Några berömda 1900-talsmatematiker

Hans Lundmark, MAI

TATA40 Matematiska utblickar

(maj 2017)

Viktiga årtal

- Första världskriget 1914–1918.
- Ryska revolutionen 1917. Sovjetunionen 1922.
- Hitler rikskansler i Tyskland jan 1933.
- Andra världskriget 1939–1945.

Översikt över föredraget

- Ganska mycket om David Hilbert.
- Därefter smått och gott om diverse andra matematiker, så långt vi hinner.

David Hilbert (1862–1943)

- Född i Königsberg, verksam i Göttingen.
- Fadern var domare. Modern betraktades som lite av ett ”original” och var intresserad av filosofi och astronomi.
- Välkänd redan på 1890-talet.
- Höll t.ex. ett mycket berömt föredrag på den andra internationella matematikerkongressen i Paris år 1900.

  (”Hilberts 23 problem”, se nedan.)
- Betraktades (och betraktas fortfarande) som den mest framstående matematikern under det tidiga 1900-talet, särskilt efter att **Henri Poincaré** (1854–1912) dött.

(Alla foton är hämtade från Wikimedia Commons.)

- Hilbert började läsa matematik på universitetet i Königsberg 1880.
- Blev där vän för livet med **Hermann Minkowski** (1864–1909), ett underbarn som 1883 vann Franska vetenskapsakademins *Grand Prix des Sciences Mathematiques*.

  Främst talteoretiker. Även känd för Minkowski-rummet, som beskriver geometrin hos rumtiden i Einsteins speciella relativitetsteori. (Einstein läste matematik för Minkowski i Zürich, men lär mest ha skolkat från föreläsningarna!) Hilbert lyckades ordna en tjänst åt honom i Göttingen 1902. Dog tragiskt av brusten blindtarm.

- Varje eftermiddag kl. 17 gick Hilbert och Minkowski på promenad ”till äppelträdet” ihop med sin lärare, **Adolf Hurwitz** (1859–1919), och pratade matematik.
- Hilbert doktorerade 1885 inom *invariantteori*, ett inneämne på den tiden.

Invariantteori

Invariant (adjektiv) = konstant, ej varierande.

Invariant (substantiv) = något som är invariant, dvs. **inte ändras**.

Speciellt: något som inte ändras **vid variabeltransformationer**.

Och i synnerhet: invarianter för **former** vid **linjära** transformationer.

(**Form** betyder **homogent polynom**, alla termer har samma gradtal.)

Exempel:

$Q(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$ $\quad \underbrace{\text{ternär}}_{\text{3 variabler}}\ \underbrace{\text{kvadratisk}}_{\text{grad 2}}\ \text{form}$

$R(x,y) = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$ $\quad \underbrace{\text{binär}}_{\text{2 variabler}}\ \underbrace{\text{kubisk}}_{\text{grad 3}}\ \text{form}$

En kvadratisk form kan skrivas med matrisnotation:

$$\begin{aligned} Q(x,y,z) &= ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz \\ &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = X^t S X \end{aligned}$$

Linjärt variabelbyte $X = U\tilde{X}$, där U är en inverterbar matris, ger

$$Q = X^t S X = (U\tilde{X})^t S (U\tilde{X}) = \tilde{X}^t (U^t S U) \tilde{X} = \tilde{X}^t \tilde{S} \tilde{X}, \quad \text{där } \tilde{S} = U^t S U.$$

I invariantteori studeras särskilt fallet då $\det U = 1$. Då blir t.ex.

$$\boxed{\det(\tilde{S})} = \det(U^t S U) = \det(U^t)\det(S)\det(U) = 1 \cdot \det(S) \cdot 1 = \boxed{\det(S)}$$

Så $\det(S) = abc + 2def - af^2 - be^2 - cd^2$ är ett exempel på en invariant.

Även om den transformerade formen $Q(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = \tilde{a}\tilde{x}^2 + \tilde{b}\tilde{y}^2 + \ldots$ i allmänhet inte har samma koefficienter som förut ($\tilde{a}$ behöver inte vara lika med a, osv.), så kommer just den *kombinationen* av koefficienterna att ha ett oförändrat värde:

$$\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c} + 2\tilde{d}\tilde{e}\tilde{f} - \tilde{a}\tilde{f}^2 - \tilde{b}\tilde{e}^2 - \tilde{c}\tilde{d}^2 = abc + 2def - af^2 - be^2 - cd^2.$$

- Då blir förstås även t.ex. $\det(S)^2$ en invariant. Men det är lite löjligt, för den är ju inte ”funktionellt oberoende” av $\det(S)$.

- Fråga: Hur många (oberoende) invarianter finns det för former av ett visst gradtal och med ett visst antal variabler?

- **Arthur Cayley** (1821–1895) visade 1856 att för kvadratiska, kubiska eller ternära **binära** former $P(x, y)$ finns det bara **ändligt** många.

  (Det finns en ändlig ”bas” av invarianter som ”genererar” alla de övriga.)

- **Paul Gordan** (1837–1912) skaffade sig 1868 titeln ”invarianternas konung” genom att visa att detsamma gäller för **binära** former $P(x, y)$ av **godtyckligt gradtal**.

  (Räknemässigt bevis, som visar hur man för ett givet gradtal kan konstruera en ändlig bas.)

- **Gordans problem** var att visa att det **alltid** finns en ändlig bas av invarianter, även för former i **fler än två variabler**.

  Verkade hopplöst komplicerat!

- Hilbert företog 1885–86 en lång studieresa, bl.a. till Paris.

  Speciellt väl mottagen av **Charles Hermite** (1822–1901), som bl.a. hade brevväxlat med **James Joseph Sylvester** (1814–1897) angående Gordans problem.

  (Sylvester har myntat många matematiska facktermer: *annihilator*, *canonical form*, *discriminant*, *Hessian*, *isomorphic*, *Jacobian*, *matrix*, *minor*, *nullity*, *totient function*, och även de lite mindre kända *allotrious factor*, *anallagmatic*, *catalecticant*, *combinant covariant cumulant cyclotomy*, *meicatecticizant*, *plagiograph*, *tamisage*, *umbral calculus*, för att bara nämna några.)

- Tillbaka till Königsberg för *Habilitation* (en andra avhandling som ger rätt att undervisa på universitetet som *Privatdozent*).

- Hilbert löste 1888 Gordans problem på ett helt oväntat sätt!

  Ett relativt enkelt icke-konstruktivt argument bevisade att det måste finnas en ändlig bas, men gav ingen vink om hur man hittar den.

- Gordans kommentar är ofta citerad:

  > *Das ist nicht Mathematik. Das ist Theologie.*

  (Enligt dödsruna av en kollega i Erlangen, Max Noether, som dock inte förklarade vad Gordan menade det detta. Kritik? Skämtsam beundran?)

- Modern formulering av **Hilberts bassats**:

  ”Om A är en noethersk ring så är $A[x]$ det också.”

  (Grundläggande i kommutativ algebra och algebraisk geometri.)

- Hilbert publicerade 1893 även en konstruktiv lösning till Gordans problem.

  (Via **Hilberts nollställessats**, också grundläggande i algebraisk geometri.)

- Lämnade sedan invariantteorin åt sitt öde.

  Matematisk ”periodare”. Fokuserad på en enda sak i flera år, sedan plötsligt något helt annat.

- Han gifte sig 1892.

  Övertog Hurwitz' *Extraordinarius*-tjänst ($\approx$ "bitr. prof.") i Königsberg efter att denne fått en professur i Zürich.

- Nästa projekt: **algebraisk talteori**, där man bl.a. studerar **talringar** och **talkroppar**.

  Vilka primtal kan skrivas på formen $p = a^2 + b^2$?

  Detta kan studeras via ringen av **gaussiska heltal**

  $$\{a + ib : a, b \in \mathbf{Z}\},$$

  där man kan faktorisera $a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$ och utnyttja att satsen om **entydig faktorisering i irreducibla faktorer** gäller även i denna ring, liksom i ringen $\mathbf{Z}$.

  Denna sats gäller dock inte i t.ex. ringen

  $$\{a + ib\sqrt{3} : a, b \in \mathbf{Z}\},$$

  eftersom

  $$4 = 2 \cdot 2 = (1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3})$$

  är två *olika* faktoriseringar av talet 4 i irreducibla faktorer.

- Hilbert och Minkowski fick 1893 i uppdrag av den nybildade *Deutsche Mathematiker-Vereinigung* att inom två år skriva en rapport om det aktuella forskningsläget inom talteorin.

  (Kummer, Kronecker och Dedekind hade nya resultat om entydig faktorisering i ”ideala tal”. Ansågs viktigt men svårbegripligt.)

- De delade upp arbetet: klassisk talteori till Minkowski, algebraisk talteori till Hilbert.

- Minkowski blev aldrig klar, men Hilbert färdigställde sin del 1897 (379 sidor).

  Officiell titel: *Die Theorie der algebraischen Zahlkörper*. Kallas oftast bara för Hilberts *Zahlbericht* (talrapport).

  Räknas som ett mästerverk, som presenterade och förtydligade de nya teorierna på ett glasklart sätt.

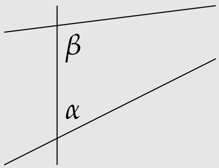
- 1895 fick Hilbert en professur i Göttingen, där han förblev till sin död 1943.
- **Felix Klein** (1849–1925) var ledande matematiker i Göttingen vid den tidpunkten. Mycket karismatisk och respektingivande, vördad som en kung.
- Hilbert var anspråkslösare och lättare att närma sig.

