

Reella och inte fullt så reella tal

Hans Lundmark, MAI

TATA40 Matematiska utblickar

(feb 2017)

Vad är ett tal?

- Vi talar numera om många olika sorters tal: **naturliga tal**, **reella tal**, **komplexa tal**, osv.
- Men ska t.ex. **kvaternioner** $q = a + bi + cj + dk$ räknas som "tal"?
($i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, och koefficienterna a, b, c, d är reella tal.)
Kanske, kanske inte. De uppfyller t.ex. inte $q_1q_2 = q_2q_1$.
- Begreppet "tal" är alltså lite oprecist.
- Exakt vad man har räknat som "tal" har varierat genom historien.
Kan vara svårt för oss att helt förstå hur man tänkte för länge sedan.
Många saker är ju så självklara för oss numera:
 - Notation: decimaltal, $1 + 1 = 2$, $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$, etc.
 - Talet noll. Negativa tal. Irrationella tal.
 - Tolkning av reella tal som punkter på en tallinje.
 - Tolkning av komplexa tal som punkter i ett talplan.
 - Koordinatsystem. Grafen för en funktion.
 - ...

Kort historik

- De positiva heltalen

$$\mathbf{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$$

har varit kända av mänskligheten sedan urminnes tider.

Man kan addera och multiplicera dem, samt subtrahera (men bara större minus mindre) och dividera (men bara om det går jämnt ut).

Idén att samla allihop i en mängd och betrakta denna som ett matematiskt objekt är dock från sent 1800-tal, och var initialt **väldigt** kontroversiell!

- Bland **de naturliga talen** brukar man oftast inkludera även **noll**:

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Att betrakta noll som ett tal, och införa en siffra för detta, är dock ett ganska stort begreppsmässigt steg, så det finns delade meningar om hur "naturligt" talet noll är. Somliga definierar $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ istället, och skriver t.ex. $\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ om nollan ska vara med.

- **Heltalen** innefattar även **negativa tal**:

$$\mathbf{Z} = \{ \dots, -3, -2, 1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

Beteckningen **Z** kommer från tyskans *Zahlen* = tal (i pluralis).

- Med dessa tal är det åtminstone inte längre något problem att beräkna $a - b$ där $a < b$ är positiva tal.
- Men negativa tal ansågs länge som **ytterst suspekta!**

Finns negativa tal **egentligen**?! Och vad betyder det att utföra operationer med de negativa talen själva? Vilka räknelagar gäller egentligen? Vad får man när man multiplicerar två negativa tal? Eller dividerar med noll? Osv.

- Här i Europa accepterades de negativa talen (och noll) ungefär **samtidigt som de komplexa talen** (under 1500- och 1600-talen).

Kineserna var *långt* före (2000 år eller så), men européerna hade ingen kontakt med dem.

Även indierna var tidigt ute (600–800-talet) med noll och negativa tal. Lite oklart hur mycket utbyte de hade med antikens babylonier och greker. Deras idéer kom till medeltidens Europa via araberna.

T.ex. sifforna och decimaltalen, i boken *Liber abaci* (1202) av Fibonacci, som dock talar om **talen** 1, 2, ..., 9 men **tecknet** 0.

- **Positiva rationella tal**, dvs. bråk a/b där a och b är positiva heltal, var mycket lättare att acceptera än noll och negativa tal.
- Tidiga kulturer (t.ex. Babylonien, Egypten, Grekland) räknade med bråk, om än inte alltid på det smidigaste sättet.
- Grekerna betonade geometri snarare än tal.

Bråk uppkommer ifall två sträckor är **kommensurabla** ("samtidigt mätbara"), dvs. om det finns en gemensam måttstock som ger den ena sträckan längden a enheter och den andra b enheter, där a och b är positiva heltal. Då står sträckorna i förhållandet $a : b$ till varandra.

- Grekerna upptäckte att diagonalen och sidan i en kvadrat **inte** är kommensurabla.

Med nutida språkbruk: $\sqrt{2}$ är ett **irrationellt tal**. Men för grekerna fanns inget "tal" som kunde representera detta längdförhållande! Det kanske var därför som de litade mer på geometrin? **Eudoxos** utvecklade en raffinerad teori för att hantera inkommensurabla geometriska storheter.

Irrationella tal har en snårig historia, och definierades inte ordentligt förrän mot slutet av 1800-talet (se nedan).

Mysteriet med negativa/komplexa tal och tredjegradare

- Algebran utvecklades medan man fortfarande ogillade negativa tal.
- Bokstäver fick alltså bara stå för positiva tal.
- Besvärligt! *Olika* lösningsformler för $x^2 + ax = b$, $x^2 = ax + b$, osv.
- Negativa lösningar förkastades som "absurda":

$$x + 7 = 3 \quad \text{saknar lösning}$$

$$x^2 + x = 6 \quad \iff \quad (x - 2)(x + 3) = 0 \quad \iff \quad x = 2$$

(Därmed var såklart inte komplexa lösningar aktuella heller.)

- Man tvingades dock (motvilligt) acceptera negativa och komplexa tal pga. **lösningsformeln för tredjegradslikningar**.

Se nästa sida!

(Obs! Komplexa tal infördes alltså **inte** för att man kände något behov av att **kunna lösa alla andragradslikningar**, vilket man ibland kan få intrycket av i nutida skolböcker.)

- På 1500-talet upptäcktes att tredjegrads ekvationen $x^3 = 3ax + 2b$ satisfieras av

$$x = \sqrt[3]{b + \sqrt{b^2 - a^3}} + \sqrt[3]{b - \sqrt{b^2 - a^3}}$$

- T.ex. med $a = 5$ och $b = 2$:

$$x^3 = 15x + 4$$

Vi vill gärna hitta den **positiva** lösningen $x = 4$. Formeln ger

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = \text{?!?}$$

Vad sjutton? Men $2 + \sqrt{-1}$ verkar ju vara kubikrot till $2 + \sqrt{-121}$ om man bara räknar på:

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{-1})^3 &= 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{-1} + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3 \\ &= 8 + 12\sqrt{-1} + 6 \cdot (-1) + (-1)\sqrt{-1} \\ &= 2 + 11\sqrt{-1} = 2 + \sqrt{-121} \end{aligned}$$

Likaså $(2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - \sqrt{-121}$, så

$$x = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4 \quad (!)$$

- "Avmystifieringen" av de komplexa talen dröjde sedan rätt länge.
- Tolkning via komplexa talplanet:
Wessel 1799, Argand 1806, Gauss 1831.
- Reella talpar (a, b) som **definition** av komplexa tal $a + bi$:
Hamilton 1834.

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$-(a, b) = (-a, -b)$$

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

$$\overline{(a, b)} = (a, -b)$$

$$|(a, b)| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- Med denna definition av \mathbf{C} gäller **inte** mängdinklusionen $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.
(Mängden \mathbf{R} har **enstaka tal** som element, medan \mathbf{C} har **talpar** som element.)
Däremot finns det en **perfekt kopia** av mängden \mathbf{R} (inklusive dess räkneoperationer) inuti mängden \mathbf{C} , nämligen mängden av alla talpar av formen $(a, 0)$.
Man brukar **identifiera** de reella talen med denna kopia av \mathbf{R} inuti \mathbf{C} , så att kan man tillåta sig att skriva $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.

Ett annat mysterium: Infinitesimaler

- När differential- och integralkalkylen utvecklades (1600- och 1700-talen) resonerade man i termer av **infinitesimaler**, ett slags oändligt små tal. En positiv infinitesimal är mindre än varje positivt reellt tal, men ändå större än noll.
- Integral $\int y dx$, en "summa" av oändligt många infinitesimaler.
- Derivata dy/dx , förhållandet mellan två infinitesimaler.
- Men **finns** det sådana tal? Matematikerna hade stora svårigheter att förklara vad man egentligen gjorde.

