LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Milagros Izquierdo

Tentamen i Diskret Matematik, TATA32, ETE373 (916G24), TEN1, 2023–08–23

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa. Fullständiga motiveringar krävs.

För betyg 3 behövs 20 poäng, för betyg 4, 26 poäng och 32 poäng för betyg 5, inklusive eventuella bonuspoäng.

---

1. Betrakta Fibonaccitalen $f_1 = 1, f_2 = 1, f_{n+2} = f_{n-1} + f_n, n \geq 1$ Visa med induktionsprincipen att $f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$ för alla $n \geq 1$. (5p)

2. Betrakta den fullständiga bipartita grafen $K_{n,3}$ med n noder av typ A och 3 noder av typ B.
   (a) Visa att ett uppspännande träd i $K_{n,3}$ kan inte ha 3 eller fler noder av typ A som är grannar till minst 2 noder av typ B (1p)
   (b) Visa att det finns två sorters uppspännande träd i $K_{n,3}$: antingen en (1) nod av typ A är granne till de tre noder typ B, eller 2 noder av typ A är grannar till 2 noder var av typ B, men inte samma 2 noder av typ B. (2p)
   (c) Hur många uppspännande träd har $K_{n,3}$? (2p)

3. (a) På hur många sätt kan man dela 30 lika dockor i 6 olika fack? (1p)
   (b) På hur många sätt kan man dela 30 olika dockor i 6 ordnade fack? (1p)
   (c) På hur många sätt kan man dela 30 olika dockor i 6 (**oordnade**) fack? (1p)
   (d) Hur många partitioner av en mängd med 30 element finns det om partionen består av 6 delmängder med 5 element var? (1p)
   (e) Hur många ekvivalensrelationer kan man ha på en mängd med 30 element om ekvivalensrelationen har 6 ekvivalensklasser med 5 element i varje ekvivalensklass? (1p)

4. (a) Bestäm heltalet mellan 10800 och 11700 som är kongruent med 902^{900} modulo 899. (3p)
   (b) Lös systemet av modulära ekvationer

$$\begin{cases} 5x & +3y & -2z & \equiv & 18 \bmod 23 \\ 3x & -6y & +3z & \equiv & 0 \bmod 23 \\ 6x & +3y & +2z & \equiv & 10 \bmod 23 \end{cases} \qquad (2p)$$

5. (a) Lös den rekursiva ekvationen $s_{n+1} - s_n = n^3 + 3n^2 + 3n + 1,\ s_0 = 0$. (4p)
   (b) Genom att sätta $s_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$, bestäm summan av de n första positiva heltalen. (1p)

6. En matris $A = (a_{ij})$ kallas **boolsk** om varje element a_{ij} tar värdet 0 eller 1. Betrakta mängden av boolska matriser $\mathcal{M}_4 = \{A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix};\ a_{ij} = 0, 1\}$. Hur många funktioner $f : \mathcal{M}_4 \to \{0, 1\}$ finns det om alla element i kolonn 1 tar värdet 1, eller alla element i diagonalen tar värdet 1, eller alla element i kolonn 4 tar värdet 1? Svara med ett heltal. (5p)

7. Betrakta mängden $A = \{l = (x_{1024}x_{1023} \ldots x_2x_1)\,;\ x_i \in \{0, 1\}\}$ av binära listor av längd 1024. Vi definierar på A en relation $\mathcal{R}$ genom $l = (x_i)\mathcal{R}\, l' = (y_i)$ om $x_i \geq y_i$ för $1 \leq i \leq 1024$.
   (a) Visa att $\mathcal{R}$ är en partialordning. (3p)
   (b) Visa att $(A, \mathcal{R})$ är en lattice. (1p)
   (c) Ange minsta och största element i $(A, \mathcal{R})$, om de finns. (1p)

8. Formulera och bevisa Eulers formel för planära grafer. Om du behöver andra resultat ska du endast formulera dem. (5p)

Diskret Matematik
TATA32, ETE373 (916G24), TEN1
Lösningsförslag

Filip Granlund och Milagros Izquierdo

2023-08-23

Uppgift 1

Vi ska visa med induktionsprincipen att

$$f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1}, \quad \forall n \geq 1, \tag{1}$$

där $\{f_i\}$ är Fibonaccitalen, det vill säga

$$f_1 = f_2 = 1,\ f_{n+2} = f_n + f_{n+1}, \quad n \geq 1. \tag{2}$$

- Först kontrollerar vi formeln för $n = 1$.

  $$VL_1 = f_1^2 = 1 \cdot 1 = f_1 f_2 = HL_1 \quad \checkmark$$

  där VL_1 och HL_1 är vänster- respektive högerled i (1) för $n = 1$.