  Som lärare brukade han t.ex. rekapitulera vad han sagt på tidigare föreläsningar; ”gymnasialt” enligt kollegerna!
- Han publicerade ytterligare ett talteoretiskt verk, som utarbetade grunderna för den s.k. klasskroppsteorin, och lade sedan talteorin åt sidan.

- Nästa projekt: **geometrins grundvalar**.
- Euklides' *Elementa* från 300-talet f.Kr. har använts som lärobok i skolan långt in på 1900-talet.

  Stilbildande verk: startar med definitioner och axiom, och bygger upp teorin därifrån.

  (Dock ej helt perfekt. Resonemangen använder t.ex. en del saker som aldrig formuleras som axiom.)
- Fyra enkla axiom, plus det "konstiga" parallellaxiomet:



Om en rät linje korsar två andra räta linjer så att de inre vinklarna på ena sidan är mindre än två räta vinklar (dvs. $\alpha + \beta < \pi$), så måste de två räta linjerna, om förlängda i all oändlighet, mötas på på denna sida.

- Många har genom historien försökt att bevisa att parallellaxiomet följer från de fyra första axiomen.

  Men det gör det inte! För på 1800-talet upptäcktes **icke-euklidiska geometrier** som uppfyller de fyra första axiomen men **inte** parallell-axiomet.

  (Bolyai, Lobatjevskij och även Gauss, som dock ej publicerade resultaten.)

- Hilberts bok *Grundlagen der Geometrie* (1899) handlar om geometrins axiom och relationerna mellan dem.

  Uppdaterad axiomatisk version av Euklides geometri, med nutida krav på stringens.

- Euklides börjar med ”En punkt är det som inte har några delar”.

  Men Hilbert försöker aldrig tala om vad **punkter**, **linjer** och **plan** egentligen *är*, utan de definieras *enbart* utifrån de *relationer* som de uppfyller enligt axiomen.

  T.ex. ”två skilda punkter A och B bestämmer alltid fullständigt en rät linje a”.

  Han brukade säga att det inte skulle göra någon skillnad om man kallade dem för **bord**, **stolar** och **ölsejdlar** istället.

- Hilbert började nu vara ganska berömd, och blev inbjuden att tala vid andra internationella matematikerkongressen i Paris år 1900.

  (Första var 1897 i Zürich. Hålls vart fjärde år fortfarande.)

- Titeln på föredraget: ”Matematikens problem”.

  Lista på 23 olösta problem, i den senare publicerade versionen. (Av dessa presenterades 10 stycken i Paris.)

- Hilbert hade en optimistisk inställning:

  > ”Denna övertygelse om att varje matematiskt problem är lösbart är en kraftig sporre för oss under arbetet. Vi hör inom oss den ständiga maningen: Där är problemet, sök lösningen. Du kan finna den med rent tänkande, för i matematiken finns inget *ignorabimus*.”

  Den tyske läkaren Emil du Bois-Reymond hade hävdat att vissa ”transcendenta” problem, t.ex. materiens och krafternas innersta väsen, låg bortom människans vetande. *Ignoramus et ignorabimus* = vi vet inte och vi kommer inte att veta.

- Ett annat berömt Hilbertcitat, från ett radiosänt tal 1930 (står även på hans gravsten): ”*Wir müssen wissen. Wir werden wissen.*”

Några av de mera kända av Hilberts problem:

1. Cantors problem om kontinuums mäktighet.

   Kontinuumhypotesen (CH) säger att en delmängd av **R** som inte är ändlig eller uppräknelig måste ha samma kardinalitet (mäktighet) som **R**, dvs. det finns ingen kardinalitet mellan $\text{card}(\mathbf{N}) = \aleph_0$ och $\text{card}(\mathbf{R}) = \mathfrak{c}$.

   Kurt Gödel (1940): ZFC + CH är motsägelsefritt (om ZCF är det).

   Paul Cohen (1963): ZFC + ¬CH är också motsägelsefritt (om ZCF är det).

   Dvs. CH är *oavgörbar* utifrån ZFC-axiomen!

   (ZF = Zermelo–Fraenkel-mängdlära. ZFC = ZF + urvalsaxiomet, *Axiom of Choice*.)

2. De aritmetiska axiomens motsägelsefrihet.

   Hilbert hade visat att hans geometri är motsägelsefri givet att de reella talen är motsägelsefria. Men hur är det med grundvalarna för aritmetiken egentligen?

   Kurt Gödel (1931): Det går inte att bevisa Peanoaritmetikens motsägelsefrihet inom Peanoaritmetiken själv.

   Gerhard Gentzen (1936): Men det går om man accepterar ”transfinit induktion upp till ordinaltalet ϵ_0” som ett giltigt resonemang.

3. Volymlikheten hos två tetraedrar med samma basyta och höjd.

Känd sats: Ifall två **polygoner i** planet har **samma area**, så kan detta alltid visas genom ”pussling”, dvs. det går att klippa upp den ena i ändligt många delpolygoner som kan sättas ihop till den andra.

Gäller detta även för **polyedrar i rummet** med **samma volym**?

(Eller måste man verkligen ta till **uttömningsmetoden** eller **integration** för att beräkna något så enkelt som **volymen hos en pyramid**?)

Max Dehn (1900): **Nej, det gäller inte.** T.ex. kan en regelbunden tetraeder **inte** delas i ändligt många delpolyedrar som går att pussla ihop till en kub.

8. Primtalsproblem.

- **Riemannhypotesen** om nollställena till Riemanns ζ-funktion.
- **Goldbachs förmodan** att varje jämnt heltal ≥ 4 är summan av två primtal.
- Frågan om det finns oändligt många **primtalstvillingar**.

Ännu olösta! Vissa framsteg har dock gjorts nyligen angående primtalstvillingar:

- **Yitang Zhang** visade 2013 att det finns något $k \leq 70\,000\,000$ sådant att det finns oändligt många primtal som skiljer sig med exakt k.
- Samarbetsprojektet **Polymath8** förbättrade detta till $k \leq 246$.
  (Målet är förstås att komma ner till $k = 2$.)

10. Avgörande av lösbarheten hos en diofantisk ekvation.

Hitta en procedur som avgör i ändligt många steg om ekvationen $p(x_1, \ldots, x_n) = 0$, där p är ett polynom vars koefficienter är heltal, har några lösningar som är heltal.

Flera decenniers samlade ansträngningar (Martin Davis, Julia Robinson, Hilary Putnam, Yuri Matiyasevich, m.fl.) utmynnade 1970 i ett bevis för att det **inte finns** någon sådan algoritm!

(Mer om sådana *oberäkningsbara* problem lite senare, när vi kommer till Alan Turing.)

(Constance Reid, syster till Julia Robinson, har f.ö. skrivit fina biografier över David Hilbert, Richard Courant & Julia Robinson.)

Annat som Hilbert är känd för:

- **Integralekvationer**

  Inspirerat av arbeten av svensken **Ivar Fredholm** (1866–1927, son till Aseas grundare Ludvig Fredholm).

  Axiomatisk metod: abstrahera ut exakt vilka egenskaper som man behöver använda, tag dem som axiom, och studera teorin abstrakt enbart från dessa axiom.

  Ledde till begreppet **Hilbertrum**, extremt viktigt i funktionalanalys.

  T.ex. $\ell^2(\mathbf{R})$, rummet av reella talföljder $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$ sådana att $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ konvergerar. Skalärprodukt: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$.

- **Matematisk fysik**

  Relativitetsteori, kvantmekanik, m.m.

  Skrev välkänd bok om fysikens matematiska metoder ihop med **Richard Courant** (1888–1972).

  Courant var föreståndare 1928–33 för det matematiska institut som grundades i Göttingen, och grundade senare ett liknande forskningsinstitut i New York, numera mycket berömt och omdöpt till *Courant Institute of Mathematical Sciences*.

  (Även tidig ”hemmafilmare”, bl.a. av Hilbert när han skottar snö!)

- **Lösningar till ytterligare några berömda problem**

  Dirichlets princip (partiella differentialekvationer), **Warings problem** (talteori).

- **Metamatematik, matematisk logik**

  Hilberts program var ett projekt för att bygga upp matematiken från grunden via axiom.

  Speciellt: via ”finitistiska” (okontroversiella) resonemang rättfärdiga även de av somliga kritiserade sätten att resonera om ”oändliga” eller ”transcendenta” objekt.

  Motivation: svårigheter inom matematikens grundvalar, spec. mängdlära.

  Russells paradox (1901) visade att man inte kan ta vilken egenskap som helst och bilda ”mängden av alla x som har denna egenskap”: ifall $M = \{x : x \notin x\}$ så gäller ju $M \in M$ om och endast om $M \notin M$, en motsägelse.

  Målet: en axiomatisk teori för hela matematiken, **motsägelsefri** och **fullständig** (dvs. varje påstående kan bevisas eller motbevisas).

  Gödel visade att denna ambition var alltför optimistisk (se nedan)!

- Hilbert förespråkade ett slags **formalism**, filosofin att det är möjligt och önskvärt att reducera all matematik till ”meningslös” manipulation av strängar av symboler, dvs. formler.

- På kollisonskurs med holländaren **L. E. J. Brouwer** (1881–1966), vars filosofi kallas **intuitionism**.