T.ex. om $y = x^3$ så är

$$dy = (x + dx)^3 - x^3 = 3x^2 dx + 3x(dx)^2 + (dx)^3$$

där kan vi dividera med dx eftersom dx inte är noll, men sedan försummar vi dx och $(dx)^2$ som om de vore noll:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 3x dx + (dx)^2 = 3x^2 \quad (?!?)$$

Den irländske biskopen och filosofen G. Berkeley gav 1734 ut skriften

THE
ANALYST;
OR, A
DISCOURSE

Addressed to an
Infidel MATHEMATICIAN.

WHEREIN

It is examined whether the Object, Principles,
and Inferences of the modern Analysis are more
distinctly conceived, or more evidently deduced,
than Religious Mysteries and Points of Faith.

Kritiserar infinitesimaler som omöjliga att föreställa sig. Berömt citat:

And what are these Fluxions? The Velocities of evanescent Increments?
And what are these same evanescent Increments? They are neither finite
Quantities nor Quantities infinitely small, nor yet nothing. May we not call
them the ghosts of departed quantities?

(I Newtons terminologi är *fluxionen* \dot{x} hastigheten hos en *fluent* x som rör sig med tiden.)

Arbete med de logiska grunderna (1800-talet)

- Upptäckten av **icke-euklidisk geometri** (framför allt **hyperbolisk geometri**) i början av 1800-talet bidrog till skepsis mot att basera matematiken på geometriska argument, och ett ökat intresse för tal och räkning (aritmetik) istället.

Vad är tal? Hur kan man ge aritmetiken en logiskt solid grund?

- Analysen omformulerades gradvis till att baseras på begreppet **gränsvärde** (definierat med ε och δ), för att undvika infinitesimaler. (T.ex. Cauchy & Bolzano under tidigt 1800-tal, men främst Weierstrass under andra hälften av 1800-talet.)

- **Mängdläran** (Cantor, 1870- och 80-talen) ansågs från början mycket kontroversiell, men kom så småningom (under 1900-talet) att ses som fundamental. Man börjar med axiom för mängder och bygger sedan upp matematiken (inklusive talsystemen) därifrån.

Cantor införde två nya typer av "tal" för att mäta storleken hos oändliga mängder: **kardinaltal** och **ordinaltal**.

Arbetet med talbegreppets fundament fortskred så att säga "uppifrån och ned":

- Konstruktion av \mathbf{C} från \mathbf{R} .
(Hamilton 1834)
- Konstruktion av \mathbf{R} från \mathbf{Q} .
(Dedekind 1858, Weierstrass 1865, Méray 1869, Cantor 1872)
- Axiomatisk beskrivning av de naturliga talen \mathbf{N} .
(Peano 1889)
(Föregångare: Grassmann *Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten* 1861, m.fl.)
- Rigorös konstruktion av \mathbf{Z} och \mathbf{Q} från \mathbf{N} .
(Vem var först? Grassmann? Peano? Tannery gav 1894 en "modern" konstruktion av \mathbf{Q} med ekvivalensklasser av talpar.)
- Enkel mängdteoretisk konstruktion av \mathbf{N} (och även av ordinaltalen).
(von Neumann 1923)

Peanos axiom för de naturliga talen (1889)

1. 0 är ett naturligt tal.
2. Varje naturligt tal x har en efterföljare (eller **successor**), $\text{succ}(x)$.
3. 0 är inte successor till något naturligt tal.
4. Om $\text{succ}(x) = \text{succ}(y)$ så är $x = y$.
5. (Induktionsaxiomet.) Om $P(0)$ är sant, och $P(x) \implies P(\text{succ}(x))$, så är påståendet $P(x)$ sant för alla naturliga tal x .

För att talen ska kunna skrivas bekvämt införs såklart de vanliga beteckningarna:

$$1 = \text{succ}(0) \quad 2 = \text{succ}(1) \quad 3 = \text{succ}(2) \quad \dots$$

Obs. att axiomen inte nämner addition och multiplikation!

Dessa räkneoperationer tas alltså inte som "gudagivna" här, utan måste definieras och studeras enbart utifrån axiomen.

- Rekursiv definition av **addition**:

$$x + 0 = x, \quad x + \text{succ}(y) = \text{succ}(x + y)$$

- Rekursiv definition av **multiplikation**:

$$x \cdot 0 = 0, \quad x \cdot \text{succ}(y) = x \cdot y + x$$

- Eftersom symbolen 1 betecknar talet $\text{succ}(0)$, så gäller t.ex.

$$x + 1 = x + \text{succ}(0) = \text{succ}(x + 0) = \text{succ}(x)$$

för alla naturliga tal x .

- Från axiomen **bevisar** man att räknelagarna

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

$$x + y = y + x$$

$$(xy)z = x(yz)$$

$$xy = yx$$

$$x(y + z) = xy + xz$$

gäller för alla naturliga tal.

von Neumanns konstruktion av \mathbb{N} via mängdlära (1923)

1. I ren mängdlära är allting mängder av mängder av mängder osv., och allting börjar med ett enda matematiskt objekt:

$$\text{tomma mängden} \quad \emptyset = \{ \}$$

Kalla den a för läsbarhetens skull.

2. När vi har ett objekt a kan vi bilda **mängden som innehåller detta objekt** (som sitt enda element):

$$b = \{a\}$$

3. Nu har vi två olika objekt tillgängliga: a och b . Med dessa kan man bilda mängderna $\{a, b\}$, $\{a\}$, $\{b\}$ och \emptyset , varav två stycken är nya:

$$c = \{a, b\}, \quad d = \{b\}$$

4. Med fyra olika objekt tillgängliga kan vi bilda $2^4 = 16$ mängder, varav vi redan hade 4. Alltså 12 nya: $e = \{a, b, c, d\}$, $f = \{a, b, c\}$, osv.

5. Bland alla dessa mängder som kan bildas, plocka ut följande:

$$a = \emptyset$$

$$b = \{a\}$$

$$c = \{a, b\}$$

$$f = \{a, b, c\}$$

$$q = \{a, b, c, f\}$$

\vdots

Döp dessa till $0, 1, 2, 3, 4, \dots$, alltså

$$0 = \emptyset, \quad 1 = \{0\}, \quad 2 = \{0, 1\}, \quad 3 = \{0, 1, 2\}, \quad 4 = \{0, 1, 2, 3\}, \quad \dots$$

6. Allmänt: låt $\text{succ}(x) = x \cup \{x\}$.

(Dvs. betrakta mängden x som ett nytt objekt och lägg till det till mängden.)

7. När vi har alla dessa tal (= mängder av en ovanstående typ) kan vi samla dem i en mängd, dvs. bilda mängden av naturliga tal:

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Kardinaltal

- Mängderna \mathbf{N} och \mathbf{Q} har **samma kardinalitet**.

Med detta menas att det finns en 1-1-korrespondens mellan dem.

Det går alltså att **räkna upp** de rationella talen i en oändlig lista, där varje tal kommer med exakt en gång.

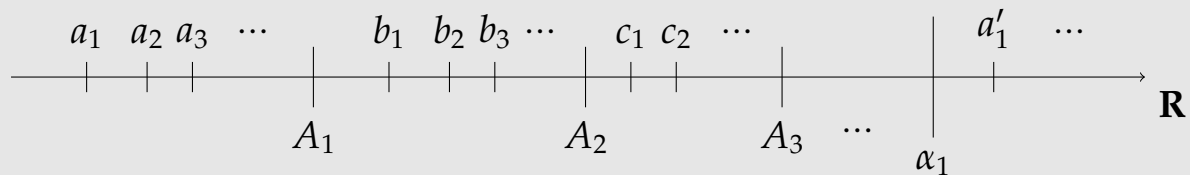
- Kardinaltalen mäter kardinalitet.
- Kardinaliteten för en ändlig mängd är helt enkelt antalet element, dvs. ett vanligt naturligt tal.
- Kardinaliteten hos \mathbf{N} och \mathbf{Q} (och alla andra **uppräknliga** mängder) ges av det minsta oändliga kardinaltalet, som heter \aleph_0 .
- Kardinaliteten hos \mathbf{R} ges av ett större kardinaltal, $c = 2^{\aleph_0}$.
(\mathbf{R} är en **överuppräknlig** mängd, enligt Cantors diagonalbevis.)

