Jongleringsteori

Hans Lundmark, MAI

TATA40 Matematiska utblickar

(feb 2017)

”Siteswap”

- ”Siteswap” är en matematisk modell och notation för att beskriva **jongleringsmönster**, eller rättare sagt vissa aspekter av vissa typer av mönster.
- Utvecklades på 1980-talet.
- I modellen struntar man i vilka föremål som jongleras (säg **bollar** för enkelhets skull), om man kastar dem bakom ryggen, korsar armarna, gör piruetter, etc.
- Grundantagande: man kastar och fångar bara **en boll i taget**.

  Inte i denna modell, alltså:

  – **Multiplex jonglering**
    En hand fångar/kastar/håller flera bollar samtidigt.
  – **Synkron jonglering**
    Flera händer fångar/kastar samtidigt.

  Man kan dock generalisera modellen till att innefatta även sådan jonglering.

- Vänster och höger hand turas om.
- Diskreta tidssteg. I varje tidssteg händer detta:

  > En tidigare kastad boll kommer in för landning. Den hand som står på tur fångar bollen, och kastar den omedelbart igen.

  Eller möjligen detta:

  > Alla bollar har tidigare kastats så högt att ingen av dem är på väg att landa för tillfället. I så fall finns det ingenting att göra, så man väntar bara till nästa tidssteg.

- I notationen betecknas varje kast med ett heltal $k \geq 1$ som anger **hur många tidssteg senare** den bollen kommer att (fångas och) kastas igen.

  Ett **väntesteg** (tom hand, inget kast) betecknas med talet **noll**.

  Jongleringen beskrivs alltså abstrakt sett som en (i princip oändlig) följd av kast och/eller väntesteg:

$$\ldots, 3, 3, 4, 5, 5, 0, 1, 7, 7, 4, 0, 0, 0, 3, 3, \ldots$$

- Ju fler tidssteg bollen ska vara i luften innan den fångas, desto högre måste den förstås kastas. Talet k brukar därför kallas för kastets **höjd**.

  (Obs. dock att den verkliga kasthöjden som behövs är proportionell mot flygtiden i kvadrat, och att denna flygtid i praktiken måste vara lite kortare än k tidssteg, eftersom själva fångst- och kaströrelsen tar lite tid också.)

- Fundamental princip:

  > Man måste välja kasthöjderna så att **två bollar aldrig landar samtidigt**.

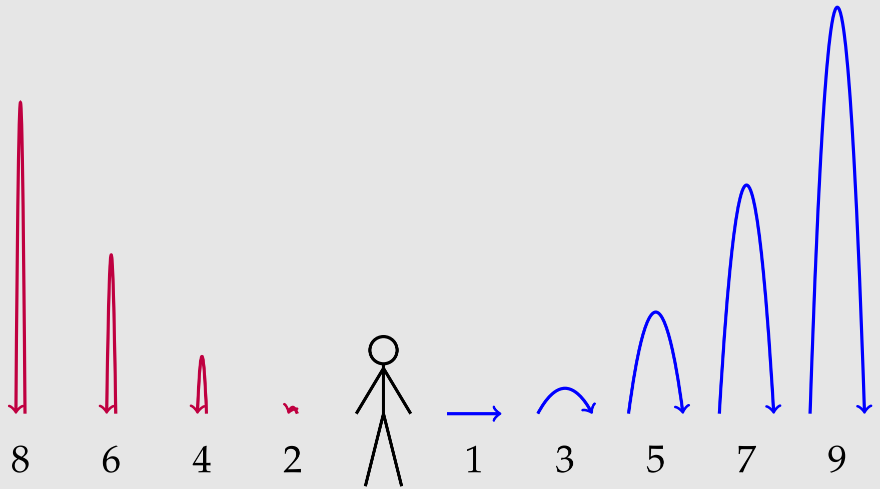
  (T.ex. får ett 5-kast inte följas av ett 4-kast i nästa steg, för då kommer de två bollarna att landa samtidigt. Och kastet därpå får inte vara ett 3-kast, för då landar femman och trean samtidigt.)