  Matematiska sanningar grundas i vår erfarenhet. De resonemang som är tillämpliga på ändliga objekt är inte giltiga för oändliga objekt, som vi ju inte har någon direkt erfarenhet av.

  Man accepterar inte motsägelsebevis och ”lagen om det uteslutna tredje” för att visa att något existerar ”i princip”; matematiska objekt måste *konstrueras*. (Denna ståndpunkt förargade Hilbert speciellt!)

  Skepsis mot formalisering; det är ju möjligt att det ur matematikerns intuition framspringer nya giltiga sätt att resonera, som inte fångats av formaliseringen.

- Det finns också **platonism** (**realism**) som hävdar att matematiska påståenden är objektivt sanna eller falska, och existerar i en ”idévärld”. Matematikern skapar inte, utan upptäcker bara något som redan finns.

  Brukar anses som en problematisk filosofi, men t.ex. Gödel var benhårt övertygad platonist.

- Göttingen blev ett ledande centrum för matematik, i klass med Paris och Berlin, med en otrolig massa kända matematiker.

  Felix Klein, David Hilbert, Hermann Minkowski, Richard Courant, Emmy Noether, Hermann Weyl, John von Neumann, Edmund Landau, Paul Bernays, Ernst Zermelo, Alonzo Church, Hugo Steinhaus, Carl Runge, Emanuel Lasker, m.fl.

- Likaså för teoretisk fysik!

  Ludwig Prandtl, Peter Debye, Max Born, Werner Heisenberg, Wolfgang Pauli, Eugene Wigner, Pascual Jordan, Paul Ehrenfest, Edward Teller, Robert Oppenheimer, m.fl.

- Allt förstördes fullständigt 1933, då nazisterna avskedade alla judar. Många av forskarna flydde landet, ofta till USA eller Kanada.

- Hilbert blev kvar, och dog obemärkt 1943 under andra världskriget. Omvärlden fick kännedom om detta först flera månader efteråt.

- Det finns många historier om Hilberts tankspriddhet och diverse egenheter. Han gillade att dansa, helst med unga ”flammor”.

  Enda barnet Franz led av mentalsjukdom, vilket Hilbert hade svårt att hantera.

Emmy Noether (1882–1935)

- Dotter till Max Noether, matematiker i Erlangen. Judisk familj.
- Tre yngre bröder med tragiska öden.

  (Mellanbrodern Fritz, också matematiker, flydde från nazisterna till Sovjetunionen 1937, men blev avrättad för ”antisovjetisk verksamhet” 1941.)
- Kvinnor hade ”inofficiellt” rätt att läsa på universitet, om professorn för kursen gav sitt tillstånd. Läste matematik i Erlangen, och även en termin i Göttingen.
- Doktorerade 1907 för Gordan i Erlangen inom ”gammaldags” invariantteori.

  (Gigantiska uträkningar av invarianter för ternära kvartiska former, alltså 3 variabler och grad 4.)
- *Habilitation* tilläts inte för kvinnor, så hon stannade i Erlangen och hjälpte sin far. Publicerade uppmärksammade matematiska arbeten.

- Kom till Göttingen 1915 (under första världskriget) för att hjälpa Hilbert med vissa invariantteoretiska frågor i speciella relativitetsteorin.
- Bevisade **Noethers sats** om sambandet mellan **rörelsekonstanter** och **symmetrier** i teoretisk mekanik.

  (Translationsinvariant system $\Longrightarrow$ rörelsemängden bevaras, osv.)
- *Habilitation* 1919 och jobb som *Privatdozent*, efter lång kamp från Klein och Hilbert. Innan dess hade Hilbert låtit henne få föreläsa genom att annonsera hennes kurser under sitt eget namn.
- Gavs aldrig någon riktig tjänst vid universitetet. Fick hanka sig fram ända till 1933, då hon flyttade till USA.
- Jobb på Bryn Mawr College, ett college för kvinnor i Pennsylvania. Föreläste på Institute of Advanced Study i Princeton.
- Avled oväntat 1935 av komplikationer efter en tumöroperation.

- Emmy Noether var en pionjär inom modern **abstrakt algebra**, bl.a. **ringteori**.

- En **ring** är en matematisk struktur där man kan **addera**, **subtrahera** och **multiplicera**, men inte nödvändigtvis dividera (bara om det råkar gå jämnt ut).

  Exempel på **kommutativa** ringar (där $xy = yx$ alltid gäller):

  - Heltalen $\mathbf{Z}$.

    (Och även $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, men de är inte bara ringar utan t.o.m. **kroppar**, dvs. man kan alltid dividera, förutom med noll såklart.)
  - De gaussiska heltalen $\{a + bi : a, b \in \mathbf{Z}\}$.
  - Mängden av polynom i variablerna $x_1, \dots, x_n$ med koefficienter från någon kommutativ ring A. Betecknas $A[x_1, \dots, x_n]$.

    (T.ex. $\mathbf{R}[x]$ är mängden av vanliga polynom i en variabel, med reella koefficienter, $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d$.)
  - Mängden av alla funktioner som är kontinuerliga på $\mathbf{R}$. Betecknas $C(\mathbf{R})$.

  Exempel på en **icke-kommutativ** ring (där lagen $xy = yx$ inte gäller):

  - $M_n(\mathbf{R})$, mängden av reella $n \times n$-matriser.

- **Ideal** är viktiga i ringteori.

  (Den moderna versionen av de ”ideala tal” som nämndes ovan.)

- Ett **ideal** i en ring R är en delmängd av R som är **sluten under addition och subtraktion**, och **attraherande under multiplikation** (dvs. om någonting i idealet multipliceras med ett ringelement vilket som helst, så kommer alltid produkten att tillhöra idealet också).

- Exempel: ”treans multiplikationstabell”

$$3\mathbf{Z} = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \dots\}$$

  är ett ideal i ringen $\mathbf{Z}$.

  Ringen $\mathbf{Z}$ är av en särskilt enkel typ, på så vis att varje ideal i $\mathbf{Z}$ är just en multiplikationstabell (det är ”genererat av ett enda element k”):

$$k\mathbf{Z} = \{0, \pm k, \pm 2k, \pm 3k, \dots\}.$$

  (Inklusive hela ringen $1\mathbf{Z} = \mathbf{Z}$ själv, och nollidealet $0\mathbf{Z} = \{0\}$.)

- Följande kan göras i varje (kommutativ) ring A:

  Ta ändligt många ringelement $x_1, \ldots, x_n \in A$ och bilda mängden

  $$\{a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n : a_1, \ldots, a_n \in A\}.$$

  Detta blir ett ideal, som sägs vara **ändligt genererat** (av $x_1, \ldots, x_n$).

- I vissa ringar finns även ideal som **inte** är ändligt genererade, t.ex. idealet

  $$\{f \in C(\mathbf{R}) : f(17) = 0\}$$

  i ringen $C(\mathbf{R})$ (kontinuerliga funktioner på $\mathbf{R}$).

- En **noethersk ring** är en ring där **alla** ideal är **ändligt genererade**.

  Sådana ringar spelar en särskilt viktig roll i ringteorin.

- T.ex. såg vi ju tidigare den moderna versionen av **Hilberts bassats**:

  ”Om A är en noethersk ring så är polynomringen $A[x]$ det också.”

Kurt Gödel (1906–1978)

- Tidernas mest framstående logiker.
- Född i Brünn, Österrike–Ungern.

  Nuvarande Brno, Tjeckien.
- Hade bemästrat universitetsmatematiken redan när han gick ut gymnasiet.

  Det ryktades då även att han aldrig hade gjort ett enda grammatikfel på latin under hela skoltiden!
- Började på universitetet i Wien 1923.
- Mest känd för:
  - **Gödels fullständighetssats** (doktorsavhandlingen 1930).
  - **Gödels ofullständighetssats** (1931, ibland uppdelad i ”första” och ”andra” ofullständighetssatsen).

  Mycket förvirrande, eftersom ordet ”fullständighet” här syftar på två helt olika saker!

- Flyttade till USA 1940 (Institute of Advanced Study, Princeton).
- Sägs ha varit en mycket märklig person, och svår att umgås med. Men han var bästis med Albert Einstein i Princeton!
- Led av hypokondri och (med åren tilltagande) paranoia.

  (Trodde att någon ville förgifta honom, och litade bara på mat som hustrun lagat eller provsmakat. När hon hamnade på sjukhus slutade han äta och dog av undernäring; vägde då bara 30 kg.)

Matematisk logik (klassisk predikatlogik)

Formel = sträng av symboler, formad enligt vissa precisa **syntaxregler**.

Denna rappakalja-sträng är inte en formel:

$$x')\forall\neg f\exists\exists\vee y \qquad (\text{"syntax error"})$$

Men den här är okej:

$$\forall x\, \exists y\, (x+5<y)$$

De strängar som syntaxreglerna tillåter är precis ”sådana som är **tänkta att tolkas** som matematiska sant/falskt-påståenden”.

Men det man vill är att reducera matematiska resonemang till ren sträng-hantering, som ska kunna utföras av en ”ointelligent” maskin, som inte har någon kännedom om vad symbolerna ”betyder”.

Tolkning = specifikation av vad man menar med alla symboler.