Ordinaltal

- Det går **inte** att räkna upp de rationella talen i **storleksordning!**
Det finns alltså ingen *ordningsbevarande* 1-1-korrespondens mellan de ordnade mängderna \mathbf{N} och \mathbf{Q} .
Man säger då att de har **olika ordningstyp**.
- Cantors ursprungliga definition av ordinaltal:
"ett ordinaltal är ordningstypen för en välordnad mängd".
(*Välordnad* = innehåller inte någon oändlig strängt avtagande följd.)
- Ordningstypen för \mathbf{N} är ett ordinaltal som heter ω .
Ordningstypen för \mathbf{Q} är inte ett ordinaltal, ty \mathbf{Q} är ej välordnad.
Ordningstypen för en ändlig mängd är antalet element (samma som kardinaliteten).
- Ovanstående definition är ganska abstrakt.
Vad John von Neumann visade 1923 var hur ordinaltalen istället kan definieras konkret som **mängder av en viss typ**. Konstruktionen av de naturliga talen ovan är bara början i denna konstruktion.

Exempel på hur man kan räkna med ordinaltal

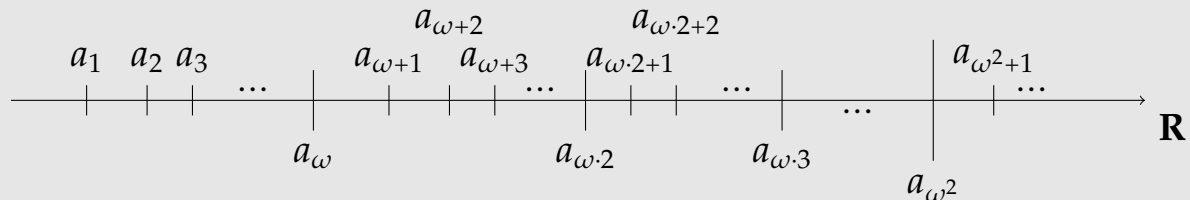
Betrakta en följd av följder av följder (etc.) (inklusive gränsvärden):



$$A_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad A_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad A_3 = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \quad (\text{etc.}) \quad \alpha_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$$

Om vi ska hålla på såhär länge till kommer det att bli bokstavsbrist!

Istället kan man skriva alla dessa tal som **en enda följd** $(a_n)_{n \geq 1}$ genom att låta **indexet** n vara ett **ordinaltal**:



von Neumanns konstruktion av ordinaltalen

Cantor: Kardinaltalet ω är **ordningstypen** för mängden \mathbf{N} .

von Neumann: Säg att kardinaltalet ω är mängden \mathbf{N} , och fortsätt sedan med konstruktionen $\text{succ}(x) = x \cup \{x\}$.

- Mängden $\omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ är det minsta oändliga ordinaltalet.
- Det ordinaltal som kommer direkt efter ω är mängden

$$\omega + 1 = \text{succ}(\omega) = \omega \cup \{\omega\} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, \omega\}$$

- Därefter kommer

$$\omega + 2 = \text{succ}(\omega + 1) = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, \omega, \omega + 1\}$$

- Och så vidare! När vi har alla $\omega + k$ kan vi bilda

$$\omega + \omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots\} = \omega \cdot 2$$

- Sedan $\omega \cdot 2 + 1 = \text{succ}(\omega \cdot 2)$, etc.

Ordinalaritmetik

Man definierar $x + y$ och $x \cdot y$ för ordinaltal med samma rekursiva formler som för naturliga tal, plus särskilda formler för **limesordinaltal** α , dvs. ordinaltal ($\neq 0$) som inte har någon omedelbar föregångare.

(Exempel på limesordinaltal: mängderna ω och $\omega + \omega$ ovan.)

$$x + 0 = x$$

$$x + \text{succ}(y) = \text{succ}(x + y)$$

$$x + \alpha = (\text{det minsta tal som är större än } x + y \text{ för alla } y < \alpha)$$

$$x \cdot 0 = 0$$

$$x \cdot \text{succ}(y) = x \cdot y + x$$

$$x \cdot \alpha = (\text{det minsta tal som är större än } x \cdot y \text{ för alla } y < \alpha)$$

(Även potenser x^y kan definieras för godtyckliga ordinaltal x och y .)

Addition av ordinaltal är **inte kommutativ!**

Exempelvis är

$$\begin{aligned} 3 + \omega &= (\text{det minsta tal som är större än } 3 + k \text{ för alla } k < \omega) \\ &= (\text{det minsta tal som är större än } 3, 4, 5, 6, \dots) \\ &= \omega \end{aligned}$$

vilket ju inte är samma sak som $\omega + 3$. Intuitiv förklaring:

- $\omega + 3$ motsvarar att "räkna till ω och därefter till 3":

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots; 1, 2, 3$$

- Men $3 + \omega$ motsvarar att "räkna till 3 och därefter till ω ", vilket i princip är samma sak som att räkna till ω :

$$1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

(Finare uttryckt: Det finns en ordningsbevarande 1-1-korrespondens mellan ω och den ordnade mängden $\{1_a < 2_a < 3_a < 1_b < 2_b < 3_b < 4_b < 5_b < \dots\}$.)

Inte heller multiplikationen är kommutativ, t.ex. är $\omega \cdot 2 \neq 2 \cdot \omega$.

- Definitionerna ger

$$\begin{aligned}\omega \cdot 2 &= \omega \cdot \text{succ}(1) = \omega \cdot 1 + \omega = \omega \cdot \text{succ}(0) + \omega \\ &= (\omega \cdot 0 + \omega) + \omega = (0 + \omega) + \omega \\ &= (\text{det minsta tal som är större än } 0 + k \text{ för alla } k < \omega) + \omega \\ &= \omega + \omega\end{aligned}$$

respektive

$$\begin{aligned}2 \cdot \omega &= (\text{det minsta tal som är större än } 2 \cdot k \text{ för alla } k < \omega) \\ &= (\text{det minsta tal som är större än } 2, 4, 6, 8, \dots) = \omega\end{aligned}$$

- Ordinaltalet $\omega \cdot 2 = \omega + \omega$ motsvarar att "räkna till ω , två gånger":

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots; 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

- Men $2 \cdot \omega = \omega$ motsvarar att "räkna till 2, omega gånger", vilket är exakt lika mycket jobb som att räkna till ω :

$$1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots$$

Åter till negativa tal: konstruktion av \mathbf{Z} från \mathbf{Z}^+

- Nu vet vi vad positiva heltal är och hur man adderar och multiplicerar dem. (Vi kan låtsas att vi är medeltidsmänniskor som inte är bekväma med talet noll ännu.)
- Nu ska vi försöka införa noll och negativa heltal, och tala om hur man räknar med dem.
- De negativa talen ska på något vis representera det som man får som resultat när man försöker utföra en "absurd" subtraktion. T.ex. är ska -3 vara resultatet av $1 - 4$, men också av $2 - 5$, $3 - 6$, $4 - 7$, osv.
- Idé: säg att talet -3 är mängden av alla dessa subtraktioner $a - b$!
Eller bättre, eftersom vi inte kan utföra subtraktionerna innan vi har definierat negativa tal, säg att -3 är mängden av de motsvarande talparen (a, b) :

$$N_3 = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7), \dots\}$$

(N_3 är en tillfällig beteckning som står för "det tredje negativa talet i \mathbf{Z} ".)