- För att en följd av tal ska representera ett giltigt jongleringsmönster måste den alltså uppfylla ovanstående villkor, och dessutom måste nollorna stå på exakt de tidssteg där det inte landar någon boll.

  (T.ex. $\ldots, 3, 3, 3, 0, \ldots$ funkar ju inte.)

Vid jonglering med alternerade höger/vänster hand gäller:

- **Jämna kast** måste **fångas med samma hand som kastade**.
- **Udda kast** måste **fångas med den andra handen**.



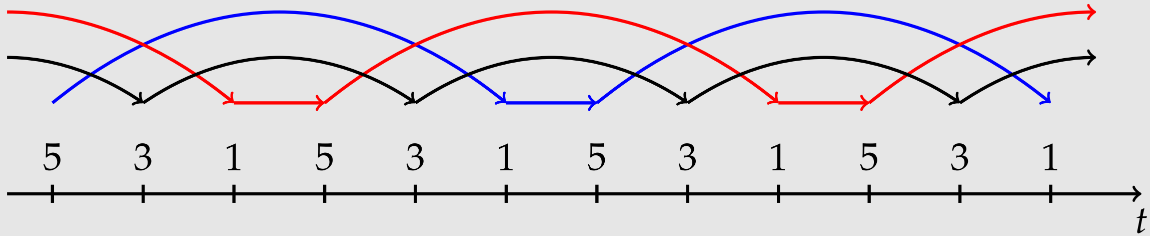
Jämna kast: till samma hand igen

Udda kast: från ena handen till den andra

En äkta **tvåa** är ett löjligt lågt kast, som vanligen realiseras som att man **håller** bollen i två tidssteg istället för att kasta.

Här är en periodisk talföljd som beskriver ett mönster med tre bollar:

$$\ldots, 5, 3, 1, 5, 3, 1, 5, 3, 1, \ldots$$



Kast med tvåsiffrig höjd används ytterst sällan i praktiken, så vi kan strunta i kommatecknen.

För periodiska mönster brukar man dessutom bara skriva ut en period.

Ett kortare skrivsätt för detta mönster är alltså:

$$531$$

(Eller 315 om man så föredrar, eller 153.)

Några exempel på periodiska jongleringsmönster

Tre bollar

- 3 (alltså $\cdots 33333333 \cdots$) Kaskad, det enklaste mönstret med tre bollar.
- 51 (alltså $\cdots 51515151 \cdots$) *Shower*, ganska mycket svårare!
- 441, 531, 34512, 5520, 55500, …

Fyra bollar

- 4 Fontän/vattenfall = två i varje hand (asynkront).
- 53 *Half-shower*.
- 71 *Shower*.
- 534, 5551, 55514, …

Fem bollar

- 5 Kaskad.
- 73 *Half-shower*.
- 91 *Shower*.
- 64, 645, 753, 56734, 677172, …

[JsJuggle]

Hur man enklast konstruerar giltiga kastföljder

Inför varje tidssteg befinner sig bollarna i ett visst **jongleringstillstånd**, den ”kö” som beskriver när de kommer att landa i framtiden.

T.ex. kan det se ut såhär:

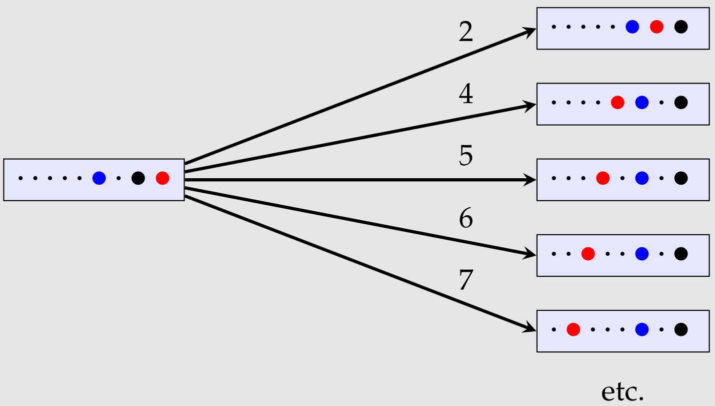
1. En boll ska just till att landa.
2. En boll kommer att landa i tidssteget därefter.
3. Ingen boll landar i steget därpå.
4. Sedan landar en boll ytterligare ett steg senare.
5. Och det var allt, inga fler bollar är i luften.