Logiksymbolerna tolkas alltid på samma sätt:

$\wedge$	och	$\to$	medför
$\vee$	eller	$\leftrightarrow$	om och endast om
$\neg$	icke	$=$	är lika med

Vad gäller $\forall$ och $\exists$ måste man tala om vilken mängd M som åsyftas:

$\forall x$	”för alla $x \in M$ gäller …”
$\exists y$	”för något $y \in M$ gäller …”

Och man måste även ge mening åt övriga symboler:

- Vilket element i M syftar symbolen ”5” på?
- Vilken funktion $M^2 \to M$ syftar symbolen ”+” på?
- Vilken relation i M syftar symbolen ”<” på, dvs. för vilka element a och b i M är predikatet ”$a < b$” sant resp. falskt?

Givet en tolkning kommer varje formel att tilldelas ett sanningsvärde, **sant** (T) eller **falskt** (F).

Vår formel

$$\forall x\, \exists y\, (x + 5 < y)$$

gör en **sann** utsaga om vi exempelvis tolkar den som att den handlar om heltal (dvs. $M = \mathbf{Z}$) och låter symbolerna 5, +, < betyda det som de brukar betyda för heltal:

> ”För varje heltal x finns något heltal y sådant att x plus fem är mindre än y.”

Men den blir **falsk** ifall vi istället låter ”$a < b$” betyda att $a = b^2$:

> ”För varje heltal x finns något heltal y sådant att x plus fem är lika med y i kvadrat.”

En logisk **teori** fås genom att specificera vilka icke-logiska symboler som man tillåter i formlerna, samt tala om vilka formler som tas som **axiom**.

Man anger också vilka **slutledningssteg** som är tillåtna.

Varje sådant steg är en ren stränghanteringsoperation. Formlerna betraktas bara som strängar av symboler, och man opererar på dem enligt vissa strikt specifierade spelregler, utan att bry sig om symbolernas eventuella mening.

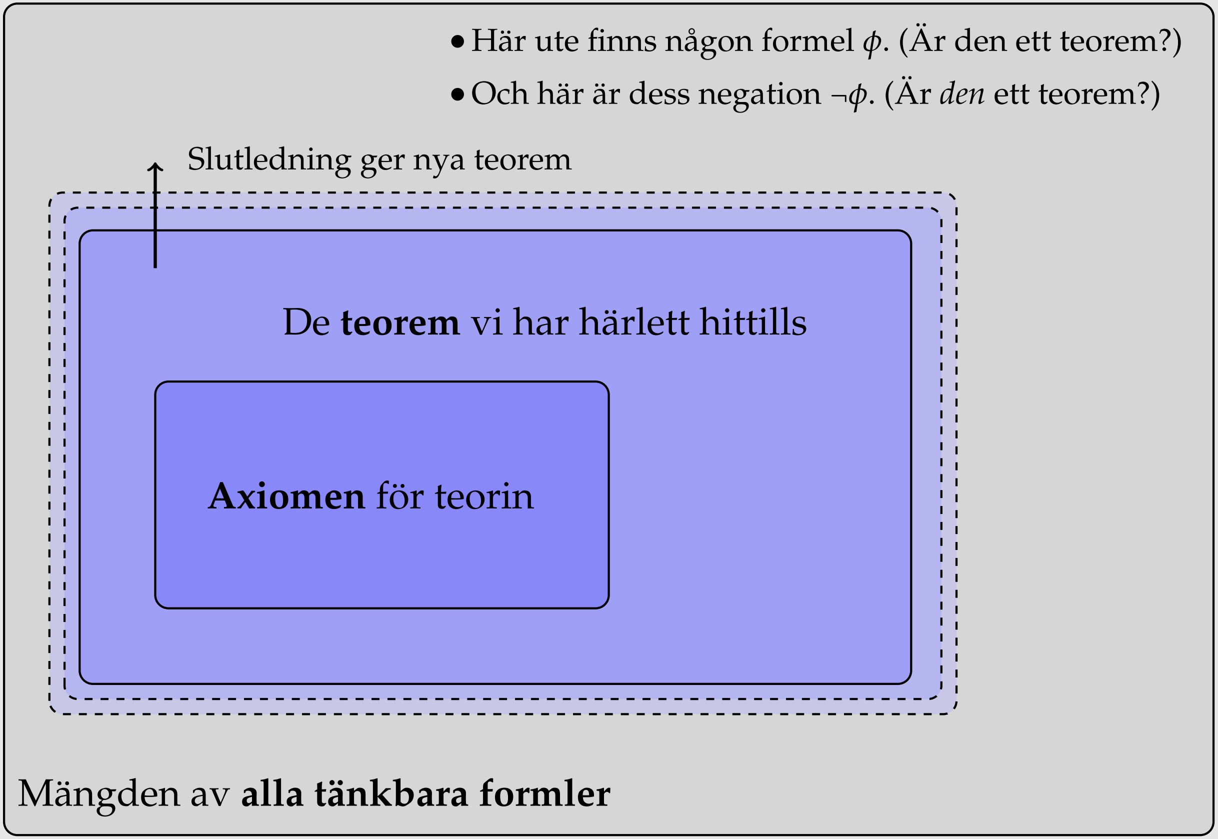
Ett **teorem** i en sådan teori är en formel som antingen själv är ett axiom, eller kan **härledas** från axiomen via ändligt många slutledningssteg.

Ett exempel på en tillåten slutledningsregel (som kallas **modus ponens**) är att om vi vet sedan tidigare att en viss formel med strukturen

$$[\text{någon formel } \phi] \to [\text{någon formel } \psi]$$

är ett teorem, och vi även känner till att formeln ϕ är ett teorem, så kan vi ur detta dra slutsatsen att även formeln ψ är ett teorem.

(”Från $\phi \to \psi$ och ϕ, härled ψ.”)


• Här ute finns någon formel ϕ. (Är den ett teorem?)
• Och här är dess negation $\neg\phi$. (Är *den* ett teorem?)
Slutledning ger nya teorem
De **teorem** vi har härlett hittills
Axiomen för teorin
Mängden av **alla tänkbara formler**

Gödels fullständighetssats handlar om ”semantisk fullständighet”.

Slutledningsreglerna är konstruerade för att vara **logiskt sunda**, dvs. ”bevara sanning”:

> Om man gör en tolkning sådan att alla axiomen får sanningsvärdet **sant**, så kommer också alla härledda teorem i teorin att få sanningsvärdet **sant** i denna tolkning.

Fullständighetssatsen säger att omvändningen också gäller (för den klassiska predikatlogikens slutledningsregler):

> Om en formel är en **semantisk konsekvens** av axiomen, dvs. om den är sann i varje tolkning som gör axiomen sanna, så är den också en **syntaktisk konsekvens** av axiomen, dvs. den går att härleda från dem via ändligt många slutledningssteg.

Gödels ofullständighetssats(er) handlar om ”negationsfullständighet”.

- En logisk teori kallas **(negations)fullständig** om det för varje formel ϕ går att härleda antingen ϕ eller dess negation $\neg\phi$. (Eller båda!)
- En logisk teori kallas **motsägelsefull** ifall det finns en formel ϕ sådan att både ϕ och dess negation $\neg\phi$ kan härledas.

  Ur motsägelsen $\phi \wedge \neg\phi$ kan man sedan härleda *vad som helst*, dvs. i en motsägelsefull teori blir *alla* formler teorem.

  (*Ex falso quodlibet*, ”från det falska (följer) vad som behagas”.)
- En **motsägelsefri** teori är (såklart) en teori som inte är motsägelsefull.

Kom ihåg Hilberts dröm: en logisk teori för hela matematiken, som kan bevisas vara motsägelsefri och negationsfullständig!

Första ofullständighetssatsen:

> En logisk teori som är ”tillräcklig för talteori” kan **inte** samtidigt vara både motsägelsefri och negationsfullständig.

En sådan teori, om den är motsägelsefri, måste alltså ha **oavgörbara** formler, dvs. formler ϕ sådana att **varken** ϕ eller $\neg\phi$ är teorem i denna teori.

(Det finns då någon tolkning sådan att axiomen och ϕ är sanna, och någon annan tolkning sådan att axiomen och $\neg\phi$ är sanna.)

Andra ofullständighetssatsen:

> Sådana teorier kan inte bevisa sin egen motsägelsefrihet.

Gödels ursprungliga bevis, som konstrerar en matematisk version av **lögnarparadoxen ”jag ljuger”**, är inte helt lättgenomträngligt!

Såhär beskrivs det av den svenske logikern **Torkel Franzén** (1950–2006) i boken *Gödel's Theorem. An Incomplete Guide to Its Use and Abuse*:

Gödel established the existence of such fixpoints by translating a statement that “says of itself that it has property P” into arithmetic. For this, he used a construction which in ordinary (or not so ordinary) language can be formulated as

> The result of substituting the quotation of “The result of substituting the quotation of x for ‘x’ in x has property P.” for ‘x’ in “The result of substituting the quotation of x for ‘x’ in x has property P.” has property P.

Senare har man hittat enklare argument via teorin för beräkningsbarhet. (T.ex. kan man använda lösningen av Hilberts tionde problem för att bevisa ofullständighetssatsen.)

Gödels arbete om ofullständighet har titeln *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme*, dvs. ”Om formellt oavgörbara satser i Principia Mathematica och besläktade system”.

Principia Mathematica är ett mastodontverk i tre volymer av **Bertrand Russell** (1872–1970) och **Alfred North Whitehead** (1861–1947) med syftet att lägga en axiomatisk grund för hela matematiken.