- Sedan antar vi för något $n \geq 1$ att

  $$\sum_{k=1}^{n} f_k^2 = f_n f_{n+1} \tag{3}$$

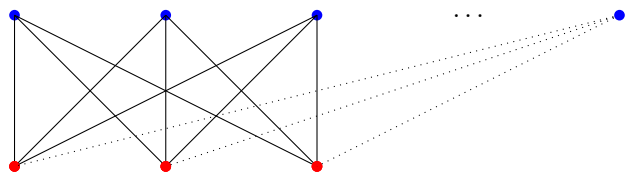
  och kontrollerar för $n + 1$.

  $$\begin{aligned} VL_{n+1} &= f_1^2 + f_2^2 + \ldots f_n^2 + f_{n+1}^2 \\ &= f_n f_{n+1} + f_{n+1}^2 = f_{n+1}(f_n + f_{n+1}) \\ &= f_{n+1} f_{n+2} \\ &= HL_{n+1} \quad \checkmark \end{aligned}$$

  där andra raden följer från vårt antagande i (3) och tredje raden följer från definitionen av Fibonaccitalen i (2).

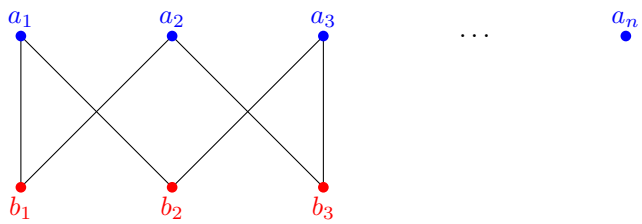
Uppgift 2

I Figur 2 illustreras grafen $K_{n,3}$ med grupp **A** och **B**.

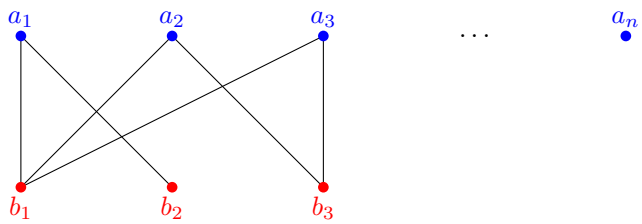


Figur 1: Fullständiga bipartita grafen $K_{n,3}$.

a) Ett uppspännande träd i $K_{n,3}$ kan inte ha ≥ 3 noder av typ **A** som är grannar till minst 2 noder av typ **B**, för det skulle innebära cykler i "trädet". Det finns två fall som kan ske, vilka illustreras i Figur 2 och 3.

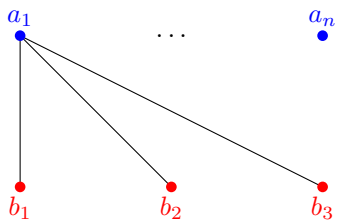


Figur 2: $a_1 - b_2 - a_3 - b_3 - a_2 - b_1 - a_1$ är en cykel.

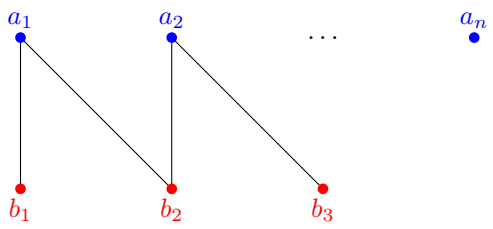


Figur 3: $a_1 - b_1 - a_2 - b_3 - a_3 - b_1 - a_1$ är en cykel.

b) Det finns två sorters uppspännande träd, eftersom ett uppspännande träd har $n + 3 - 1 = n + 2$ kanter och högst 2 noder av typ **A** kan vara grannar med minst 2 noder av typ **B**. Det finns två möjligheter om det inte ska finnas cykler, vilka illustreras i Figur 4 och 5.