Symboliskt: · · · · · ● · ● ●

När man fångat den första bollen får man inte kasta 1 eller 3.

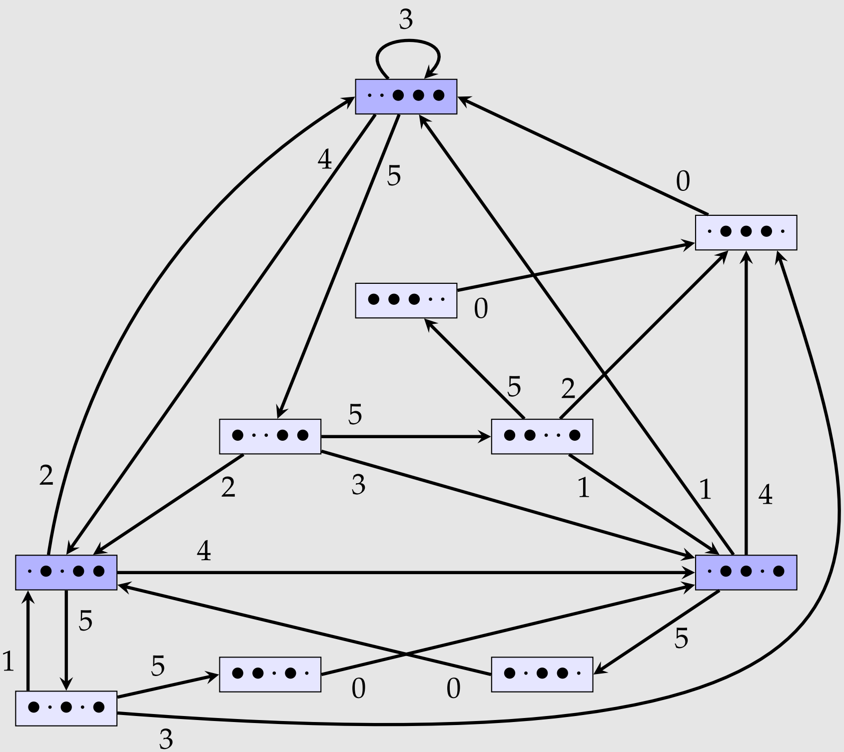
(Detta skulle ju leda till att två bollar landar samtidigt.)

Men övriga kast går bra, och ger ett nytt tillstånd inför nästa tidssteg:



(Den kastade bollen ställer sig på anvisad plats i kön, och de övriga flyttar ett steg framåt.)

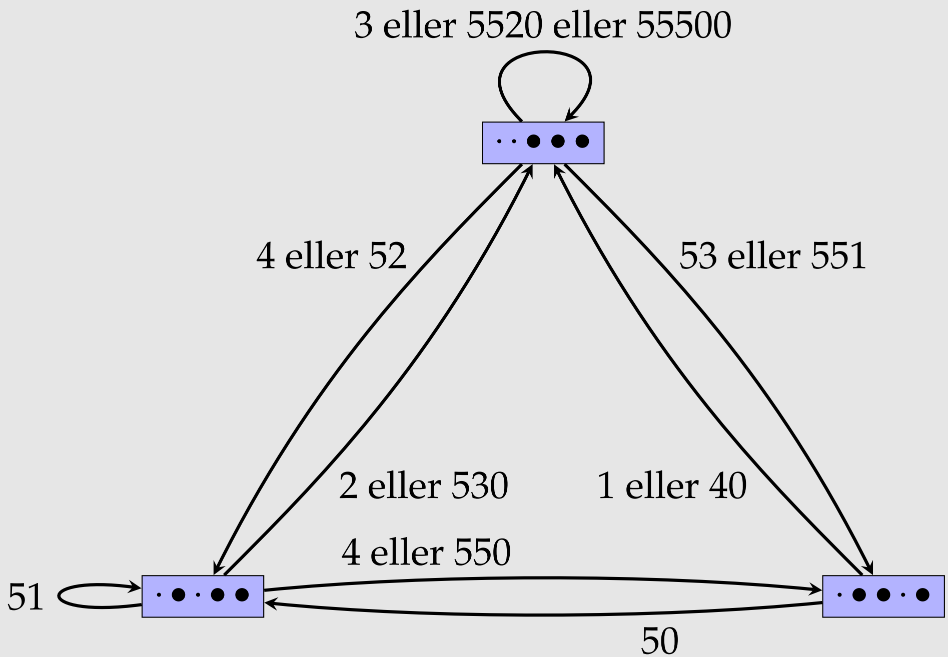
Med $b = 3$ stycken bollar och kast av höjd högst $h = 5$ finns $\binom{h}{b} = \binom{5}{3} = 10$ tillstånd:



Giltiga jongleringsmönster är precis de talföljder som fås genom att gå runt i grafen!

Tillståndsdiagrammet kan **förenklas** genom att ta bort tillstånd med **bara en pil in** (en femma) eller **bara en pil ut** (en nolla), och låta pilarna beteckna följder av kast istället.

Kvar blir då bara tillstånden $\boxed{\cdot\ \square\ \square\ \square\ \bullet}$, som är $\binom{h-2}{b-1} = \binom{5-2}{3-1} = 3$ stycken:



Tillståndsdiagram är ett enkelt sätt att **konstruera** ”siteswaps” (dvs. talföljder som är giltiga jongleringsmönster) med givet antal bollar och given maxhöjd.

Men hur avgör man om en **given talföljd** går att jonglera?

Man kan ganska enkelt visa följande satser:

- $a_0 a_1 \cdots a_{n-1}$ är en (n-periodisk) siteswap om och endast om man får en **permutation** av talen $0, 1, \ldots, n-1$ när man reducerar talen $a_k + k$ modulo n.
- Och i så fall är **antalet bollar** lika med **medelvärdet**:

$$b = \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n}$$

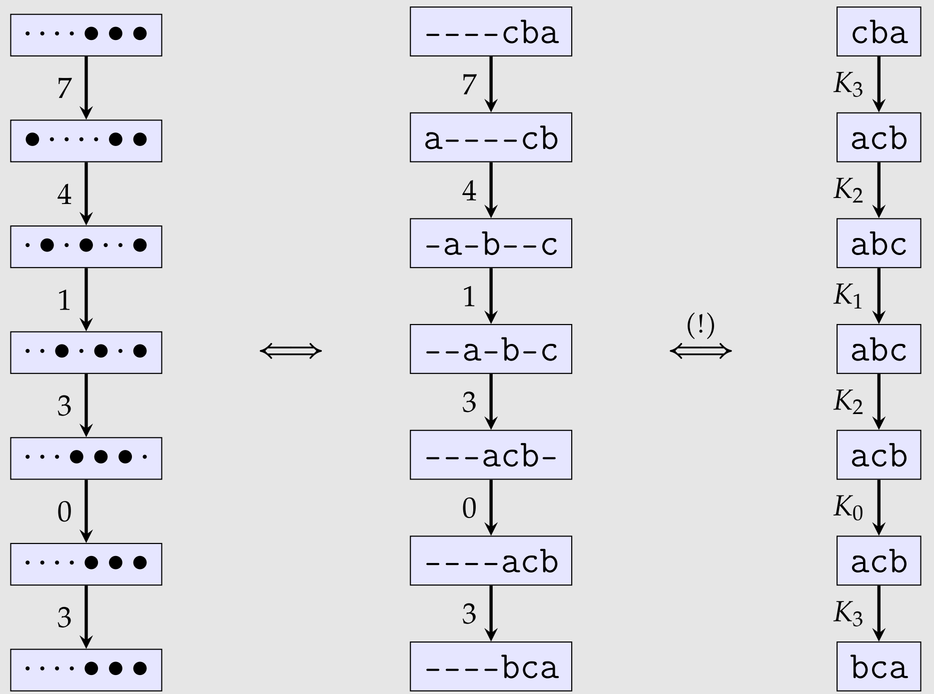
Exempel:

- 53487 är inte en siteswap, eftersom man får $(0, 4, 1, 1, 1)$ när man reducerar $(5, 3, 4, 8, 7) + (0, 1, 2, 3, 4) = (5, 4, 6, 11, 11)$ modulo 5.
- Men 53494 går bra, eftersom man får $(0, 4, 1, 2, 3)$. Antalet bollar i detta mönster är $(5 + 3 + 4 + 9 + 4)/5 = 5$.