Ökänt för snårig notation! Efter c:a 360 sidor i volym 1 kommer följande passage:

$*54{\cdot}43.\quad \vdash :. \alpha, \beta \in 1 . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$$\vdash . *54{\cdot}26 . \supset \vdash :. \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . x \neq y .$$

$$[*51{\cdot}231] \qquad \equiv . \iota`x \cap \iota`y = \Lambda .$$

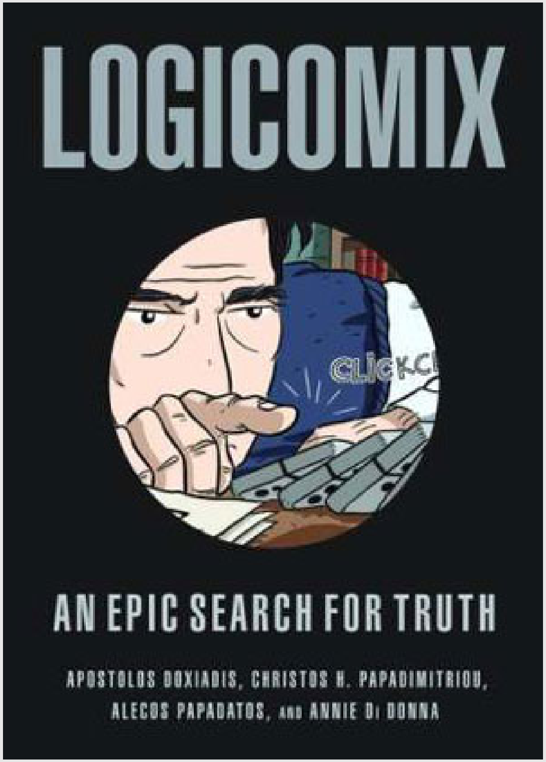
$$[*13{\cdot}12] \qquad \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (1)$$

$$\vdash . (1) . *11{\cdot}11{\cdot}35 . \supset$$

$$\vdash :. (\exists x, y) . \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (2)$$

$$\vdash . (2) . *11{\cdot}54 . *52{\cdot}1 . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$.



I seriealbumet **Logicomix** (2008) kan man läsa mer om detta.

Bertrand Russell är huvudperson, och många andra filosofer och matematiker figurerar också.

(Notera dock att historien har ”förbättrats” lite, t.ex. genom att låta vissa personer träffas i boken fastän de aldrig gjorde det i verkligheten. Och förklaringen av Gödels ofullständighetssats i appendix är helt fel…)

Alan Turing (1912–1954)

- Pionjär inom teoretisk datavetenskap.
- Född i London.
- Student och senare *fellow* vid King's College, Cambridge.
- Epokgörande arbete 1936 om Turingmaskiner.
  (”On Computable Numbers, with an Application to the *Entscheidungsproblem*”)
- Jobbade i Bletchley Park under andra världskriget och spelade en viktig roll i knäckandet av tyskarnas *Enigma*-krypto.
  Spelas av Benedict Cumberbatch i filmen *The Imitation Game* (2014).
- Dömdes 1951 för ”gross indecency” (homosexuella relationer) till kemisk kastrering.
- Död 1954 i hemmet av cyanidförgiftning (självmord?).
- Offentlig ursäkt från brittiska regeringen 2009.
  ”Alan Turing-lagen” från 2017 benådar retroaktivt alla sådana ”brott”.

Beräkningsbarhet

- Vad innebär det att kunna **beräkna** något?
- Vi räknar för hand genom att skriva och radera symboler på ett (rutat) papper. För teoretiska syften antar vi att vi har tillgång till obegränsat mycket papper och blyerts!
- En **Turingmaskin** är en teoretisk idealisering av en sådan räknande person, en tänkt maskin som för enkelhets skull har en endimensionell rutad pappersremsa (av obegränsad längd) istället för ett tvådimensionellt pappersark, och kan läsa och skriva symboler på denna remsa, och gör detta enligt en förprogrammerad ändlig lista av instruktioner i stil med ”om symbolen i nuvarande ruta är en trea, byt ut den mot en femma, flytta läshuvudet till nästa ruta till höger, och hoppa till instruktion nummer 15”.
- Det är allmänt accepterat (**Churchs tes**) att de (heltals)funktioner som kan anses ”möjliga att beräkna” är precis de som man kan programmera en Turingmaskin att räkna ut.

En modell som påminner mer om en vanlig dator, och som leder till samma klass av beräkningsbara funktioner som Turingmaskinen, är **registermaskinen**.

- En registermaskin har ett uppräkneligt antal register (minnesceller) $X_1, X_2, \ldots$ som vart och ett kan lagra ett naturligt tal.

- Ett program består av en ändlig följd av instruktioner av följande fyra typer:

  1. Nollställ X_k.
  2. Öka X_k med 1.
  3. Kopiera X_j till X_k.
  4. Om $X_i = X_j$, hoppa till instruktion nummer k i programmet.
     (Ta $i = j$ för att göra ett ovillkorligt hopp.)

  Förutom vid explicita hopp fortsätter man till nästa instruktion. Programmet terminerar om det inte finns någon mer instruktion (eller om man försöker hoppa till en instruktion som inte finns).

- Indata till programmet är det initiala innehållet i registren.

- Utdata är registrerinnehållet när programmet terminerar. (*Om* det terminerar!)

Givet ett program och ett heltal $n \geq 1$, definieras en funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ på följande sätt:

- För att få reda på vilket utdatavärde $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{N}$ som motsvarar vissa indata $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{N}^n$, sätt registren till $(x_1, \ldots, x_n, 0, 0, 0, \ldots)$ och kör programmet.

- Ifall programmet terminerar, tag det tal som då är i register X_1 och låt $f(x_1, \ldots, x_n)$ få detta värde.

- Ifall programmet **inte** terminerar, låt $f(x_1, \ldots, x_n)$ vara **odefinierat**.

- Definitionsmängden $D_f \subseteq \mathbf{N}^n$ består alltså av exakt de indata som gör att programmet terminerar.

Definition: En funktion

$$f: D_f \to \mathbf{N}, \qquad D_f \subseteq \mathbf{N}^n$$

kallas **beräkningsbar** om den ges av något registermaskinprogram på ovanstående sätt.

- Ett givet program definierar en viss funktion av n variabler för varje $n \geq 1$. Men flera olika program kan naturligtvis beräkna samma funktion.
- Hur som helst är antalet program uppräkneligt, och därmed är också antalet beräkningsbara funktioner uppräkneligt.
- Däremot är redan antalet funktioner $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ överuppräkneligt, enligt Cantors diagonalargument, så ”de flesta” funktioner är **inte** beräkningsbara.

  (Givet en lista av funktioner $(f_0, f_1, \ldots)$ så kommer $g(k) = f_k(k) + 1$ att definiera en funktion g som inte är med på listan, eftersom den skiljer sig från varje f_k på minst ett ställe.)

- Jaha, det finns alltså massor av funktioner som inte går att beräkna. Kan man hitta något **explicit exempel**?

- Ja, Turing gav ett sådant exempel (se nästa sida), med en intressant teoretisk konsekvens.

  Säg att man sitter och väntar på ett program som man har kört igång. Då kan man (i allmänhet) inte veta ifall det kommer att bli färdigt snart, eller om 10^{100} år, eller aldrig.

  Tänk vad praktiskt om man kunde skriva ett program som kan analysera andra program och *i förväg* avgöra om de kommer att terminera eller gå in i en evig loop.

  Vad Turing visade var att detta är omöjligt!

- Ett **predikat** $P(x_1, \ldots, x_n)$ är en funktion som bara kan anta värdena **falskt** eller **sant** (dvs. talen 0 resp. 1), och som är definierad för alla indata.
- Eftersom antalet program är uppräkneligt kan vi ge varje program ett nummer, och sedan definiera följande predikat:

$$\textsc{halt}(x, y) = \text{program nummer } x \text{ terminerar när det körs med indata } y.$$

- **Sats (Turing):** Predikatet HALT är **inte** en beräkningsbar funktion.

Bevis: Låt $P(x, y)$ vara ett godtyckligt **beräkningsbart** predikat, och sätt

$$g_P(x) = \begin{cases} 0, & \text{om } P(x,x) \text{ är falskt,} \\ \text{odef. (dvs. evig loop),} & \text{om } P(x,x) \text{ är sant.} \end{cases}$$

Denna funktion är beräkningsbar; vi kan lätt skriva ett program för g_P givet ett program som beräknar P. Säg att detta program för g_P har nummer M_P i vår uppräkning av alla program. Definitionen av $g_P(x)$ med $x = M_P$ insatt säger att om $P(M_P, M_P)$ är falskt så kommer program nummer M_P att terminera när det körs med indata M_P, och om $P(M_P, M_P)$ är sant så kommer det inte att terminera. Med andra ord: $P(M_P, M_P)$ är sant om och endast om HALT(M_P, M_P) är falskt, så HALT $\neq P$. Eftersom HALT är skilt från varje beräkningsbart predikat måste det vara oberäkningsbart.

(Cantors diagonalargument igen!)

- Turing var även intresserad av matematisk biologi mot slutet av sitt liv.

- Han upptäckte fenomenet **diffusiv instabilitet** (även kallat **Turing-instabilitet**). Har bl.a. använts för att ge en (spekulativ) förklaring av varför prickiga djur ofta har randiga svansar, men nästan aldrig tvärtom!