På förra sidan hade vi "det tredje negativa talet i \mathbf{Z} ":

$$N_3 = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7), \dots\}$$

De positiva heltalen har vi ju redan från början, men för att få en enhetlig beskrivning både positiva och negativa tal inför vi även mängder som ska stå för resultaten av vanliga subtraktioner, som

$$4 - 1 = 5 - 2 = 6 - 3 = 7 - 4 = \dots = 3$$

T.ex. definierar vi "det tredje positiva talet i \mathbf{Z} " som följande mängd:

$$P_3 = \{(4, 1), (5, 2), (6, 3), (7, 4), \dots\}$$

Och mängden

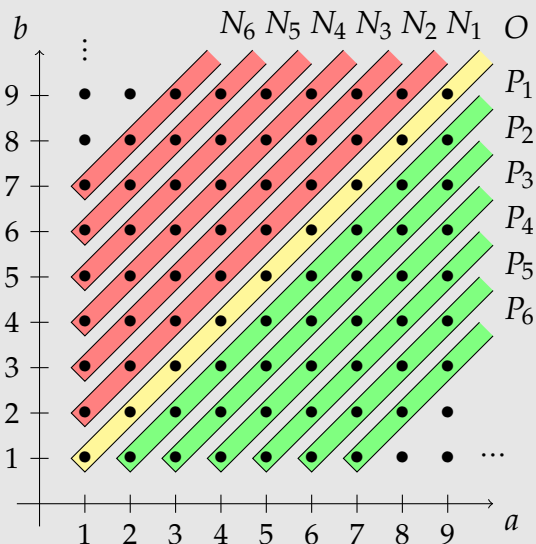
$$O = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), \dots\}$$

kommer förstås att bli "talet noll i \mathbf{Z} ".

Vi tar alltså alla talpar (a, b) där a och b är positiva heltal, och delar in dem i **ekvivalensklasser** "diagonalt", en klass för varje (tilltänkt) värde på $a - b$.

Paren (a, b) och (c, d) ska tillhöra samma klass om de tilltänkta värdena $a - b$ och $c - d$ är lika, men vi kan inte säga $a - b = c - d$ ännu, så vi uttrycker det med enbart plus istället, såhär:

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c$$



Definition: Låt $\mathbf{Z} = \{\dots, N_3, N_2, N_1, O, P_1, P_2, P_3, \dots\}$.

Räkneoperationer på \mathbf{Z}

Nu har vi sagt vad **elementen** i mängden \mathbf{Z} ska vara:

$$\mathbf{Z} = \{ \underbrace{\dots, N_3, N_2, N_1}_{\text{"negativa tal"}}, \underbrace{O}_{\text{"noll"}}, \underbrace{P_1, P_2, P_3, \dots}_{\text{"positiva tal"}} \}$$

Varje element i \mathbf{Z} är alltså en ekvivalensklass av talpar.

Nästa steg är att **definiera räkneoperationer** på dessa klasser.

- Hur adderar man två ekvivalensklasser X och Y ?
- Idé: Om $(a, b) \in X$ och $(c, d) \in Y$ så är klasserna X och Y tänkta att motsvara talen $a - b$ och $c - d$.

Summan $X + Y$ bör då motsvara $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$.

- **Def. av addition:** Låt $X + Y$ vara den klass som innehåller talparet

$$(a + c, b + d)$$

där (a, b) och (c, d) är representanter för klasserna X resp. Y .

(Måste visas att resultatet beror inte på *vilka* representanter man väljer!)

Låt oss testa! Vad är $P_3 + N_5$?

- Välj en representant för klassen P_3 , t.ex. $(a, b) = (10, 7)$.
- Välj en representant för klassen N_5 , t.ex. $(c, d) = (3, 8)$.
- Då är $(a + c, b + d) = (10 + 3, 7 + 8) = (13, 15)$.

Detta talpar tillhör klassen N_2 .

Alltså är $P_3 + N_5 = N_2$.

(Vilket såklart bara är ett tillfälligt skrivsätt för $3 + (-5) = -2$.)

Idéer för def. av negation och multiplikation:

$$-(a - b) = b - a \quad (a - b)(c - d) = (ac + bd) - (ad + bc)$$

- **Def. av negation:** Låt $-X$ vara klassen som innehåller (b, a) .
- **Def. av subtraktion:** Låt $X - Y = X + (-Y)$.
- **Def. av mult.:** Låt XY vara klassen som innehåller $(ac + bd, ad + bc)$.

Utifrån dessa definitioner visar man alla de vanliga räknereglerna för heltal (t.ex. att "minus gånger minus blir plus"). Notera att definitionerna är helt enhetliga; det behövs ingen falluppdelning där positiva tal, negativa tal och noll behandlas var för sig.

De positiva talen $\{1, 2, 3, \dots\}$ som vi började med är **inte** element i vår mängd $\mathbf{Z} = \{\dots, N_3, N_2, N_1, O, P_1, P_2, P_3, \dots\}$.

Men \mathbf{Z} innehåller en **perfekt kopia** av dem, nämligen $\{P_1, P_2, P_3, \dots\}$.

Vi kan därför ta oss friheten att **identifiera** de gamla positiva heltalen med de nya, och skriva k istället för P_k .

Eftersom $-P_k = N_k$ kan vi då även skriva $-k$ istället för N_k , och vi inför såklart också symbolen 0 istället för O .

- Nu har vi sett hur man kan konstruera heltalen \mathbf{Z} och deras räkneoperationer (plus, negation, gånger) från de positiva heltalen \mathbf{Z}^+ och deras räkneoperationer (plus, gånger).
- Exakt samma konstruktion kan också användas för att definiera \mathbf{Q} från \mathbf{Q}^+ , eller \mathbf{R} från \mathbf{R}^+ .
- De positiva rationella talen \mathbf{Q}^+ kan i sin tur konstrueras från \mathbf{Z}^+ via en liknande konstruktion med ekvivalensklasser av talpar.

T.ex. kan bråket "en halv" representeras av klassen

$$\{(1,2), (2,4), (3,6), (4,8), \dots\}$$

och allmänt ska paren (a,b) och (c,d) tillhöra samma klass om de är tänkta att representera samma bråk, dvs. $a/b = c/d$, men eftersom vi inte får säga så ännu uttrycker vi det enbart med gånger:

$$(a,b) \sim (c,d) \iff ad = bc$$

Definition av addition och multiplikation av ekvivalensklasser:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a,b) \in X \\ (c,d) \in Y \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} (ad + bc, bd) \in X + Y \\ (ac, bd) \in XY \end{array} \right.$$

Konstruktion av de reella talen

Det som återstår nu är att konstruera \mathbf{R} från \mathbf{Q} .

(Eller \mathbf{R}^+ från \mathbf{Q}^+ om man tycker att det blir enklare.)

Det finns många sätt. De två mest kända är:

- Dedekindsnitt

Dedekind 1858 (publicerat 1872)

- ekvivalensklasser av Cauchyföljder

Cantor 1872 (förenkling av konstruktion som Weierstrass föreläst om 1865)

Méray 1869 (oberoende, men ej särskilt uppmärksammat i samtiden)

Dedekinds konstruktion av \mathbb{R}

Die Betrachtungen, welche den Gegenstand dieser kleinen Schrift bilden, stammen aus dem Herbst des Jahres 1858. Ich befand mich damals als Professor am eidgenössischen Polytechnicum zu Zürich zum ersten Male in der Lage, die Elemente der Differentialrechnung vortragen zu müssen, und fühlte dabei empfindlicher als jemals früher den Mangel einer wirklich wissenschaftlichen Begründung der Arithmetik. Bei dem Begriffe der Annäherung einer veränderlichen Größe an einen festen Grenzwert und namentlich bei dem Beweise des Satzes, daß jede Größe, welche beständig, aber nicht über alle Grenzen wächst, sich gewiß einem Grenzwert nähern muß, nahm ich meine Zuflucht zu geometrischen Evidenzen.