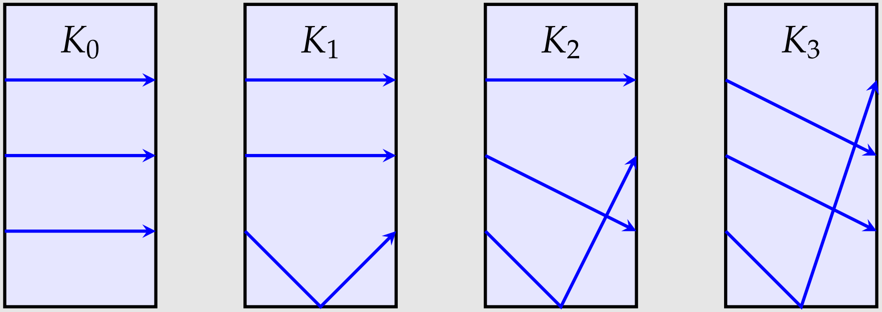
Hur många?

För att räkna hur många siteswaps det finns av en given längd och med ett visst antal bollar är en **alternativ representation** bättre.

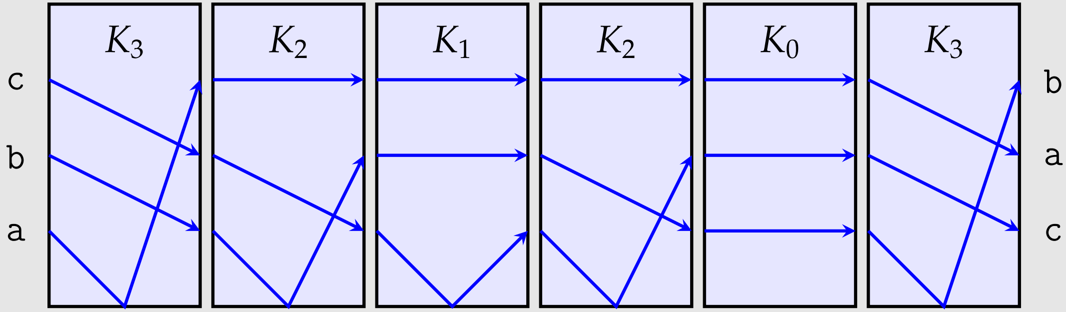
Betrakta t.ex. 741303, en siteswap med tre bollar:



Med ”jongleringskort för tre bollar”



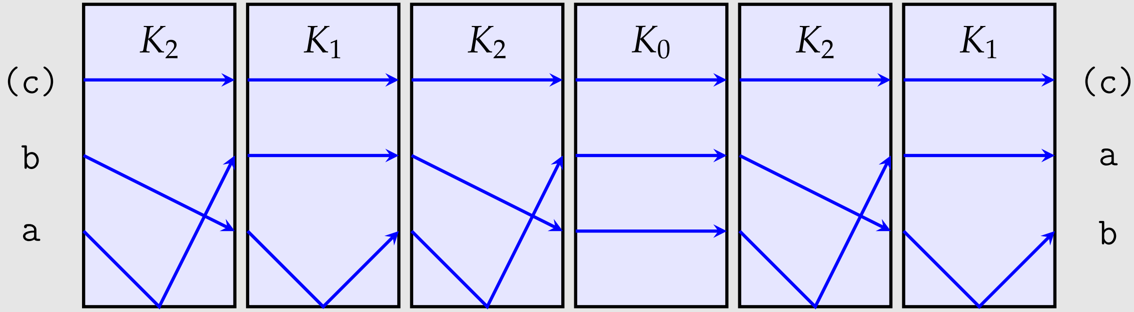
kan vi representera jongleringsmönstret som $K_3K_2K_1K_2K_0K_3$ istället:



Genom att räkna hur många tidssteg varje boll förblir i luften kan vi återskapa vår siteswap 741303, så detta är en helt ekvivalent representation.