Diffusion är en effekt som vanligen **stabiliserar**, dvs. utjämnar koncentrationsskillnader på olika ställen i rummet, men ifall man har två olika substanser som reagerar med varandra, och de har olika diffusionshastighet, så kan närvaron av diffusion (under vissa förutsättningar) faktiskt bidra till att **instabilisera** en situation som vore stabil i frånvaron av diffusion; störningar av viss våglängd förstärks istället för att släckas ut.

Om det är så att pälsens pigmentfärg avgörs av koncentrationen hos någon (hypotetisk) kemikalie under fosterstadiet, så kan diffusiv instabilitet göra att koncentrationen av denna kemikalie inte är jämn, utan ”går i vågor”.

Och på en stor kroppsyta finns det plats för vågor att gå både i x-led och i y-led, vilket ger ett prickigt interferensmönster, men i en smal svans har vågorna bara plats att gå längs med, så då blir det randigt!

Ramanujan (1887–1920)

- Låt oss backa lite i tiden, till den kanske märkligaste matematikern någonsin!
- Uppvuxen i vad som nu är delstaten Tamil Nadu i sydöstra Indien.
- Hans namn är rätt och slätt Ramanujan, ”lillebror till guden Rama”.

  För att skilja från andra med samma namn brukade man ange faderns initial: ”S. Ramanujan” från faderns namn ”Srinivasa”.

  Ibland anges även Iyengar, som är en kastbeteckning: ”Srinivasa Ramanujan Iyengar”.
- Huvudsakligen självlärd, från *A Synopsis of Elementary Results in Pure and Applied Mathematics* av G. S. Carr (två volymer 1880/1886), en gigantisk formelsamling som han fått tag i på biblioteket.

- Kuggade i allt utom matematik i college, och kom därför inte in på universitetet.
- Försörjde sig med att jobba med bokföring, och arbetade med sin matematik på fritiden.
- Försökte kontakta några engelska matematiker, men fick inget napp förrän han 1913 skrev till **G. H. Hardy** (1877–1947), analytiker och talteoretiker i Cambridge, och bifogade några sidor med smakprov på de resultat han funnit (utan några bevis).
- Hardy beskriver det hela i en minnesartikel publicerad 1937 i *The American Mathematical Monthly*:

  Ramanujan's letters to me, which are reprinted in full in the *Papers*, contain the bare statements of about 120 theorems, mostly formal identities extracted from his note-books. I quote fifteen which are fairly representative. [...]

$$(1) \qquad 1 - \frac{3!}{(1!2!)^3}x^2 + \frac{6!}{(2!4!)^3}x^4 - \cdots$$
$$= \left(1 + \frac{x}{(1!)^3} + \frac{x^2}{(2!)^3} + \cdots\right)\left(1 - \frac{x}{(1!)^3} + \frac{x^2}{(2!)^3} - \cdots\right)$$

(7) If $\alpha\beta = \pi^2$, then

$$\alpha^{-1/4}\left(1 + 4\alpha \int_0^\infty \frac{x\,e^{-\alpha x^2}}{e^{2\pi x} - 1}\,dx\right) = \beta^{-1/4}\left(1 + 4\beta \int_0^\infty \frac{x\,e^{-\beta x^2}}{e^{2\pi x} - 1}\,dx\right)$$

(12)
$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1 + \cfrac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{1 + \cdots}}} = \left(\frac{\sqrt{5}}{1 + \sqrt[5]{5^{3/4}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) - 1}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) e^{2\pi/\sqrt{5}}$$

I should like you to begin by trying to reconstruct the immediate reactions of an ordinary professional mathematician who receives a letter like this from an unknown Hindu clerk.

The first question was whether I could recognize anything. I had proved things rather like (7) myself. [...]

The series formulas (1)–(4) [...] are much harder than they look. [...]

[...] but (10)–(12) defeated me completely; I had never seen anything in the least like them before. A single look at them is enough to show that they could only be written down by a mathematician of the highest class. They must be true because, if they were not true, no one would have had the imagination to invent them.

- Hardy lyckades, med hjälp av sin kollega **E. H. Neville** (1889–1961) som 1914 var i Madras och föreläste, övertala Ramanujan att komma till Cambridge.

  (Att åka utomlands var ”förorenande” och Ramanujan riskerade att bli betraktad som kastlös vid hemkomsten.)

- Ramanujan arbetade där ihop med Hardy och dennes parhäst **John Edensor Littlewood** (1885–1977).

  Det var inte helt enkelt för dem att förstå hur han tänkte. . . Enligt Ramanujan kom gudinnan Namagiri till honom i drömmen och gav honom formlerna!

  As Littlewood says “the clear-cut idea of what is *meant* by a proof, nowadays so familiar as to be taken for granted, he perhaps did not possess at all; if a significant piece of reasoning occurred somewhere, and the total mixture of evidence and intuition gave him certainty, he looked no further”.

- Notis i Svenska Dagbladet 1 maj 1914:

  Ett matematiskt geni. Vid Cambridges universitet väcker för närvarande en ung hindu Ramanujan stort uppseende, då han utan någon högre utbildning kan lämna prof på djupa insikter i matematiken. Han härstammar från Madras och är 26 år gammal. Den unge mannen har endast fått den i Indien vanliga skolutbildningen och har aldrig studerat vid universitetet i Madras. Ända till för ett par år sedan innehade han en anspråkslös kontorsplats.

  För ett och ett halft år sedan skref Ramanujan till en professor i Cambridge, omtalade sina matematiska studier och sände honom en del lösningar af problem, som särskildt berörde talteorien och de elliptiska funktionerna. Många af lösningarna voro alldeles nya, andra voro redan funna, utan att den unge hinduen kände till det. Han har endast mycket ringa kunskap om den moderna matematiken och om de senaste trettio årens arbeten på detta område, men har på egen hand uppnått resultat, som de stora matematikerna under de senaste århundradena uppnått.

  Nu har Ramanujan kommit till England för att bringa sin genialiska begåfning till full utveckling genom systematiska studier. Medan han redan sysselsatt sig med de högsta problemen och funnit egna lösningar, står han i elementerna tillbaka för de yngsta studenterna. När han afslutat sina studier, tror man sig kunna vänta stora ting af honom.

- Ramanujan hade haft hälsoproblem redan i Indien, och blev sjuk igen 1917. Förvärrat av vitaminbrist, eftersom det var svårt att få tag i bra vegetarisk mat i krigstidens Cambridge.

  He was an orthodox high-caste Hindu, and always adhered (indeed with a severity most unusual in Indian residents in England) to all the observances of his caste. He had promised his parents to do so, and he kept his promises to the letter. He was a vegetarian in the strictest sense – this proved a terrible difficulty later when he fell ill – and all the time he was in Cambridge he cooked all his food himself, and never cooked it without first changing into pyjamas.

- Invaldes 1918 som *fellow* både i Royal Society och Trinity College.
- Tillbringade flera år på olika sjukhem i England. Återvände till Indien i mars 1919, och avled i april 1920.

- Ramanujan publicerade en hel del, men efterlämnade också mycket opublicerat material som senare matematiker har analyserat.

  Ramanujan's Notebooks, 5 volymer (1985–98).

  Ramanujan's Lost Notebook, 4 volymer (2005–13).

- En stor del av hans formler är återupptäckter av tidigare resultat (okända för honom pga. bristande utbildning), medan annat är fullständigt originellt och unikt.

  En del är också fel, särskilt inom talteori, där man lätt kan bli lurad av exempel. (Det minsta motexemplet kan vara astronomiskt stort.)

- I filmen *The Man Who Knew Infinity* (2015) spelas Ramanujan av Dev Patel och G. H. Hardy av Jeremy Irons.

Paul Erdős (1913–1996)

Paul Erdős med en tioårig **Terence Tao** (f. 1975) från Australien ("matematikens Mozart", Fieldsmedaljen 2006).

- Mycket produktiv och excentrisk ungersk matematiker.
- Publicerade över 1500 artiklar, med över 500 medförfattare, som sägs ha **Erdőstal 1** (eller ibland $\frac{1}{n}$ om de har n gemensamma artiklar med Erdős); deras medförfattare har sedan **Erdőstal 2**, osv.
- Mest aktiv inom diskret matematik (kombinatorik, grafteori, talteori, diskret sannolikhetslära).

  Älskade att lösa problem och formulera hypoteser. Samt utlysa penningbelöningar för lösningar!

- Utbildad i Ungern. Postdoc i Cambridge 1934.
- Flydde till USA 1938 (han var av judisk familj).
- Diverse tillfälliga jobb. Nekades återinträde till USA 1954 efter en konferensresa till Europa.
- Inledde då en kringresande livsstil utan fast hem, som fortsatte resten av hans liv.
- Knackade på hos matematiker som han kände, och förkunnade:

  –My brain is open!

  Jobbade med dem så länge de stod ut med att han bodde där, och reste sedan vidare till någon annan.

  –Another roof, another proof!

- Kunde jobba långa perioder i sträck, med hjälp av stora doser starkt kaffe och *Benzedrine* (amfetamin!).
- Följande aforism av kollegan **Alfréd Rényi** (1921–1970) tillskrivs ofta felaktigt Erdős:

  > A mathematician is a machine for turning coffee into theorems.

  (Erdős: Amerikanskt blaskigt kaffe duger dock bara till lemman!)
- Prestigelös för det mesta. Dock inblandad in en berömd kontrovers med norrmannen **Atle Selberg** (1917–2007) angående upptäckten 1949 av ett elementärt bevis (dvs. utan komplex analys) av **primtalssatsen**: antalet primtal $\leq n$ är ungefär $n/\ln n$.