Figur 4: Variant 1 av uppspännande träd. Alla $a_i \neq a_1$ har endast 1 kant. Totalt finns det alltså $(n-1) + 3 = n + 2$ kanter.



Figur 5: Variant 2 av uppspännande träd. Alla $a_i \neq a_1, a_2$ har endast 1 kant. Totalt finns det alltså $(n-2)+4 = n+2$ kanter.

c) Enligt **b)** finns det totalt $n \cdot 3^{n-1}$ stycken uppspännande träd av variant 1, eftersom varje $a_i \neq a_1$ har 1 kant och 3 olika val av nod i **B**. Sedan kan vi välja vilken nod i **A** som har 3 kanter på n sätt.

Det finns totalt $\binom{n}{2} \cdot 3 \cdot 3^{n-2}$ uppspännande träd av variant 2, eftersom varje $a_i \neq a_1, a_2$ har 1 kant och 3 val av nod i **B**. Sedan kan vi välja de noder i **A** som har 2 kanter på $\binom{n}{2}$ sätt. Sedan kan vi välja hur de noder i **A** som har 2 kanter sitter ihop med noderna i **B** på 3 sätt.

Totalt alltså

$$n \cdot 3^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot 3^{n-1} = \frac{n(n+1) \cdot 3^{n-1}}{2}.$$

Uppgift 3

a) Det går att dela 30 lika dockor i 6 olika fack på $\binom{30+6-1}{6-1}$ sätt. Detta är detsamma som antalet lösningar till

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = 30, \quad x_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad 1 \leq i \leq 6.$$

b) Varje docka har 6 val av låda och det är 30 dockor. Det finns alltså 6^{30} sätt.

c) Vi ska dela in 30 dockor i 6 oordnade fack. Låt antalet sätt detta går att göra på betecknas med T. Med hjälp av Stirlingtalet av andra slaget kan vi dela in problemet i fallen då $0 - 5$ stycken lådor är tomma och sedan summera. Vi kommer då få

$$\begin{aligned} T = S(30,1) + \binom{6}{2} \cdot S(30,2) + \binom{6}{3} \cdot S(30,3) \\ + \binom{6}{4} \cdot S(30,4) + \binom{6}{5} \cdot S(30,5) + S(30,6) \end{aligned}$$

d) Vi ska dela in 30 olika dockor i 6 oordnade fack med 5 dockor i varje. Låt antalet sätt detta går att göra på betecknas med T. Då är

$$T = \frac{30!}{5! \cdot 5! \cdot 5! \cdot 5! \cdot 5! \cdot 5! \cdot 6!}$$

e) *Partition* = *ekvivalensklass* så vi får samma svar som i **d)**.

Uppgift 4

a) Först är $899 = 29 \cdot 31$ och $\phi(899) = 28 \cdot 30 = 840$. Av detta följer att

$$\begin{aligned} 902^{900} &\equiv 3^{900} && \mod 899 \\ &\equiv 3^{840} \cdot 3^{60} && \mod 899 \\ &\equiv 3^{60} && \mod 899 \end{aligned}$$

där tredje raden följer av Eulers sats.

Nu är

$$\begin{cases} 3^{30} & \equiv 1 \mod 31 \\ 3^{30} & \equiv 9 \mod 29 \end{cases} \iff \begin{cases} 3^{60} & \equiv 1 \mod 31 \\ 3^{60} & \equiv 23 \mod 29 \end{cases},$$

ty $\phi(31) = 30$ och $\phi(29) = 28$.