Med de fyra korten $\{K_0, K_1, K_2, K_3\}$ ovan, som ju involverar tre bollar, kan vi t.ex. bilda $4^6 = 4096$ strängar av längd 6, alltså 4096 siteswaps av längd 6.

Men av dessa är det $3^6 = 729$ stycken som bara använder de tre korten $\{K_0, K_1, K_2\}$, och i dessa fall kommer minst en av bollarna att "sväva ovanför" de andra och aldrig landa, dvs. det är bara högst två bollar som egentligen jongleras:



Alltså finns det

$$4^6 - 3^6 = 4096 - 729 = 3367$$

stycken siteswaps av längd 6 med exakt 3 bollar. Och på motsvarande sätt visas att det finns

$$(b+1)^n - b^n$$

stycken siteswaps av längd n med exakt b bollar.

Men detta är **inte** den siffra som jonglörer egentligen är intresserade av!

Våra siteswaps av längd 6 inkluderar nämligen sådana som vi **redan känner till** ifall vi tidigare har räknat siteswaps av kortare längd, t.ex.

$$333333 = 3, \qquad 515151 = 51, \qquad 441441 = 441.$$

Dessa är inte så spännande här, utan vad vi vill veta är hur många som har **minimal** period 6.

Vi har också räknat **cykliska skift** som **olika** siteswaps, t.ex. 741303 och 413037, men de bör ju **betraktas som samma**, eller hur?

Fixera antalet bollar b.

Låt $F(n) = (b+1)^n - b^n$ vara antalet n-periodiska siteswaps med b bollar.

Låt $G(n)$ vara antalet sådana med **minimal** period n.

Då är $F(n) = \sum_{k \backslash n} G(k)$:

$$
\begin{aligned}
F(1) &= G(1) \\
F(2) &= G(2) + G(1) \\
F(3) &= G(3) + G(1) \\
F(4) &= G(4) + G(2) + G(1) \\
F(5) &= G(5) + G(1) \\
F(6) &= G(6) + G(3) + G(2) + G(1) \\
F(7) &= G(7) + G(1) \\
F(8) &= G(8) + G(4) + G(2) + G(1) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Vi känner $F(n)$ för alla n, och vill lösa ut $G(n)$ ur dessa samband.

Vi beräknar enkelt (steg för steg):

$$\begin{cases} F(1) = G(1) \\ F(2) = G(2) + G(1) \\ F(3) = G(3) + G(1) \\ F(4) = G(4) + G(2) + G(1) \\ F(5) = G(5) + G(1) \\ F(6) = G(6) + G(3) + G(2) + G(1) \\ F(7) = G(7) + G(1) \\ F(8) = G(8) + G(4) + G(2) + G(1) \\ \qquad\vdots \end{cases} \iff \begin{cases} G(1) = F(1) \\ G(2) = F(2) - F(1) \\ G(3) = F(3) - F(1) \\ G(4) = F(4) - F(2) \\ G(5) = F(5) - F(1) \\ G(6) = F(6) - F(3) - F(2) + F(1) \\ G(7) = F(7) - F(1) \\ G(8) = F(8) - F(4) \\ \qquad\vdots \end{cases}$$

Och mer generellt ges svaret av **Möbius' inversionsformel**

$$F(n) = \sum_{k \backslash n} G(k) \quad \iff \quad G(n) = \sum_{k \backslash n} \mu(n/k) F(k)$$

där **Möbiusfunktionen** μ definieras av

$$\mu(m) = \begin{cases} +1, & \text{om } m \text{ är en produkt av ett } \textbf{jämnt} \text{ antal } \textbf{olika} \text{ primfaktorer} \\ -1, & \text{om } m \text{ är en produkt av ett } \textbf{udda} \text{ antal } \textbf{olika} \text{ primfaktorer} \\ 0, & \text{om } m \text{ innehåller någon primfaktor } \textbf{flera gånger} \end{cases}$$

(Specialfall: $\mu(1) = 1$, antingen via separat definition, eller om man tänker att primfaktoriseringen av 1 är den **tomma produkten** med **noll** stycken faktorer.)

