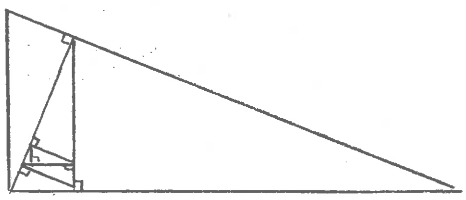
Skriven av
Stig Gustavsson

OM KURVOR

DEF Med en (kontinuerlig) kurva menas en funktion $t \curvearrowright \gamma(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, där γ är kontinuerlig.

(Obs att orienteringen ingår. För att få med denna definierar man i boken kurva just som funktionen γ i stället för mängden $\{\gamma(t) : a \leqslant t \leqslant b\}$ som annars vore naturligare).

Exempel (av mystiskt slag) på kontinuerlig kurva.



Utgå från en rätvinklig triangel (ej likbent). Låt $0 \leqslant t \leqslant 1$ och skriv t på binär form

$$t = \sum^{\infty} \frac{\alpha_k}{2^k}, \text{ där } \alpha_k = 0 \text{ eller } 1.$$

För varje t definieras $\gamma(t)$ så här:
Man drar (utan att lyfta pennan) en oändlig följd av normaler i enlighet med figuren. Varje normal delar en triangelyta i två mindre likformiga triangelytor, och man står inför ett val mellan dessa två trianglar när nästa normal skall dras. Siffrorna i t:s binära framställning avgör valet på följande sätt: Allra först dras den första normalen från den stora triangelns räta vinkelhörn mot hypotenusan. Därefter går man in i den större triangeln om $\alpha_1 = 1$, och in i den mindre om $\alpha_1 = 0$. Ritandet av nästa normal bestäms av α_2: man går in i den större av två deltrianglar om $\alpha_2 = 1$, och in i den mindre om $\alpha_2 = 0$. Följande normaler bestäms av $\alpha_3, \alpha_4, \ldots$ enligt samma princip. Vi får en oändlig process, som konvergerar mot en punkt i den ursprungliga slutna triangelytan. Denna punkt definieras som $\gamma(t)$. (Den påbörjade processen i figuren svarar mot $t = 0{,}10110\ldots$, där t är skriven på binär form)
Nu finns ett litet problem i att vissa t kan skrivas på två sätt. För ett sådant t gäller dock att om den k:te platsen är den första som skiljer sig i de båda utvecklingarna av t, så är dessa utvecklingar

$$t = 0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\ldots\alpha_{k-1}100000\ldots =$$
$$= 0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\ldots\alpha_{k-1}011111\ldots$$

Dessa båda framställningar ger dock samma punkt $\gamma(t)$. Försök övertyga dig om detta.
Vi inser att $\{\gamma(t) : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ = hela den slutna triangelytan, ty om z_o är en godtycklig punkt i ytan, kan vi hela tiden välja α_k så att vi gå in i en triangel där z_o ligger. Valet av α_k är inte alltid entydigt. Olika t kan ge samma $\gamma(t)$.

Att γ är kontinuerlig inses på följande sätt:

Om $t_1 = 0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots$ och $t_2 = 0,\beta_1\beta_2\beta_3 \ldots$ är två tal som ligger mycket nära varandra så gäller (i allmänhet) att $\alpha_k = \beta_k$ för alla k i början av utvecklingen tills k blir mycket stort. Det betyder att processerna med ritandet av normalerna följs åt för t_1 och t_2 tills man kommit in i en mycket liten triangelyta. Därav framgår att $\gamma(t_1)$ och $\gamma(t_2)$ ligger mycket nära varandra.

Orden "i allmänhet" ovan antyder att utvecklingarna av t_1 och t_2 kan skilja sig relativt tidigt även om t_1 och t_2 ligger mycket nära varandra. Antag att det "relativt tidigt" inträffar en första skillnad $\alpha_k \neq \beta_k$, säg $\alpha_k = 1$ och $\beta_k = 0$. Då gäller $t_1 \geq t_2$ samt att α_k måste följas av en lång rad nollor medan β_k följs av en lång rad ettor. Efter passerandet av dessa nollor och ettor kommer ritandet i figuren att ha lett till två nära varandra liggande punkter. I det läget är man redan instängd i mycket små trianglar, och därvid kommer både $\gamma(t_1)$ och $\gamma(t_2)$ att ligga alldeles i närheten.

Det senaste stycket har lite karaktär av "övertalningsförsök". Fundera gärna över detta själv.

Hur som helst så har vi genom γ fått en kontinuerlig kurva. Härav inser vi att något mer än kontinuitet måste förutsättas, om kurvan skall ha ett utseende som gör den förtjänt av namnet. Här kommer det extra villkoret in om att γ' bör existera och vara kontinuerlig. I så fall kallas kurvan regulär och den kommer att ha en kontinuerligt varierande tangentriktning. Ett något svagare krav är att kurvan är styckevis regulär, vilket betyder att γ' är kontinuerlig överallt utom på högst ändligt många ställen. I sådant fall få kurvan hörn här och var.