Liten ordlista över ”erdősiska”

epsilon	barn
noise	musik
poison	alkohol
get captured	gifta sig
bosses	hustrur
slaves	makar
trivial beings	icke-matematiker
dead	har slutat med matematik
preach	föreläsa
Sam & Joe	USA (onkel Sam) & Sovjetunionen (Josef Stalin)
on the long wavelength	kommunist (dvs. röd)
study Jordan’s theorem	sitta i fängelse
SF (the Supreme Fascist)	Gud
The Book	Guds bok med de optimala bevisen

(”You don’t have to believe in God, but you should believe in The Book.”)

Sats (Erdős & Szekeres 1935): Varje permutation av längd $N > rs$ måste innehålla antingen en växande delföljd av längd $> r$ eller en avtagande delföljd av längd $> s$.

Bevis (från The Book): Låt $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N)$ vara en permutation av talen $(1, 2, \ldots, N)$.

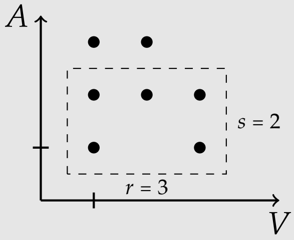
Låt V_i vara längden av den längsta *växande* delföljden som slutar med σ_i, och A_i längden av den längsta *avtagande* delföljden som slutar med σ_i.

Exempel, med $N = 7 > 3 \cdot 2$:

i	1	2	3	4	5	6	7
σ_i	5	2	4	1	3	7	6
V_i	1	1	2	1	2	3	3
A_i	1	2	2	3	3	1	2

Paren (V_i, A_i) är alla olika, för om man jämför (V_j, A_j) med (V_i, A_i) för $j > i$ så kommer minst en av olikheterna $V_j > V_i$ och $A_j > A_i$ att gälla. (Om $\sigma_j > \sigma_i$ kan man ju förlänga den växande delföljden, och om $\sigma_j < \sigma_i$ kan man förlänga den avtagande delföljden.)

De $N > rs$ punkterna $(V_1, A_1), \ldots, (V_N, A_N)$ ryms därför ej i en $r \times s$-rektangel:



Så någon punkt måste ligga utanför, dvs. något $V_i > r$ eller något $A_i > s$.

”Nicolas Bourbaki”

- Pseudonym för en grupp franska matematiker:

  André Weil (1906–1998)
  Jean Dieudonné (1906–1992)
  Henri Cartan (1904–2008)
  m.fl.

- Grundades 1934 i Paris.

- Producerade bokserien *Éléments de mathématique*, med målet att täcka alla huvudområden i modern matematik på ett grundligt, axiomatiskt och abstrakt sätt.

  (Efter ett långt uppehåll återupptogs aktiviteten, och den senast utgivna boken kom 2016.)

- Inflytelserika vad gäller notation och terminologi.

Alexander Grothendieck (1928–2014)

- Legendarisk matematiker i den abstrakta Bourbaki-traditionen, något av en Messias-gestalt i vissa kretsar.
- Född i Berlin. Föräldrarna anarkister som flydde från nazisterna till Paris 1933.
- Lämades hos en bekant i Hamburg, kom till Paris 1938.
- Fadern (jude) utlämnades av Vichy-regimen till tyskarna och dog i Auschwitz. Även Alexander och hans mor satt i diverse fångläger.
- Efter kriget studier på olika franska universitet. En period i USA.
- 1958 jobb på IHÉS (Institut des hautes études scientifiques), nyligen grundat forskningsinstitut söder om Paris.

  Intensiv seminarieverksamhet med många hängivna ”lärjungar”.

- Verksam inom algebraisk geometri, talteori, m.m.

  I algebraisk geometri spelar **polynomringar** en viktig roll, och i algebraisk talteori studerar man **talringar**.

  Grothendiecks teori för **scheman** förenar dessa ämnen på ett sätt som gör att man kan föra geometriska resonemang i talteori, och har revolutionerat grundvalarna för den algebraiska geometrin.

  (Och detta är bara en av hans otroligt många nyskapande idéer.)

- Extremt abstakt, men också extremt vackert, säger de som förstår!

  Enligt **Pierre Deligne**, känd belgisk matematiker, består ett typiskt Grothendieck-bevis av en lång serie triviala steg där inget verkar hända, men på slutet uppstår ändå ett djupt icke-trivialt resultat.

  Grothendieck har själv liknat sitt angreppssätt vid att knäcka en nöt genom att låta den ligga i blöt i vatten tills tiden är mogen och man kan skala den som en avokado.

- Legenden om ”Grothendieck-primtalet”

  Någon bad honom en gång att exemplifiera ett abstrakt påstående genom att förklara vad det ville säga för något konkret primtal.

  Grothendieck: ”Nåväl, ta t.ex. 57…”

- Politisk aktivist (pacifist).
- Fieldsmedaljen 1966. Accepterade utnämningen, men vägrade åka till matematikerkongressen i Moskva för att ta emot medaljen.
- Föreläste i Hanoi mitt under USA:s bombningar 1967, i protest mot Vietnamkriget.
- Sade upp sig från IHÉS c:a 1970.

  (Protesterade mot finansiering från militären. Kanske utarbetad också?)
- Återvände som professor i Montpellier efter några år, men publicerade inte så mycket konventionell matematik därefter.

  (Självbiografi, programförklaringar, mysticism, . . .)
- Flyttade 1991 till hemlig ort i Pyrenéerna i södra Frankrike, där han bodde till sin död 2014, nästan helt utan kontakt med omvärlden.

John Horton Conway (f. 1937)

- Brittisk matematiker, i Cambridge till 1987, därefter Princeton (USA).
- Har ägnat en stor del av sin karriär åt att sitta i allrummet på jobbet och spela spel…

  Med fullständigt häpnadsväckande resultat!

- Biografi *Genius at Play* (2015) av Siobhan Roberts.

  "An unabashed original, John Horton Conway is Archimedes, Mick Jagger, Salvador Dalí, and Richard Feynman all rolled into one – a singular mathematician with a rock star's charisma, a sly sense of humor, a polymath's promiscuous curiosity, and a burning desire to explain everything about the world to everyone in it."

Några av Conways påhitt

- **Game of Life**, en s.k. *cellulär automat*.

  (Blev en stor fluga pga. Martin Gardner, *Scientific American*, okt 1970.)

  Äger rum på ett oändligt stort kvadratiskt rutnät, där varje ruta (cell) kan vara antingen ”levande” eller ”död”. Vid varje tidssteg händer följande:

  - Levande cell överlever omm den har exakt 2 eller 3 levande grannar (av 8).
  - Död cell blir levande omm den har exakt 3 levande grannar.

  Ange en startkonfiguration, sätt igång, och se vad som händer! [copy.sh/life]

  (Game of Life är **Turingfullständigt**, dvs. kan beräkna allt som en Turingmaskin kan beräkna!)

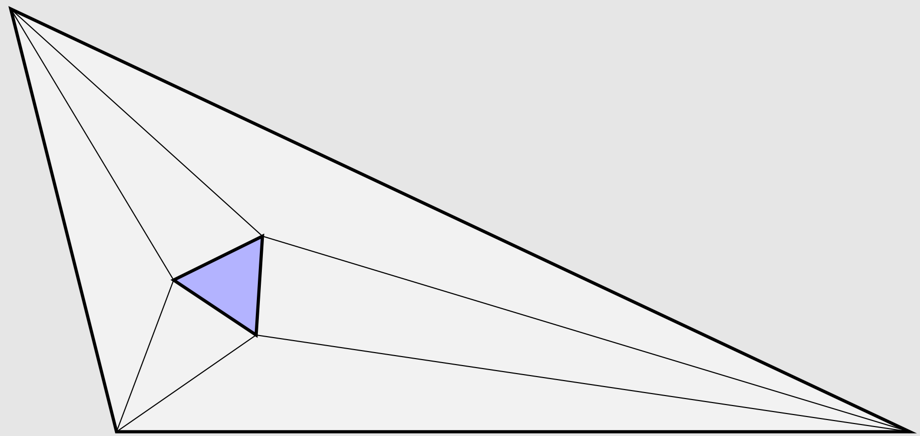
- Smart **notation** för diverse saker.

  - De 17 symmetrigrupperna i planet, som beskriver ”möjliga typer av tapetmönster”, samt motsvarande grupper i sfärisk och hyperbolisk geometri.

    (Föreläste om detta i Linköping 1995, på föreläsningsturné i KVA:s regi.)
  - Knutar och ”trassel” (*tangles*).
  - Polyedrar.
  - Gigantiska heltal (Conways pilnotation).

- Det **surrella talsystemet** (via **kombinatorisk spelteori**).
- Enkelt bevis för **Morleys trisektrissats** (c:a 1900).

”Där trisektriserna i en triangel möts bildas en **liksidig** triangel.”



Ökänt besvärlig att visa, tills Conway fann beviset från The Book c:a 1995.

- **FRACTRAN**, ännu ett Turingfullständigt programmeringsspråk.

Conway: ”Man kan lära sig hela dess syntax på 10 sekunder.”

  - Ett FRACTRAN-program består av en ändlig lista av positiva bråk.
  - Indata: ett positivt heltal n.
  - Ett programsteg består i att uppdatera n, genom att ta det första bråket Q i listan för vilket nQ är ett heltal, och byta ut n mot detta heltal.

    (Programmet terminerar ifall det inte finns något sådant bråk Q.)