Talet vi söker, när olika cykliska skift räknas som samma siteswap, är

$$\frac{G(n)}{n}$$

eftersom alla de n cykliska skiften är olika när n är **minimal** period.

Med $b = 3$ stycken bollar får vi alltså såhär många genuint olika siteswaps som har längd 6 och inte är en upprepning av en kortare siteswap:

$$\begin{aligned}\frac{G(6)}{6} &= \frac{F(6) - F(3) - F(2) + F(1)}{6} \\ &= \frac{(4^6 - 3^6) - (4^3 - 3^3) - (4^2 - 3^2) + (4^1 - 3^1)}{6} \\ &= \frac{3367 - 37 - 7 + 1}{6} \\ &= 554\end{aligned}$$

Följden $G(n)/n$ börjar såhär (fortfarande med $b = 3$):

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{G(n)}{n}$	1	3	12	42	156	554	2028	7350

[oeis.org/A065179]

1 st. av längd 1: 3

3 st. av längd 2: $42, 51, 60$

12 st. av längd 3: $423, 441, 450, 522, 531, 603, 612, 630, 711, 720, 801, 900$

42 st. av längd 4: (Övning. . . !)

Osv.

Tillbaka till framtiden

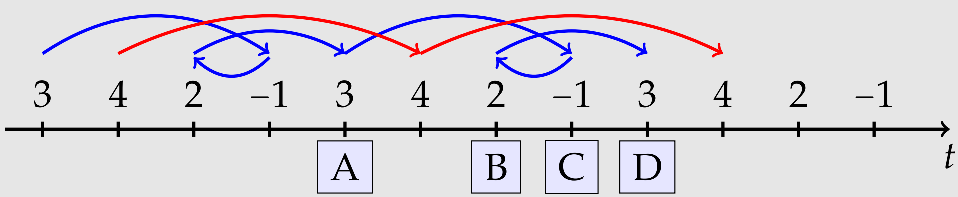
Som avslutning kan vi leka med tanken att tillåta kast med **negativ höjd**!

Exempel: 4530 är en siteswap med tre bollar.

Genom att subtrahera 1 från varje kast fås en (generaliserad) siteswap med två bollar:

$$342(-1)$$

$$\Big[\ \text{Kontroll: } (3,4,2,-1)+(0,1,2,3)=(3,5,4,2)\equiv(3,1,0,2) \pmod 4 \qquad \text{OK!}\ \Big]$$

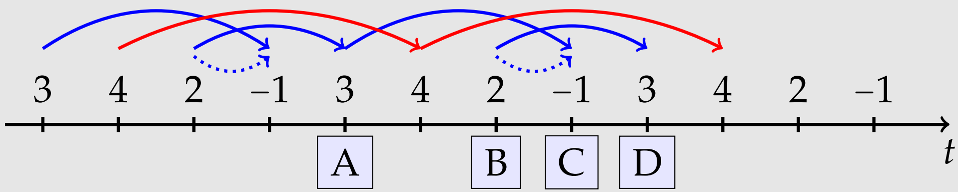


Bollen som kastas vid A fångas vid C, kastas därifrån ett steg **bakåt** i tiden, fångas vid B, och kastas två tidsteg framåt till D.

Men här är ett **annat sätt att tolka** vad som händer:

- Boll som färdas bakåt i tiden
  $\iff$ **antiboll** som färdas framåt i tiden.

- Att kasta en boll k steg bakåt vid tidssteg t
  $\iff$ att kasta en antiboll k steg framåt från $t - k$.



1. Vid B har vi ingen inkommande boll att fånga, så en tom hand är ledig. Istället för att kasta en nolla (dvs. vänta) skapar vi ett boll-antiboll-par ur tomma intet!

2. Bollen kastas två tidssteg framåt till D, vilket som vanligt anges av tvåan vid kasttidpunkten B.

3. Antibollen kastas samtidigt ett tidssteg framåt till C, vilket anges av minusettan *vid mottagningstidpunkten C*.

   (Påminner lite om COMEFROM-kommandot, motsatsen till GOTO!)