Richard Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, 1872

Ett försök till översättning:

De betraktelser som utgör ämnet för denna lilla skrift härstammar från hösten 1858. Jag befann mig då, som professor vid federala tekniska högskolan i Zürich, för första gången i situationen att behöva föreläsa om grunderna i differentialkalkylen, och kände då tydligare än någonsin av bristen på ett verkligt vetenskapligt rättfärdigande av aritmetiken. Jag fick ta min tillflykt till geometriska evidens när det gällde begreppet att en föränderlig storhet närmar sig ett fast gränsvärde, och speciellt vid beviset för satsen att varje storhet som växer stadigt (men inte bortom alla gränser) säkert måste närma sig ett gränsvärde.

Richard Dedekind, *Kontinuitet och irrationella tal*, 1872

Om man delar upp de positiva rationella talen \mathbf{Q}^+ i två icke-tomma disjunkta delmängder L (som i *left*) och R (som i *right*) sådana att

$$x < y \text{ för alla } x \in L \text{ och } y \in R$$

så kan **tre fall** inträffa:

1. L har ett största element $r \in \mathbf{Q}^+$, och R saknar minsta element:



2. L saknar största element, och R har ett minsta element $r \in \mathbf{Q}^+$:



3. L saknar största element, och R saknar minsta element:



I fall 1 & 2 delar man upp \mathbf{Q}^+ vid något redan existerande (dvs. rationellt) tal, men i fall 3 delar man upp \mathbf{Q}^+ vid en "lucka" i mängden, alltså precis där man skulle vilja att det fanns ett irrationellt tal (som $\sqrt{2}$ i exemplet).

Dedekinds idé:

Säg att ett irrationellt tal **är** en sådan uppdelning som i fall 3.

(Och identifiera de rationella talen med uppdelningar som i fall 1 eller 2. För att få entydighet väljer vi att bara använda fall 2.)

Definition:

- Ett **Dedekindsnitt** i \mathbf{Q}^+ är ett mängdpar (L, R) , där L och R är icke-tomma disjunkta delmängder av \mathbf{Q}^+ sådana att
 - (a) $\mathbf{Q}^+ = L \cup R$
 - (b) $x < y$ för alla $x \in L$ och $y \in R$
 - (c) L saknar största element
- Med **positivt reellt tal** menar vi ett Dedekindsnitt i \mathbf{Q}^+ . Mängden av dessa snitt betecknas \mathbf{R}^+ .

Definition av hur man adderar och multiplicerar Dedekindsnitt:

- $(L_1, R_1) + (L_2, R_2) = (L, R)$ där

$$L = \{x_1 + x_2 : x_1 \in L_1, x_2 \in L_2\} \quad R = \mathbf{Q}^+ \setminus L$$

- $(L_1, R_1) \cdot (L_2, R_2) = (L, R)$ där

$$L = \{x_1 x_2 : x_1 \in L_1, x_2 \in L_2\} \quad R = \mathbf{Q}^+ \setminus L$$

Ordningsrelationen $x < y$ på \mathbf{R}^+ är också lätt att definiera:

$$(L_1, R_1) < (L_2, R_2) \iff L_1 \subset L_2$$

Dedekind konstruerade \mathbf{R} direkt från \mathbf{Q} , dvs. "ett reellt tal är ett Dedekindsnitt i \mathbf{Q} ".

Här har vi dock valt att konstruera \mathbf{R}^+ från \mathbf{Q}^+ . Detta gör att man slipper behandla positiva och negativa tal med falluppdelning vid definitionen av multiplikation.

De negativa reella talen (och noll) inför vi istället genom att efteråt gå från \mathbf{R}^+ till \mathbf{R} med samma konstruktion som när vi gick från \mathbf{Z}^+ till \mathbf{Z} ovan.

Cantors (och Mérays) konstruktion av \mathbf{R}

Denna idé är ganska annorlunda.

Här kan man lika gärna gå direkt från \mathbf{Q} till \mathbf{R} .

De flesta är nog vana att tänka på reella tal som (eventuellt oändliga) decimalutvecklingar, t.ex.

$$\sqrt{2} = 1,414213562373095048801688724209698078569671875376948073 \dots$$

Och det kan man väl göra, men det är t.ex. lite besvärligt att säga exakt hur man adderar och multiplicerar sådana. Man kan ju inte "börja från höger" som man brukar annars! Så vi skulle vilja ha en definition där det är lättare att definiera räkneoperationerna.

Vad ovanstående skrivsätt betyder är att följd

$$\left(1, \frac{14}{10}, \frac{141}{100}, \frac{1414}{1000}, \frac{14142}{10000}, \frac{141421}{100000}, \frac{1414213}{1000000}, \dots \right)$$

(som **består enbart av rationella tal**) har gränsvärdet $\sqrt{2}$.

Idé: Kan vi säga att talet $\sqrt{2}$ är denna följd av rationella tal?

Njae, det finns ju även andra rationella talföljder som går mot $\sqrt{2}$.

T.ex. ger successiva trunkeringar av kedjebraåksutvecklingen

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \ddots}}}}$$

följden

$$\left(1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \frac{577}{408}, \dots \right)$$

Modifierad idé:

Säg att talet $\sqrt{2}$ är **mängden** av alla rationella talföljder som går mot $\sqrt{2}$.

Men vi får se upp för cirkelresonemang!

Hur säger man att en följd konvergerar mot $\sqrt{2}$ **innan** man har definierat vad talet $\sqrt{2}$ är?

Vi måste (a) urskilja de rationella följder som "försöker konvergera" och (b) paketera alla som "försöker konvergera mot samma tal" i en och samma ekvivalensklass (som är det objekt som ska **vara** just det talet).

Definition:

- En talföljd $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ kallas för en **Cauchyföljd** om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett N sådant att $|a_m - a_n| < \varepsilon$ för alla $m, n \geq N$.
- En talföljd $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **går mot noll** om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett N sådant att $|a_n| < \varepsilon$ för alla $n \geq N$.
- Två Cauchyföljder $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ och $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ räknas som **ekvivalenta** om skillnadsföljden $(a_n - b_n)_{n=1}^{\infty}$ går mot noll.
- Med **reellt tal** menar vi en **ekvivalensklass av Cauchyföljder av rationella tal**.

Exempel:

- De två följderna ovan är alltså två (av oändligt många tänkbara) representanter för den ekvivalensklass av följder som vi kallar för det reella talet $\sqrt{2}$.
- Mängden \mathbf{R} av reella tal innehåller en **perfekt kopia** av mängden \mathbf{Q} av rationella tal: talet $q \in \mathbf{Q}$ motsvarar den klass som innehåller den konstanta följd (q, q, q, \dots) .

Så vi kan identifiera \mathbf{Q} med denna delmängd av \mathbf{R} .

Addition och multiplikation av reella tal definieras genom att operera **elementvis** på motsvarande Cauchyföljder.

Dvs. om X och Y är reella tal (klasser av Cauchyföljder), tag representant-följder

$$(a_n) \in X \quad (b_n) \in Y$$

och låt $X + Y$ vara den klass som innehåller följd $(a_n + b_n)$, samt låt XY vara den klass som innehåller följd $(a_n b_n)$.

Som vanligt måste man bevisa att resultatet inte beror på valet av representanter!

Talet 0,999...

- Det reella talet 1 är ekvivalensklassen som följd

$$(1, 1, 1, 1, \dots)$$

tilhör.

- Det reella talet 0,999... är ekvivalensklassen som följd

$$\left(\frac{9}{10}, \frac{99}{100}, \frac{999}{1000}, \frac{9999}{10000}, \dots \right)$$

tilhör.

- Men detta är **samma** ekvivalensklass, eftersom skillnadsföljden

$$\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \dots \right)$$

går mot noll! De båda följderna representerar alltså **samma tal**.

- Slutsats: i det reella talsystemet gäller $0,999\dots = 1$.