Exempel: Om man kör programmet

$$\left(\frac{17}{91}, \frac{78}{85}, \frac{19}{51}, \frac{23}{38}, \frac{29}{33}, \frac{77}{29}, \frac{95}{23}, \frac{77}{19}, \frac{1}{17}, \frac{11}{13}, \frac{13}{11}, \frac{15}{2}, \frac{1}{7}, \frac{55}{1}\right)$$

med startvärde $n = 2$ så får man successivt

$$n = 15, 825, 725, 1925, 2275, 425, 390, 330, 290, 770, \ldots,$$

och om man från denna följd tar bort alla tal som inte är tvåpotenser får man kvar (i tur och ordning)

$$2^2, 2^3, 2^5, 2^7, 2^{11}, 2^{13}, 2^{17}, \ldots$$

Primtalen!

- **The look-and-say sequence** är

$$1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, 13112221, 1113213211, \ldots$$

(”En etta”, ”två ettor”, ”en tvåa & en etta”, ”en etta & en tvåa & två ettor”, osv.)

Analyseras i en artikel av Conway från 1986 med den fantastiska titeln

The Weird and Wonderful Chemistry of Audioactive Decay.

Conways kosmologiska sats säger att vilken sträng av heltal man än börjar med, så kommer den så småningom att sönderfalla (”audioaktivt”) i delsträngar som sedan inte påverkar varandras fortsatta utveckling.

Det finns exakt 92 stycken olika ”odelbara” strängar som utgör byggstenar i denna process. Dessa ”atomer” innehåller bara siffrorna 1, 2 och 3, och är namngivna efter hur vanligt förekommande de är (relativa frekvenser i långa loppet).

Ovan var vi framme vid 11132|13211, som består av hafnium 11132 & tenn 13211.

Undantag: Man kan aldrig bli av med ett tal $n \geq 4$ ifall det är med från början, så det finns också två ”transuraner” som förekommer i olika ”isotoper”:

nr. 93	neptunium	$1311222113321132211221121332211n$
nr. 94	plutonium	$31221132221222112112322211n$

Alla exotiska ämnen som inte finns i periodiska systemet, t.ex. de sju första strängarna ovan, försvinner efter ändligt många steg. (Svårt att bevisa!)

Om L_n är strängens längd efter n steg, så är

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} = \lambda \approx 1{,}303577$$

där λ är det enda positiva nollstället för polynomet

$$\begin{aligned} p(x) = {} & x^{71} - x^{69} - 2x^{68} - x^{67} + 2x^{66} + 2x^{65} + x^{64} - x^{63} - x^{62} - x^{61} - x^{60} - x^{59} + 2x^{58} \\ & + 5x^{57} + 3x^{56} - 2x^{55} - 10x^{54} - 3x^{53} - 2x^{52} + 6x^{51} + 6x^{50} + x^{49} + 9x^{48} - 3x^{47} \\ & - 7x^{46} - 8x^{45} - 8x^{44} + 10x^{43} + 6x^{42} + 8x^{41} - 5x^{40} - 12x^{39} + 7x^{38} - 7x^{37} + 7x^{36} \\ & + x^{35} - 3x^{34} + 10x^{33} + x^{32} - 6x^{31} - 2x^{30} - 10x^{29} - 3x^{28} + 2x^{27} + 9x^{26} - 3x^{25} \\ & + 14x^{24} - 8x^{23} - 7x^{21} + 9x^{20} + 3x^{19} - 4x^{18} - 10x^{17} - 7x^{16} + 12x^{15} + 7x^{14} + 2x^{13} \\ & - 12x^{12} - 4x^{11} - 2x^{10} + 5x^9 + x^7 - 7x^6 + 7x^5 - 4x^4 + 12x^3 - 6x^2 + 3x - 6. \end{aligned}$$

Förklaring: Sönderfallet beskrivs av en ”övergångsmatris” av storlek 92×92, som har det karaktäristiska polynomet

$$x^{18}(x+1)(x-1)^2 p(x).$$

- **Conways domedagsalgoritm** ger veckodagen för ett givet datum.

  Domedagen för ett givet år är **sista februari**.

  På samma veckodag som Domedagen infaller 4/4, 6/6, 8/8, 10/10, 12/12 samt 9/5, 5/9, 7/11, 11/7.

  Domedagen för år **1900** var en **onsdag**, år **2000** var det en **tisdag**.

  (Minnesregler: ”working 9 to 5 at the 7-Eleven”, ”we-in-this-day”, ”two's-day”.)

  Vart år avancerar domedagen **ett steg**, plus **ett extra steg** vart fjärde år (skottår).

  På fyra år blir det sammanlagt $1 + 1 + 1 + 2$ steg, alltså **fem steg** (eller -2).

  Och på tolv år blir det $3 \cdot 5 = 14 + 1$, alltså **ett steg**.

  Exempel: Min födelsedag **15 april 1970** var en **onsdag**.

  Domedagen år $1970 = 1900 + 5 \cdot 12 + 2 \cdot 4 + 2$ inföll ju en

  $$\textbf{onsdag} + 5 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 2 = \boxed{\textbf{lördag}}.$$

  Alltså var även 4 april 1970 en **lördag**. Och från 4 till 15 april är det $11 = 7 + 4$ dagar, alltså var 15 april 1970 en $\textbf{lördag} + 4 = \boxed{\textbf{onsdag}}$.

De mest kända svenska matematikerna på 1900-talet

- **Arne Beurling** (1905–1986)

  Professor i Uppsala 1937–1954. Sedan Institute of Advanced Study i Princeton, där han fick Einsteins gamla kontor.

  Arbetade inom matematisk analys. Knäckte 1940 tyskarnas *Geheimfernschreiber*.

  (Har ett seminarierum på MAI uppkallat efter sig.)

- **Lennart Carleson** (f. 1928)

  Elev till Beurling i Uppsala (doktorerade 1950).

  Professor på Uppsala universitet, KTH, UCLA.

  ”Problemlösare.” Har knäckt många svåra berömda problem i matematisk analys.

  Wolfpriset 1992, Abelpriset 2006.

  (Handledare för Lars Inge Hedberg, Gunnar Aronsson och Thomas Kaijser, MAI.)

- **Lars Hörmander** (1931–2012)

  Doktorerade i Lund 1955.

  Stockholm, Stanford, Princeton. Sedan professor i Lund från 1968 till pensionen.

  ”Teoribyggare.” *The Analysis of Linear Partial Differential Operators* (fyra volymer).

  Fieldsmedaljen 1962, Wolfpriset 1988.

  (Handledare för Arne Enqvist, MAI.)

Till slut: några gamlingar

- **Leopold Vietoris** (1891–202), 110 år

  Mayer–Vietoris' sats i algebraisk topologi. Österrikes äldste någonsin!

- **Henri Cartan** (1904–2008), 104 år

  Också algebraisk topologi. Bourbakist. Son till matematikern Élie Cartan.

- **Paul Montel** (1876–1975), 98 år

  Komplex analys, begreppet **normal familj**. Handledare till H. Cartan m.fl.

- **Dirk Struik** (1894–2000), 106 år

  Holländare verksam i USA. Kända böcker i differentialgeometri och matematikhistoria. (Och marxistisk teori.)

- **Jacques Hadamard** (1865–1963), 97 år

  Mångsidig fransk matematiker. Visade primtalssatsen 1896.
  Biografi (1998) av Vladimir Mazya och Tatiana Shaposhnikova, MAI.

- **Charles Jean de la Vallée-Poussin** (1866–1962), 95 år

  (Charles Jean Étienne Gustave Nicolas Le Vieux, Baron de la Vallée Poussin!)
  Belgare, som också visade primtalssatsen 1896.

- **George Pólya** (1887–1985), 97 år

  Ungersk-amerikansk matematiker.

  Hans bok *How to Solve It* (1945) om systematiska problemlösningstekniker har översatts till många språk, inklusive svenska.

- **Bertrand Russell** (1872–1970), 97 år

  Från en av Englands mäktigaste adelsfamiljer (farfadern premiärminister).
  Logiker, men även känd som filosof, samhällskritiker, m.m.
  Nobelpriset i litteratur 1950 – dock knappast för *Principia Mathematica*!

- **Richard K. Guy** (f. 1916), har passerat 100

  Britt verksam i Kanada. Diskret matematik och ”nöjesmatematik”.

  Har skrivit *Winning Ways for Your Mathematical Plays* med John Conway & Elwyn Berlekamp och *The Book of Numbers* med Conway.

- **Mary Cartwright** (1900–1998), 97 år

  Elev till Hardy.

  Samarbetade med Littlewood om van der Pol-ekvationen och radioförstärkare i samband med andra världskriget, och upptäckte fenomen (periodfördubbling etc.) som senare återupptäcktes av andra och kom på modet under namnet ”kaosteori”.

  Adlad 1969.

- **Lillian Rosanoff Lieber** (1886–1986), 99 år

  Föreståndare för matematiska institutionen vid Long Island University och Galois Institute of Mathematics and Art, New York.

  Skrev en serie egensinniga populärmatematiska böcker på 1940-talet om bl.a. relativitetsteori och Galoisteori, varav några har återutgivits nyligen. Illustrerade av maken (konstprofessor). Väldigt speciell formgivning, med korta rader:

PREFACE

This is not intended to be
free verse.
Writing each phrase on a separate line
facilitates rapid reading,
and everyone
is in a hurry
nowadays.