Med Kinesiska restsatsen finner vi nu att

$$\begin{aligned} 3^{60} &\equiv 1 \cdot 29 \cdot b_1 + 23 \cdot 31 \cdot b_2 && \mod 899 \\ &\equiv 1 \cdot 29 \cdot 15 + 23 \cdot 31 \cdot 15 && \mod 899 \\ &\equiv 15 \cdot 742 && \mod 899 \\ &\equiv 11130 && \mod 899 \end{aligned}.$$

b) Vi har att

$$\begin{cases} 5x + 3y - 2z \equiv 18 & \mod 23 \\ 3x - 6y + 3z \equiv 0 & \mod 23 \\ 6x + 3y + 2z \equiv 10 & \mod 23 \end{cases} \iff \begin{cases} 5x + 3y - 2z \equiv 18 & \mod 23 \\ x - 2y + z \equiv 0 & \mod 23 \\ 6x + 3y + 2z \equiv 10 & \mod 23 \end{cases},$$

ty $\text{sgd}(3, 23) = \text{sgd}(6, 23) = 1$.

Om vi ordnar om och använder elimination får vi

$$\begin{cases} x - 2y + z \equiv 0 & \mod 23 \\ 5x + 3y - 2z \equiv 18 & \mod 23 \\ 6x + 3y + 2z \equiv 10 & \mod 23 \end{cases} \overset{2R_1+R_2}{\underset{R_2+R_3}{\iff}} \begin{cases} x - 2y + z \equiv 0 & \mod 23 \\ 7x - y \equiv 18 & \mod 23 \\ 11x + 6y \equiv 5 & \mod 23 \end{cases}$$

$$\overset{6R_2+R_3}{\iff} \begin{cases} x - 2y + z \equiv 0 & \mod 23 \\ 7x - y \equiv 18 & \mod 23 \\ 7x \equiv 21 & \mod 23 \end{cases}.$$

Så lösningen är $x = y = z = 3$.

Uppgift 5

a) Vi har att

$$s_n = s_n^{(h)} + s_n^{(p)},$$

där $s_n^{(h)}$ är den homogena lösningen och $s_n^{(p)}$ en partikulärlösning.

Den karaktäristiska ekvationen för s_n är $r - 1 = 0$, vilket ger lösningen $r_1 = 1$ (med multiplicitet 1). Därför är

$$s_n^{(h)} = A \cdot 1^n = A.$$

Vi kan skriva $s_n^{(p)}$ som

$$s_n^{(p)} = n(b_1 n^3 + b_2 n^2 + b_3 n + b_4)$$

och sätta in det i differensekvationen för att få

$$\begin{aligned} s_{n+1}^{(p)} - s_n^{(p)} &= b_1(n+1)^4 + b_2(n+1)^3 + b_3(n+1)^2 + b_4(n+1) - (b_1 n^4 + b_2 n^3 + b_3 n^2 + b_4 n) \\ &= 4b_1 n^3 + (6b_1 + 3b_2)n^2 + (4b_1 + 3b_2 + 2b_3)n + (b_1 + b_2 + b_3 + b_4) \\ &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1. \end{aligned}$$

Detta ger att

$$\begin{cases} 4b_1 & = 1 \\ 6b_1 + 3b_2 & = 3 \\ 4b_1 + 3b_2 + 2b_3 & = 3 \\ b_1 + b_2 + b_3 + b_4 & = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} b_1 = \frac{1}{4} \\ b_2 = \frac{1}{2} \\ b_3 = \frac{1}{4} \\ b_4 = 0 \end{cases}.$$

Nu kan vi skriva s_n som

$$A + \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4},$$

men $s_0 = 0 \implies A = 0$ så

$$s_n = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \frac{n^2(n^2 + 2n + 1)}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

b) Genom att tänka att

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3$$

får vi att

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Uppgift 6

Mängden

$$\mathcal{M}_4 = \{A = (a_{ij}) : a_{ij} \in \{0,1\} \text{ och } 1 \leq i,\, j \leq 4\}$$

innehåller totalt 2^{16} matriser och lika många funktioner f, där

$$f : \mathcal{A}_{16} \stackrel{\text{def}}{=} \{a_{11},\, \ldots\,,\, a_{44}\} \mapsto \{0,1\}.$$

Vi betraktar nu mängderna

$$\begin{cases} \mathcal{B}_1 & = \{A \in \mathcal{M}_4 : f(a_{i1}) = 1 \text{ och } 1 \leq i \leq 4\} \\ \mathcal{B}_2 & = \{A \in \mathcal{M}_4 : f(a_{ii}) = 1 \text{ och } 1 \leq i \leq 4\} \\ \mathcal{B}_3 & = \{A \in \mathcal{M}_4 : f(a_{i4}) = 1 \text{ och } 1 \leq i \leq 4\} \end{cases}.$$