(Det är bara **två olika skrivsätt** för talet "ett".)

Några egenskaper hos \mathbf{R}

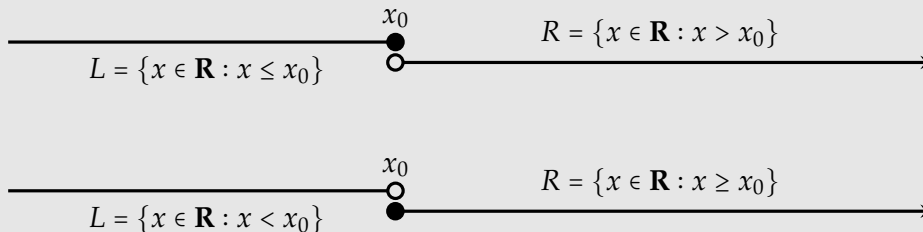
- Det reella talsystemet innehåller inga **infinitesimaler**, dvs. tal x sådana att $0 < |x| < 1/n$ för alla positiva heltal n .

Detta brukar uttryckas som den **arkimediska egenskapen**:

Om a och b är reella tal med $0 < a < b$ så finns det ett heltal n sådant att $na > b$.

- Det reella talsystemet är **Dedekindfullständigt**, dvs. det "saknar luckor" – om man tar Dedekindsnitt i \mathbf{R} så uppstår inga nya tal.

Med andra ord: om man delar upp \mathbf{R} i två icke-tomma disjunkta delmängder L och R sådana att $x < y$ för alla $x \in L$ och $y \in R$, så måste antingen L ha ett största element $x_0 \in \mathbf{R}$ eller så måste R ha ett minsta element $x_0 \in \mathbf{R}$.



- Dedekindfullständigheten uttrycks oftast i form av **supremumaxiomet**:

Om M är en **uppåt begränsad** icke-tom mängd av reella tal så finns det ett reellt tal x_0 som är den **minsta** övre begränsningen för M .

(Varje tal $m \in M$ är ett Dedekindsnitt. Tag **unionen** av alla dessa snitts vänstermängder, så fås vänstermängden i Dedekindsnittet för x_0 .)

Denna minsta övre begränsning x_0 kallas **supremum** för mängden M .

- Supremumaxiomet implicerar bl.a. satsen som Dedekind refererade till i citatet ovan:

En **växande** och **uppåt begränsad** följd $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ av reella tal måste ha ett reellt gränsvärde.

(Nämligen supremum för mängden $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$.)

Denna sats används i sin tur när man bevisar satsen om mellanliggande värde, satsen om största och minsta värde, etc.

- Varje Cauchyföljd av reella tal konvergerar mot ett reellt tal.

Detta innebär att det reella talsystemet även är **Cauchyfullständigt**, dvs. om man bildar ekvivalensklasser av Cauchyföljder av **reella** tal (modulo ekvivalensrelationen "skillnaden går mot noll") så uppstår inga nya tal.

- De reella talen kan beskrivas axiomatiskt genom att säga att de utgör en **kropp** (dvs. de fyra räknesätten finns och uppfyller alla de vanliga räkneregler) som är **ordnad** (dvs. har en ordningsrelation $x < y$ med de vanliga egenskaperna) och **Dedekindfullständig**.

Varje kropp med dessa egenskaper är **isomorf** med kroppen **R**.

(Man kan förstås räkna upp exakt vilka "vanliga" räkneregler och egenskaper som åsyftas, men de är för många för att jag ska orka göra detta här.)

Bortom de reella talen

Även om infinitesimalerna har befunnit sig utanför matematikens huvudfåra sedan någon gång på 1800-talet så har det hela tiden funnits matematiker som grubblat över dem, och numera vet man hur man rigoröst konstruerar talsystem som förutom de reella talen även innefattar infinitesimaler och oändligt stora tal. De två mest kända är:

- **Hyperreella tal** (Abraham Robinson, 1960-talet)

Bygger på tidigare arbeten inom analys och logik.

Används i "ickestandardanalys", ett alternativt sätt att visa samma saker som i vanlig analys.

- **Surreella tal** (John Horton Conway, 1970-talet)

En helt egen värld! Upptäcktes som en blixtnöje från klar himmel vid studier av slutspel i brädspelet go. (*Kombinatorisk spelteori*.)

(Andra tillämpningar? Bra teori för surreell analys saknas.)

Namnet *surreal numbers* är vitsigare på engelska:

real number = reellt tal, *surreal* = surrealistisk (à la Salvador Dalí)

De hyperreella talen ${}^*\mathbf{R}$

- Generalisering av Cantors sätt att konstruera \mathbf{R} med talföljder.
- Ett hyperreellt tal är en **ekvivalensklass av följder av reella tal**.
- Det måste inte vara Cauchyföljder här! **Varje** följd av reella tal representerar något hyperreellt tal.
- **Ekvivalensrelationen** som talar om när två följder $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ och $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ representerar samma hyperreella tal är också **helt annorlunda** än i konstruktionen av de reella talen.

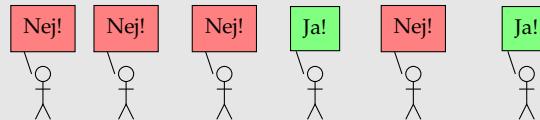
Den bygger på ”**omröstning med oändligt många röstande**”.

Se nästa sida!

- När ska två reella talföljder (a_n) och (b_n) betraktas som ekvivalenta?
- Föreställ dig att det vid varje position $n \in \mathbf{Z}^+$ står en **observatör**, som besvarar frågan ”**är dessa två följder lika?**” enbart baserat på jämförelse av de element som hen ser på just **sin plats**:

$$(a_n) = (1, \quad 3, \quad \sqrt{2}, \quad \pi, \quad -15, \quad 123, \quad \dots)$$

$$(b_n) = (9, \quad e^5, \quad -7, \quad \pi, \quad 512, \quad 123, \quad \dots)$$



Vi vill nu säga att de två följderna (a_n) och (b_n) är ekvivalenta, dvs. representerar samma hyperreella tal, **om och endast om ja-sidan vinner omröstningen**, dvs. om följderna ”är lika på tillräckligt många positioner”.

- Om ena sidan bara får **ändligt många röster** så ska den **andra sidan** vinna (för den har ju då oändligt många röster).
- Men hur avgör man vilken sida som vinner ifall **båda sidorna** får **oändligt** många röster? (T.ex. varannan ja, varannan nej.)

Det finns uppenbarligen ett visst mått av godtycke när man specificerar röstningssystemet. Men låt oss ändå försöka konstruera **något** röstningssystem som är rimligt.

Kalla $\{k_1, k_2, \dots\}$ för en **vinnande mängd** ifall röster från observatörerna på positionerna k_1, k_2, \dots skulle vinna över röster från de övriga observatörerna. Det vi behöver tala om är vilka mängder som är vinnande.

Uppenbara önskemål:

- En mängd ska vara vinnande omm dess komplement inte är det.
(Varje omröstning ska ge ett definitivt utslag.)
- Ändliga mängder ska inte vara vinnande.
(Som vi sade på förra sidan.)
- En mängd som innehåller en vinnande delmängd ska själv vara vinnande.
(Man ska ju inte kunna hamna i ett sämre läge genom att lyckas värva över röstare från motståndarlägret, eller hur?)

Ett mindre uppenbart önskemål, ifall vi vill kunna använda omröstning för att skapa en ekvivalensrelation:

- **Skärningen** av två vinnande mängder ska vara vinnande.

Detta behövs för att garantera *transitivitet*, dvs. följande egenskap som varje ekvivalensrelation måste ha:

$$\left. \begin{array}{l} (a_n) \sim (b_n) \\ (b_n) \sim (c_n) \end{array} \right\} \implies (a_n) \sim (c_n)$$

(De observatörer som observerar $a_n = c_n$ är ju i värsta fall bara de som **både** observerar att $a_n = b_n$ och att $b_n = c_n$.)

