + \lambda_2(x-1)(x-2) + \lambda_3(x-1)(x+1) = \mathbf{0} = 0\text{-polynomet}.$$

Här kan man, om man vill, multiplicera ihop de respektive faktorerna och få upp ett ekvationssystem, lösa det på vanligt sätt och finna att den triviala lösningen är den enda och att de därmed är linjärt oberoende och även en bas enligt ovanstående resonemang. Ett elegantare och mindre arbetssamt sätt att visa samma sak är att utnyttja att 0-polynomet är $= 0$ för alla x. Insättning av i tur och ordning $x = -1,\ 1$ och 2 ger då

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{x = -1}}: &\quad \lambda_1 \cdot 0 \cdot (-3) + \lambda_2 \cdot (-2) \cdot (-3) + \lambda_3 \cdot (-2) \cdot (0) = 6\lambda_2 = 0, \\
\underline{\underline{x = 1}}: &\quad \lambda_1 \cdot 2 \cdot (-1) + \lambda_2 \cdot 0 \cdot (-1) + \lambda_3 \cdot 0 \cdot 0 = -2\lambda_1 = 0, \\
\underline{\underline{x = 2}}: &\quad \lambda_1 \cdot (3) \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1 \cdot 0 + \lambda_3 \cdot 1 \cdot 3 = 3\lambda_3 = 0,
\end{aligned}$$

d.v.s. enda lösningen är $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ och $(x+1)(x-2), (x-1)(x-2), (x-1)(x+1)$ är linjärt oberoende. Därmed är de också en bas i $\mathbb{P}_2$ enligt satsen om rätt antal element och påståendet följer.