

Knutar

Treklöverknut :



Dess spegelbild

8-knut :



Dess spegelbild

Oknut :



En länk, de Borromeiska ringarna :



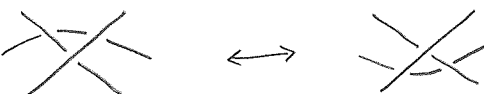
En knut är en länk med 1 komponent.

Reidemeisterdrag

De tre reidemeisterdragen för ett länkdiagram:

1.  A diagram showing a single strand with a loop on the left, followed by a double-headed arrow, and then a single straight strand on the right.

2.  A diagram showing two strands crossing on the left, followed by a double-headed arrow, and then two strands crossing on the right with the opposite orientation.

3.  A diagram showing two strands crossing with a third strand passing through the crossing on the left, followed by a double-headed arrow, and then the same two strands crossing with the third strand passing through on the right, but with the crossing orientation reversed.

- Om två diagram kan överföras i varandra genom deformationer och reidemeisterdrag så representerar de samma länk.

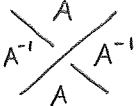
Och tvärtom:


- Om en länk representeras av två olika diagram så kan de överföras i varandra genom deformationer och reidemeisterdrag.

Så: Något som är definierat för diagram och som inte förändras av deformationer eller reidemeisterdrag är något som hör till länken själv.

Kauffman's klammerpolynom $[D]$ för ett diagram D

Vid en korsning definieras A -områdena och A^{-1} -områdena

genom  , dvs A -områdena är de som övre tråden sveper ut om den roteras moturs.


A -splittring:  , dvs A -områdena får kontakt.


A^{-1} -splittring:  , dvs A^{-1} -områdena — " —.

Ett diagram D med n korsningar kan fullständigt splittras på 2^n sätt.

$[D]$ = Summan över alla fullständiga splittringar av D , där en fullständig splittring bidrar med termen

$$A^{\text{antal } A\text{-splittringar}} (A^{-1})^{\text{antal } A^{-1}\text{-splittringar}} (-A^2 - A^{-2})^{\text{antal loopar} - 1}$$

Ex  $[\infty] = A^1 (A^{-1})^0 (-A^2 - A^{-2})^{1-1} + A^0 (A^{-1})^1 (-A^2 - A^{-2})^{2-1}$
 $= A + A^{-1} (-A^2 - A^{-2}) = -A^{-3}$

Ex  $[\infty] = A^2 (-A^2 - A^{-2}) + 1 + 1 + A^{-2} (-A^2 - A^{-2})$
 $= -A^4 - A^{-4}$

Egenskaper för klammerpolynom

Av definitionen följer:

- $[O] = 1$
- $[OD] = (-A^2 - A^{-2})[D]$
- $[X] = A[><] + A^{-1}[X]$

Klammerpolynom och reidemeisterdrag

1. $[>] = -A^3[>]$
2. $[>X] = [X]$
3. $[>X] = [X]$, ty:

$$[>] = A[>O] + A^{-1}[>] = A(-A^2 - A^{-2})[>] + A^{-1}[>] = -A^3[>],$$

$$[>X] = A[>X] + A^{-1}[>X]$$



$$= A(A[>X] + A^{-1}[>X]) + A^{-1}(A[>X] + A^{-1}[>X])$$

$$= A^2[>X] + [X] + (-A^2 - A^{-2})[>X] + A^{-2}[>X]$$

$$= [X],$$

$$[>X] = A[>X] + A^{-1}[>X] = A[>X] + A^{-1}[X] = [>X].$$

Vridningen $w(D)$ för ett orienterat diagram D

Tecknet för en korsning:  + ,  - ,

dvs om den övre tråden ska vridas moturs för att riktningarna ska sammanfalla, är det en +-korsning.

$$w(D) = (\text{antal +-korsningar}) - (\text{antal --korsningar})$$

Ex $w\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) = 0 - 2 = -2$

$$w\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) = 2 - 0 = 2$$

OBS: Vridningen av ett knutdiagram (1 komponent) beror ej av valet av orientering.

Vridning och Reidemeisterdrag

1. $w\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) = 1 + w\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right)$

2. $w\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) = w\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right)$

3. $w\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) = w\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right)$

(oberoende av val av orientering.)

Jonespolynomet $J(D)$ för ett orienterat diagram D

$$J(D) = (-A^3)^{-w(D)} [D]$$

Jonespolynomet förändras inte av deformationer eller Reidemeisterdrag!

För en knut beror $J(D)$ ej av val av orientering för D .

Ex $J(O) = (-A^3)^{-0} [O] = 1$

Ex $J(\text{treklöverknuten}) = (-A^3)^{-w(\text{treklöverknuten})} [\text{treklöverknuten}]$

$$= (-A^3)^{-3} (A[\text{treklöverknuten}] + A^{-1}[\text{treklöverknuten}])$$
$$= -A^{-9} (A(-A^4 - A^{-4}) + A^{-1}(-A^{-3})(-A^{-3}))$$
$$= A^{-4} + A^{-12} - A^{-16}$$

Så treklöverknuten är skild från oknuten!

Om D är ett knutdiagram och \bar{D} är samma diagram där alla korsningar bytts, är $[\bar{D}](A) = [D](A^{-1})$ och $w(\bar{D}) = -w(D)$, så $J(\bar{D})(A) = J(D)(A^{-1})$.

Ex $J(\text{spegelbild av treklöverknuten}) = A^4 + A^{12} - A^{16}$

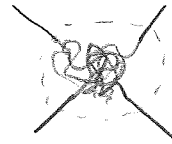
Så treklöverknuten är inte samma knut som sin spegelbild!



Ex $J(\text{8-knuten}) = A^8 - A^4 + 1 - A^{-4} + A^{-8}$



Är 8-knuten samma knut som sin spegelbild?

Trassel

Ett trassel har fyra ändar :





Två trassel  och  kan "adderas" ;

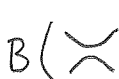

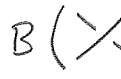
$$\text{} = \text{$$

och trassel kan vridas :  $\left(\text{ vriden 90^\circ \text{ medurs.} \right)$

Bråket $B(T)$ för ett trassel T är :

$$B(T) = \frac{\left[\text{} \right]_{A=\sqrt{i}}}{i \left[\text{} \right]_{A=\sqrt{i}}} \quad \left(\text{där } \sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)$$

Vitsen med $A=\sqrt{i}$ är att då blir $-A^2 - A^{-2} = 0$.

Ex $B(\text{}) = 0$, $B(\text{}) = \infty$, $B(\text{}) = 1$.

Vi har :

$$B(S+T) = B(S) + B(T)$$

$$B(-1) = -1/B(T)$$

vilket väl fullständigt förklarar repticket!?

En bok:

The Knot Book , av Colin Adams

En hemsida:

<http://www.math.uic.edu/~kauffman/>