4. Vid C fångas antibollen samtidigt med den boll som kastades vid A, och de annihilerar varandra.

Somliga roar sig med att faktiskt realisera sådana mönster i form av multiplex jonglering där bollar i en viss färg får representera ”antibollar” och kreation/annihilation implementeras genom att plocka upp eller lägga ner bollar. [YouTube]

Men det finns också kopplingar till en del seriös och ganska avancerad matematik. Såhär, t.ex.:

- **Liegrupper** (Sophus Lie 1842–1899) används för att beskriva symmetrier hos differentialekvationer, elementarpartiklar, m.m.

  (T.ex. $SO(3)$, gruppen av alla vridningsmatriser av storlek 3×3.)

- Till varje Liegrupp hör en **Liealgebra**, som är ett enklare objekt.

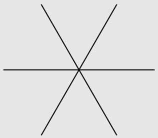
  (T.ex. $\mathfrak{so}(3)$, antisymmetriska matriser av storlek 3×3.)

- För att klassificera Liegrupper (”vilka finns det?”) börjar man med det enklare problemet att klassificera Liealgebror.

- Detta utmynnar så småningom i ett geometriproblem med vektorer och speglingar (nästa sida).

- Man behöver klassificera **rotsystem**. Ett rotsystem i $\mathbf{R}^n$ är en ändlig mängd vektorer som uppfyller vissa geometriska villkor. Bl.a. ska spegling i hyperplanet ortogonalt mot godtycklig vektor i systemet avbilda hela rotsystemet på sig självt.

- Detta medför att dessa hyperplan utgör en ändlig spegelkonfiguration, t.ex. som koordinatplanen i $\mathbf{R}^3$, eller dessa linjer i $\mathbf{R}^2$:

  Speglingarna genererar en ändlig grupp, kallad **Weylgruppen** för rotsystemet.

- I $\mathbf{R}^2$-exemplet ovan kallas Weylgruppen för A_2. Den innehåller tre speglingar och tre vridningar (inklusive identitetsavbildningen), och är isomorf med S_3 (gruppen av permutationer av 3 element).

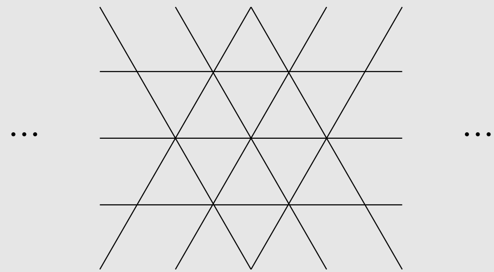
- Klassifikation av (irreducibla) rotsystem:

$$A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$$

  (Symboliseras med **Dynkindiagram**.)

- Samma klassifikation (eller nästan; ibland bara ADE) återkommer för många andra till synes annorlunda matematiska objekt!

- Man kan också undersöka konfigurationer med speglar som inte måste gå genom origo (*affina* underrum). T.ex. såhär:



  Gruppen som genereras av dessa speglingar är oändlig och utgör ett exempel på en **affin Weylgrupp**, $\widetilde{A_2}$.

- I n dimensioner finns en motsvarande Weylgrupp $A_n \cong S_{n+1}$ och affin Weylgrupp $\widetilde{A_n}$. (Och även $\widetilde{B_n}$ etc.)

- Givet en (generaliserad) siteswap kan vi definiera "jonglerings-funktionen"

$$f(k) = k + a_k$$

som anger vid vilket tidssteg som bollen kastad i steg k landar. Detta ger en korrespondens mellan siteswaps och permutationer $f\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$.

- Betrakta nu siteswaps **av längd** n **med noll bollar**.

Alltså: n-periodiska heltalsföljder $(a_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ sådana att

$$(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) + (0, 1, \ldots, n-1) \equiv (\text{permutation av } \{0, \ldots, n-1\}) \pmod{n},$$
$$a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} = 0.$$

- De permutationer $f\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ som motsvarar sådana siteswaps bildar en oändlig grupp som är isomorf med den affina Weylgruppen $\widetilde{A_{n-1}}$.

- Detta skapar en möjlighet att undersöka $\widetilde{A_{n-1}}$ genom att tänka i termer av siteswaps.

(Vissa egenskaper blir då enklare att se.)