Knutar

Treklöverknut :  

Dess spegelbild

8 - knut :  

Dess spegelbild

Oknut :   

En <u>länk</u>, de Borromeiska ringarna : 

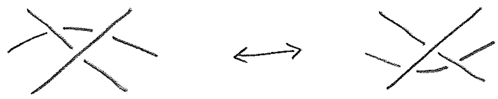
En <u>knut</u> är en länk med 1 komponent.

Reidemeisterdrag

De tre reidemeisterdragen för ett länkdiagram:

1. 

2. 

3. 

- Om två diagram kan överföras i varandra genom deformationer och reidemeisterdrag så representerar de samma länk.

Och tvärtom:

- Om en länk representeras av två olika diagram så kan de överföras i varandra genom deformationer och reidemeisterdrag.

Så: Något som är definierat för diagram och som inte förändras av deformationer eller reidemeisterdrag är något som hör till länken själv.

Kauffmans klammerpolynom [D] för ett diagram D

Vid en korsning definieras A-områdena och A^{-1}-områdena genom 

, dvs A-områdena är de som övre tråden sveper ut om den roteras moturs.

A-splittring:  , dvs A-områdena får kontakt.

A^{-1}-splittring:  , —"— A^{-1}-områdena —"— .

Ett diagram D med n korsningar kan fullständigt splittras på 2^n sätt.

[D] = Summan över alla fullständiga splittringar av D, där en fullständig splittring bidrar med termen

$$A^{\text{antal } A\text{-splittringar}}(A^{-1})^{\text{antal } A^{-1}\text{-splittringar}}(-A^2-A^{-2})^{\text{antal loopar}-1}$$

Ex

[] $= A^1(A^{-1})^0(-A^2-A^{-2})^{1-1} + A^0(A^{-1})^1(-A^2-A^{-2})^{2-1}$

$$= A + A^{-1}(-A^2-A^{-2}) = -A^{-3}.$$

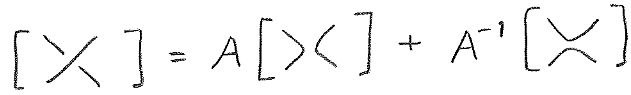
Ex

[] $= A^2(-A^2-A^{-2}) + 1 + 1 + A^{-2}(-A^2-A^{-2})$

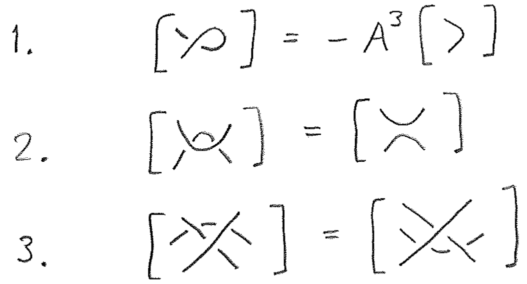
$$= -A^4 - A^{-4}.$$

Egenskaper för klammerpolynomet

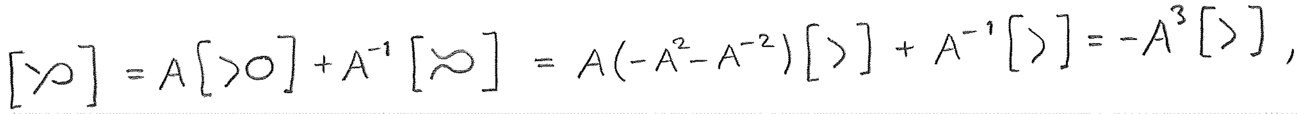
Av definitionen följer:

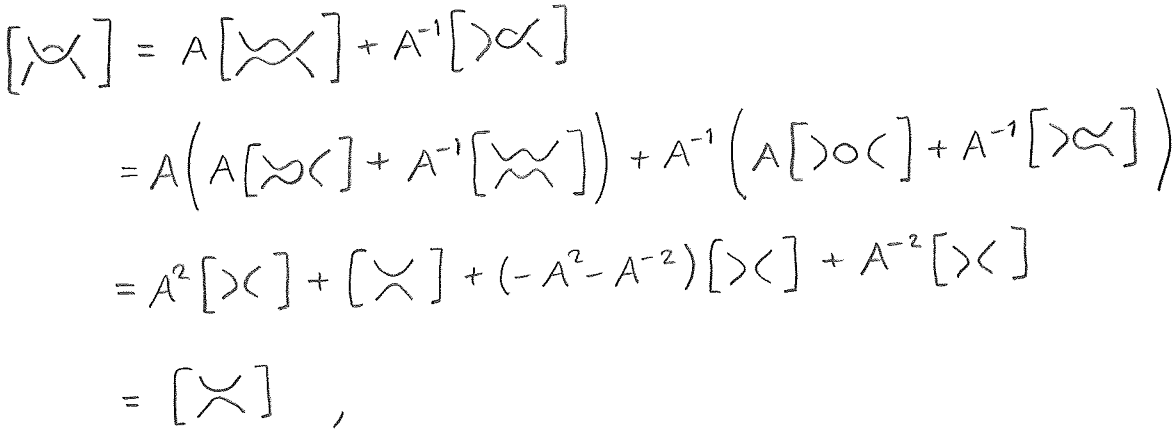
- $[\bigcirc] = 1$
- $[\bigcirc\, D] = (-A^2 - A^{-2})[D]$
- 