Detta är i sin tur nödvändigt för att likhet mellan hyperreella tal ska bete sig på önskat sätt:

$$\left. \begin{array}{l} x = y \\ y = z \end{array} \right\} \implies x = z$$

- **Dåliga nyheter:**

För att fullständigt specificera ett sådant röstningssystem måste man göra **oändligt många godtyckliga val**.

(I stil med "ska de udda talen vinna över de jämna talen eller tvärtom?")

Det är därför **helt hopplöst** att ge en explicit beskrivning av exakt vilka mängder som är vinnande!

- **Halvgoda nyheter:**

Med hjälp av **urvalsaxiomet** från mängdläran kan man ändå visa att det **i princip existerar** röstningssystem (familjer av vinnande mängder) som uppfyller de krav vi ställt upp.

Sådana familjer kallas **fria ultrafilter på N** .

- Givet att vi tror på existensen av fria ultrafilter, kan vi alltså tänka oss att vi har ett sådant, och använda det för att definiera vad som menas med att två reella talföljder är ekvivalenta.

Då har vi definierat hyperreella tal *med avseende på just det ultrafiltret*. Teorin för hyperreella tal och ickestandardanalys påverkas dock inte av *vilket* ultrafilter det var; allt funkar om man bara har *något*.

- De reella talen \mathbf{R} kan identifieras med en delmängd av de hyperreella talen ${}^*\mathbf{R}$, nämligen de som svarar mot **konstanta följder**:

$$r \in \mathbf{R} \quad \longleftrightarrow \quad \left(\text{ekvivalensklassen för följden } (r, r, r, \dots) \right) \in {}^*\mathbf{R}$$

- Följden

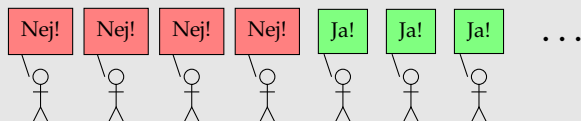
$$(1, 2, 3, 4, 5, \dots)$$

representerar ett hyperreellt tal som vi kan döpa till ω .

Är då t.ex. $\omega > 4$ sant eller falskt? Låt oss rösta om saken!

Är talet ω ... $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots)$

...större än talet 4? $(4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, \dots)$



Bara ändligt många nej-röster (4 stycken). Storseger för ja-sidan!

På motsvarande sätt inses att $\omega > x$ är sant för varje reellt x , vilket visar att det i ${}^*\mathbf{R}$ finns tal som är **obegränsade** ("oändligt stora").

- De fyra räknesätten: operera elementvis på representantföljder.
T.ex. är talet $\varepsilon = \frac{1}{\omega}$ den ekvivalensklass som innehåller följd

$$\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right).$$

Omröstning visar att olikheten

$$0 < \varepsilon < x$$

gäller för varje positivt reellt tal x , så ε är en **infinitesimal**.

- Allmännare: *varje* funktion $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ kan utvidgas till en funktion $f: {}^*\mathbf{R} \rightarrow {}^*\mathbf{R}$ genom elementvis applikation på representantföljder.
T.ex. definieras talet $\sin(\varepsilon)$ av följd

$$\left(\sin \frac{1}{1}, \sin \frac{1}{2}, \sin \frac{1}{3}, \sin \frac{1}{4}, \dots\right).$$

Detta tal är en annan infinitesimal, som ligger mellan 0 och ε :

$$0 < \sin(\varepsilon) < \varepsilon$$

(Omröstning om huruvida denna olikhet är sann ger enhällig ja-seger, eftersom $0 < \sin \frac{1}{n} < \frac{1}{n}$ gäller för alla heltal $n \geq 1$.)

- På den hyperreella tallinjen är varje vanligt reellt tal omgiven av en "halo" av infinitesimalt närliggande hyperreella tal.
(Infinitesimalerna själva, som ε och $\sin(\varepsilon)$, tillhör halon kring $0 \in \mathbf{R}$.)
- Och varje hyperreellt tal tillhör en "galax" av tal som ligger på begränsat avstånd ifrån varandra.
(Talen ε och -43 ligger i samma galax, men ω ligger i en annan galax, som också innehåller t.ex. $\omega + \varepsilon$ och $\omega - 43$.)
- Varje begränsat hyperreellt tal kan "avrundas till närmsta reella tal", vilket kallas att ta **standarddelen** (eller **skuggan**) av talet.
- **Derivatan** $f'(x)$ definieras i ickestandardanalys som **standarddelen** av kvoten dy/dx :

$$f'(x) = \text{st} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$$

där h är en godtycklig nollskild infinitesimal.

(Resultatet blir oberoende av h omm f är deriverbar i punkten $x \in \mathbf{R}$.)

De surreella talen \mathbf{No}

- Samtidig generalisering av Dedekinds sätt att konstruera \mathbf{R} med snitt och von Neumanns sätt att konstruera ordinaltalen \mathbf{On} genom att bygga upp mängder stegvis.
- Ett **surreellt tal** (som vi här kommer att kalla **tal**, rätt och slätt) ges av ett snitt i form av ett mängdpar

$$(L, R)$$

där L och R är mängder av tidigare konstruerade ("enklare") tal sådana att $x < y$ för varje $x \in L$ och $y \in R$.

Detta snitt är tänkt att representera det "enklaste" talet som ligger strikt mellan vänstermängden L och högermängden R .

(I konstruktionen ingår också att definiera vad som menas med " $x < y$ ", men det hoppar jag över, liksom många andra detaljer.)

- Skapelsen börjar från ingenting, genom att låta både L och R vara tomma mängden. Detta ger det **enklaste talet** av alla, nämligen **noll**:

$$0 = (\emptyset, \emptyset)$$

- I nästa steg kan L och R vara antingen \emptyset eller $\{0\}$, så vi kan bilda fyra olika par (L, R) .

Vi hade redan paret (\emptyset, \emptyset) .

Med $L = R = \{0\}$ får vi paret $(\{0\}, \{0\})$, men det är inget tal.

(Ty $x = 0 \in L$ och $y = 0 \in R$ uppfyller ej kravet $x < y$.)

Vi får alltså **två nya tal**, det "enklaste talet mindre än noll" och det "enklaste talet större än noll":

$$(\emptyset, \{0\}) \quad (\{0\}, \emptyset)$$

Dessa visar sig motsvara -1 och $+1$. Med en förenklad notation:

$$-1 = \{ \mid 0 \} \quad 1 = \{ 0 \mid \}$$

- I nästa steg bildas fyra nya tal, som visar sig vara:

$$-2 = \{ \mid -1, 0 \} \quad -\frac{1}{2} = \{-1 \mid 0\} \quad \frac{1}{2} = \{0 \mid 1\} \quad 2 = \{0, 1 \mid \}$$

- Vi kan även bilda $\{-1 \mid 1\}$. Detta snitt ska stå för det enklaste talet mellan -1 och 1 , alltså 0 , vilket dock redan hade definierats som $0 = \{ \mid \}$. Man måste alltså också införa en **ekvivalensrelation**, så att flera **olika snitt** (L, R) kan representera **samma tal** $\{L \mid R\}$.