Vi har nu att antalet matriser/funktioner n blir

$$\begin{aligned} n = |\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3| = \quad & |\mathcal{B}_1| + |\mathcal{B}_2| + |\mathcal{B}_3| \\ & - |\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2| - |\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_3| - |\mathcal{B}_2 \cap \mathcal{B}_3| \\ & + |\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \cap \mathcal{B}_3|, \end{aligned}$$

där

$$\begin{cases} |\mathcal{B}_1| = |\mathcal{B}_2| = |\mathcal{B}_3| = 2^{12} \\ |\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2| = 2^9 \\ |\mathcal{B}_2 \cap \mathcal{B}_3| = 2^9 \\ |\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_3| = 2^8 \\ |\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \cap \mathcal{B}_3| = 2^6 \end{cases}.$$

Då blir antalet matriser/funktioner

$$n = 3 \cdot 2^{12} - 2^{10} - 2^8 + 2^6 = 11072.$$

OBS! På grund av att uppgiften hade misstolkats fick <u>alla</u> **5p** på uppgiften. Det stod nämligen felaktigt

$$f : \mathcal{M}_4 \mapsto \{0,1\}$$

i uppgiften.

Uppgift 7

a) Vi ska visa att $(A,\, \mathcal{R})$ är en pomängd.

i) Reflexivitet av $\mathcal{R}$: För att visa att $\mathcal{R}$ är reflexiv behöver vi visa att för varje $\ell = (x_i)$ där $1 \leq i \leq 1024$ i A gäller att $\ell \,\mathcal{R}\, \ell$. Detta är sant eftersom $x_i \geq x_i$ där $1 \leq i \leq 1024$ ✓

ii) Antisymmetri av $\mathcal{R}$: Låt $\ell = (x_i)$ och $\ell^* = (y_i)$ där $1 \leq i \leq 1024$ vara i A. För att visa att $\mathcal{R}$ är antisymmetrisk behöver vi visa att om $\ell \,\mathcal{R}\, \ell^*$ och $\ell^* \,\mathcal{R}\, \ell$, så kommer $\ell = \ell^*$. Detta är sant eftersom $x_i \geq y_i$ och $y_i \geq x_i$ medför att $x_i = y_i$ där $1 \leq i \leq 1024$ och $\ell = \ell^*$ ✓

iii) Transitivitet av $\mathcal{R}$: Låt $\ell_1 = (x_i)$, $\ell_2 = (y_i)$ och $\ell_3 = (z_i)$ där $1 \leq i \leq 1024$ vara i A. För att visa att $\mathcal{R}$ är transitiv behöver vi visa att om $\ell_1 \,\mathcal{R}\, \ell_2$ och $\ell_2 \,\mathcal{R}\, \ell_3$, så kommer $\ell_1 \,\mathcal{R}\, \ell_3$. Detta är sant eftersom $x_i \geq y_1$ och $y_i \geq z_i$ medför att $x_i \geq z_i$ där $1 \leq i \leq 1024$ och $\ell_1 \,\mathcal{R}\, \ell_3$ ✓

$(A, \mathcal{R})$ är alltså en pomängd.

b) Låt $B = \{\ell_1,\, \ell_2\}$, där $\ell_1 = (x_i)$ och $\ell_2 = (y_i)$, och sätt

$$\begin{cases} \ell_M = (z_i), & z_i = \max(x_i,\, y_i), \quad 1 \leq i \leq 1024 \\ \ell_m = (w_i), & w_i = \min(x_i,\, y_i), \quad 1 \leq i \leq 1024. \end{cases}$$

Då måste $(A, \mathcal{R})$ vara en lattice, eftersom

$$\begin{cases} \ell_m = \text{möb}(B) \\ \ell_M = \text{sub}(B). \end{cases}$$

c) Det minsta elementet i $(A, \mathcal{R})$ är följden med 1024 ettor och det största elementet är följden med 1024 nollor.