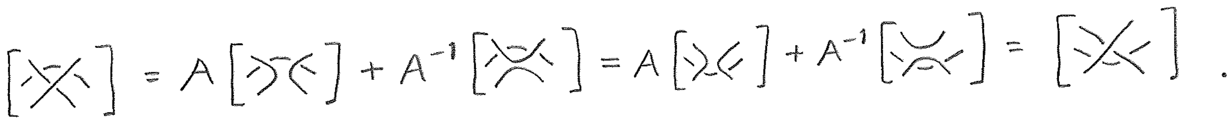
Klammerpolynomet och reidemeisterdrag



, ty:





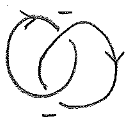


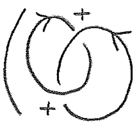
Vridningen $w(D)$ för ett orienterat diagram D

Tecknet för en korsning:  $+$,  $-$,

dvs om den övre tråden ska vridas moturs för att riktningarna ska sammanfalla, är det en $+$-korsning.

$w(D)$ = (antal $+$-korsningar) $-$ (antal $-$-korsningar)

Ex $\quad w\Big($  $\Big) = 0 - 2 = -2$

$w\Big($  $\Big) = 2 - 0 = 2$

OBS: Vridningen av ett knutdiagram (1 komponent) beror ej av valet av orientering.

Vridning och reidemeisterdrag

1. $w\Big($  $\Big) = 1 + w\Big($  $\Big)$

2. $w\Big($  $\Big) = w\Big($  $\Big)$

3. $w\Big($  $\Big) = w\Big($  $\Big)$

(Oberoende av val av orienteringar.)

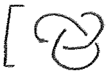
Jonespolynomet $J(D)$ för ett orienterat diagram D

$$J(D) = (-A^3)^{-w(D)}[D]$$

Jonespolynomet förändras inte av deformationer eller reidemeisterdrag!

För en knut beror $J(D)$ ej av val av orientering för D.

Ex $\quad J(\bigcirc) = (-A^3)^{-0}[\bigcirc] = 1$

Ex $\quad J\big($  $\big) = (-A^3)^{-w(}$  $^{)}\big[$  $\big]$

$= (-A^3)^{-3}\Big(A\big[$  $\big] + A^{-1}\big[$  $\big]\Big)$

$$= -A^{-9}\left(A(-A^4-A^{-4}) + A^{-1}(-A^{-3})(-A^{-3})\right)$$

$$= A^{-4} + A^{-12} - A^{-16}$$

Så treklöverknuten <u>är</u> skild från oknuten!

Om D är ett knutdiagram och $\bar{D}$ är samma diagram där alla korsningar bytts, är $[\bar{D}](A) = [D](A^{-1})$ och $w(\bar{D}) = -w(D)$, så $J(\bar{D})(A) = J(D)(A^{-1})$.

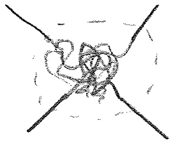
Ex $\quad J\big($  $\big) = A^4 + A^{12} - A^{16}$

Så treklöverknuten är <u>inte</u> samma knut som sin spegelbild!

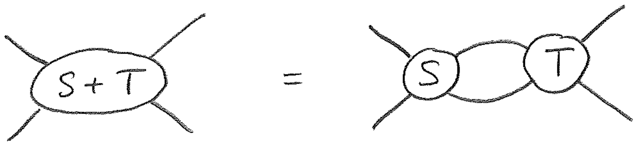
Ex $\quad J\Big($  $\Big) = A^8 - A^4 + 1 - A^{-4} + A^{-8}$

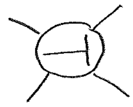
Är 8-knuten samma knut som sin spegelbild?

Trassel

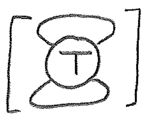
Ett trassel har fyra ändar : 

Två trassel  och  kan "adderas" :



och trassel kan vridas :  ( vriden 90° medurs .)

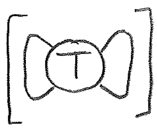
Bråket $B(T)$ för ett trassel T är :



$[\quad]_{A=\sqrt{i}}$

$B(T) =$ ———

$i\,[\quad]_{A=\sqrt{i}}$



(där $\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$)

Vitsen med $A = \sqrt{i}$ är att då blir $-A^2 - A^{-2} = 0$.

<u>Ex</u> $B($  $) = 0$, $B(\,)(\,) = \infty$, $B($  $) = 1$.

Vi har :

$$B(S+T) = B(S) + B(T)$$

$$B(\dashv) = -1/B(T)$$

vilket väl fullständigt förklarar reptricket !?

En bok:

The Knot Book, av Colin Adams

En hemsida:

http://www.math.uic.edu/~kauffman/