- Varje ordinaltal kan identifieras med ett surreellt tal sådant att $R = \emptyset$:

$$0 = \{ \mid \}$$

$$1 = \{0 \mid \}$$

$$2 = \{0, 1 \mid \}$$

$$3 = \{0, 1, 2 \mid \}$$

⋮

$$\omega = \{0, 1, 2, 3, \dots \mid \}$$

$$\omega + 1 = \{0, 1, 2, 3, \dots, \omega \mid \}$$

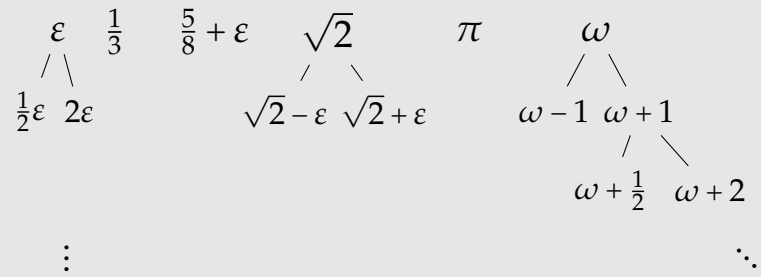
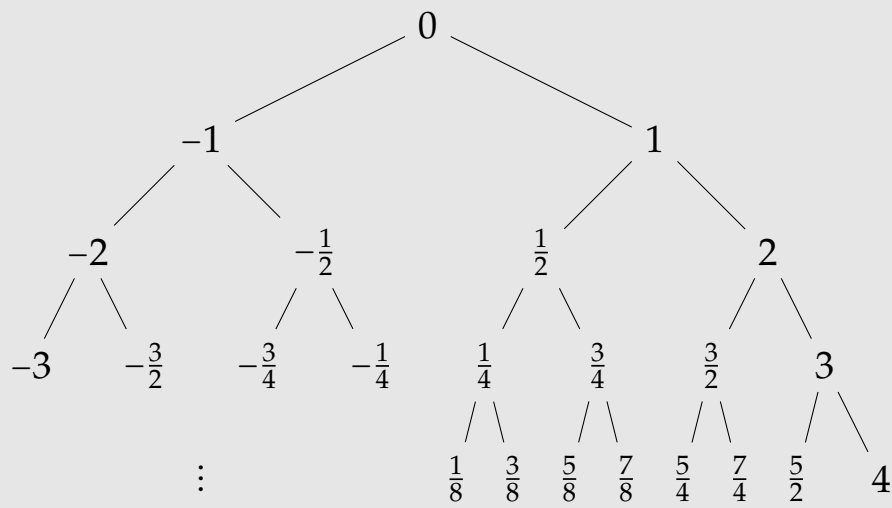
$$\omega + 2 = \{0, 1, 2, 3, \dots, \omega, \omega + 1 \mid \}$$

⋮

- I slutändan visar det sig att talen bildar ett **binärt träd** (figur på nästa sida). Längs högra kanten löper ordinaltalen, och de numrerar trädets nivåer ("dagarna i skapelsen", talens "födelsedagar").

Olikheten $x < y$ motsvarar att x ligger till vänster om y i trädet.

Ett tal x på nivå α (där α är ett ordinaltal) nås från nollan genom att gå α steg vänster (minus) eller höger (plus): $x = (+---+ \dots)$.



- Det "kanoniska" snittet $\{L \mid R\}$ för ett tal x erhålls genom att låta mängderna L resp. R bestå av de tal som ligger på stigen från 0 till x i trädet och är mindre resp. större än x .
- På ändliga dagar föds bara **dyadiska bråk**, dvs. rationella tal av typen $k/2^n$.
- Men på dag ω (när L och R kan vara oändliga mängder) föds plötsligt **alla de övriga reella talen**, dvs. **icke-dyadiska bråk** som

$$\frac{1}{3} = \left\{ 0, \frac{1}{4}, \frac{5}{16}, \frac{21}{64}, \dots \mid 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{11}{32}, \dots \right\} = (+-(-+)^{\omega}) = (+---+-+---+ \dots)$$

och **irrationella tal** som

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= \left\{ \text{dyadiska bråk } x \geq 0 \text{ med } x^2 < 2 \mid \text{d:o med } x^2 > 2 \right\} \\ &= \left\{ 0, 1, \frac{5}{4}, \frac{45}{32}, \frac{181}{128}, \dots \mid 2, \frac{3}{2}, \frac{23}{16}, \frac{91}{64}, \frac{363}{256}, \dots \right\} \\ &= (++---++-+-+-----+---++++ \dots) \quad (\text{ej periodiskt}) \end{aligned}$$

(De **namn** som vi har gett talen i trädet är såklart inte motiverade förrän vi har infört **räkneoperationer**, och t.ex. visat att talen $\frac{1}{3}$ och $\sqrt{2}$ ovan uppfyller ekvationerna $3x = 1$ resp. $x^2 = 2$.)

- På dag ω föds också en massa **andra tal** som inte finns i reella talsystemet, nämligen de obegränsade talen $\pm\omega$ där

$$\omega = \{0, 1, 2, 3, \dots \mid \} = (+^\omega) = (+++++\dots)$$

och infinitesimalerna $\pm\varepsilon$ där

$$\varepsilon = \frac{1}{\omega} = \{0 \mid 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\} = (+^{-\omega}) = (+-----\dots)$$

samt tal av formen "dyadiskt bråk plus/minus ε ", t.ex.

$$\frac{5}{8} + \varepsilon = (+-+-\omega) \quad \frac{5}{8} - \varepsilon = (+-+-\omega)$$

(utgå från $\frac{5}{8} = (+-+-)$ och haka på $(+^{-\omega})$ resp. $(-^{+\omega})$).

- Dagen därpå (alltså på dag $\omega + 1$) föds bland annat

$$\omega - 1 = \{0, 1, 2, 3, \dots \mid \omega\} = (+^{\omega-}),$$

det enklaste talet som är större än alla heltal men mindre än ω .

Och sedan fortsätter det med alltmer svindlande konstiga tal!

- Obs. att **alla tal** skapas på samma sätt. Man behöver alltså inte gå stegvis $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Q}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ eller $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{R}$ och i varje steg identifiera de "gamla" talen med en delmängd av de "nya".

- Negation, addition och multiplikation definieras rekursivt såhär:

$$\begin{aligned}
 -x &= \{-x^R \mid -x^L\} \\
 x + y &= \{x^L + y, x + y^L \mid x^R + y, x + y^R\} \\
 xy &= \{x^L y + xy^L - x^L y^L, x^R y + xy^R - x^R y^R \mid \\
 &\quad x^L y + xy^R - x^L y^R, x^R y + xy^L - x^R y^L\}
 \end{aligned}$$

där talen x^L, x^R, y^L, y^R löper genom de vänstra/högra mängderna i de snitt som definierar x resp. y .

(Alla operationer involverar *enklare* tal. Man landar efter ändligt många steg i "tomma" operationer med $0 = (\emptyset, \emptyset)$ när man nystar ut allting.)

- Den surreella additionen är associativ och kommutativ som vanligt, och likaså multiplikationen.

(Så t.ex. $\omega + 3 = 3 + \omega$ och $2 \cdot \omega = \omega \cdot 2$, alltså **inte** som för ordinaltal.)

- Operationerna negation och addition har spelteoretiskt ursprung.

Negation av ett spel: de två spelarna (" L och R ") byter roller.

Addition av två spel: spelen spelas sida vid sida, och ett drag i summaspelet består av att välja ett av partierna och göra ett drag där.

- Att hitta den rätta definitionen av multiplikation är svårare!

Idén som visar sig fungera är att $(x - x^L)(y - y^L)$ ska vara större än noll om $x^L < x$ och $y^L < y$:

$$\begin{aligned}
 & 0 < (x - x^L)(y - y^L) \\
 \iff & 0 < xy - x^L y - x y^L + x^L y^L \\
 \iff & x^L y + x y^L - x^L y^L < xy
 \end{aligned}$$

Alltså bör $x^L y + x y^L - x^L y^L$ ligga i vänstermängden för xy .

(Och analogt för övriga kombinationer av L och R .)

- I det surreella talsystemet kan man även invertera alla tal utom noll, dra roten ur ickenegativa tal, hitta minst ett nollställe till varje polynom av udda gradtal, definiera exponentialfunktionen (med viss möda!), m.m.

Exempelvis är följande ett fullt legitimt surreellt tal:

$$\frac{\sqrt{\omega - \pi}}{\exp(\sqrt{2} + \varepsilon - \varepsilon^5)}$$