Att multiplicera vektorer

Hans Lundmark, MAI

TATA40 Matematiska utblickar

(april 2017)

Repetition: Skalärprodukt $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$

Vektor gånger vektor lika med **skalär**.

Geometrisk definition:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}| \cos\theta,$$

där θ är vinkeln mellan $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$.

Skalärprodukten är en **bilinjär** och **kommutativ** operation:

$$(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) \cdot (c\mathbf{z} + d\mathbf{w}) = ac\,\mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + ad\,\mathbf{x} \cdot \mathbf{w} + bc\,\mathbf{y} \cdot \mathbf{z} + bd\,\mathbf{y} \cdot \mathbf{w}$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$$

Det är inte meningsfullt att fråga sig om det är en **associativ** operation, eftersom skalärprodukten av tre vektorer inte ens är definierad:

$$\underbrace{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}}_{???} \stackrel{?}{=} \underbrace{\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})}_{???}$$

(Man kan förstås beräkna $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\mathbf{z}$, dvs. skalär gånger vektor, men det är något annat!)

Om $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ är en ON-bas, så är

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \mathbf{e}_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \underbrace{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j}_{=0 \text{ eller } 1} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k,\end{aligned}$$

det vill säga

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Repetition: Kryssprodukt $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$

Vektor gånger vektor lika med **vektor**. (Kallas även **vektorprodukt**.)

Bara definierad i **tre dimensioner**!

Geometrisk definition: $\mathbf{z} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$ är den vektor som har beloppet

$$|\mathbf{z}| = |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}| \sin\theta$$

och vars riktning (ifall $|\mathbf{z}| \neq 0$) bestäms entydigt av villkoren

$$\mathbf{z} \perp \mathbf{x}, \qquad \mathbf{z} \perp \mathbf{y}, \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \text{ är ett högersystem.}$$

(Med färre än tre dimensioner finns det inte plats för vektorn $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ att vara vinkelrät mot $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$. Och om rummet har dimension större än tre finns det oändligt många riktningar som är vinkelräta mot $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$.)

Kryssprodukten är en **bilinjär** och **antikommutativ** operation:

$$(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) \times (c\mathbf{z} + d\mathbf{w}) = ac\,\mathbf{x} \times \mathbf{z} + ad\,\mathbf{x} \times \mathbf{w} + bc\,\mathbf{y} \times \mathbf{z} + bd\,\mathbf{y} \times \mathbf{w}$$
$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x}$$

Eftersom resultatet av produkten är en vektor kan man kryssa igen med en tredje vektor. Kryssprodukten är dock **inte** associativ:

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z} \neq \mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) \quad \text{(i allmänhet)}$$

Men den uppfyller **Jacobis identitet**:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z} \\ +&(\mathbf{y} \times \mathbf{z}) \times \mathbf{x} \\ +&(\mathbf{z} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{y} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Om $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ är en högerorienterad ON-bas, så är

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \qquad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \qquad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2,$$

vilket ger

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} \times \mathbf{y} &= (x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3) \times (y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3) \\
&= x_1y_1 \underbrace{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1}_{=\mathbf{0}} + x_1y_2 \underbrace{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}_{=\mathbf{e}_3} + x_1y_3 \underbrace{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3}_{=-\mathbf{e}_2} \\
&\quad + x_2y_1 \underbrace{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1}_{=-\mathbf{e}_3} + x_2y_2 \underbrace{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2}_{=\mathbf{0}} + x_2y_3 \underbrace{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}_{=\mathbf{e}_1} \\
&\quad + x_3y_1 \underbrace{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1}_{=\mathbf{e}_2} + x_3y_2 \underbrace{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2}_{=-\mathbf{e}_1} + x_3y_3 \underbrace{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3}_{=\mathbf{0}} \\
&= (x_2y_3 - x_3y_2)\,\mathbf{e}_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\,\mathbf{e}_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\,\mathbf{e}_3,
\end{aligned}$$

det vill säga

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}.$$

Några halvmysko egenskaper:

- *Längden* av $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ är *arean* av den parallellogram som $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ spänner upp.
- Vid basbyten transformeras koordinaterna för $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ annorlunda än för vanliga vektorer.

  (Vid vridningar av koordinatsystemet blir det som vanligt, men vid vridspeglingar får man ett extra minustecken, och vid icke-ortogonala basbyten blir det helt annorlunda!)

  Inom fysiken kallas ibland storheter som beter sig på detta vis för *pseudovektorer* eller *axiella vektorer*.

  Exempel: vridmoment, rörelsemängdsmoment, magnetfält.

  (Det är dock naturligare att beskriva dem med hjälp av *bivektorer*, som vi kommer till senare.)

Geometriska tillämpningar

Med skalärprodukt är det enkelt att beräkna **projektioner** i $\mathbf{R}^n$.

Projektionen av vektorn $\mathbf{x}$ på enhetsvektorn $\mathbf{n}$ ges av projektionsformeln

$$P_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n},$$

och projektionen av $\mathbf{x}$ på (hyper-)planet ortogonalt mot $\mathbf{n}$ blir därmed

$$Q_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - P_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}.$$

Med skalärprodukt och kryssprodukt kan man beräkna **vridningar** i $\mathbf{R}^3$.

Operationen att vrida vektorn $\mathbf{x}$ vinkeln α kring enhetsvektorn $\mathbf{n}$ kan t.ex. beskrivas med följande formler:

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{n},\alpha}(\mathbf{x}) &= (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + \sin\alpha\,(\mathbf{n} \times \mathbf{x}) + \cos\alpha\,\big(\mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}\big) \\ &= \mathbf{x} + \sin\alpha\,(\mathbf{n} \times \mathbf{x}) + (1 - \cos\alpha)\,\big(\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{x})\big). \end{aligned}$$

(Positiv led för vinkeln α är moturs sett från spetsen av $\mathbf{n}$.)

Geometri i två dimensioner: komplexa tal

Vektorer i $\mathbf{R}^2$ kan betraktas som komplexa tal, via korrespondensen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \quad \longleftrightarrow \quad x + yi \in \mathbf{C}.$$

Detta ger ett sätt att multiplicera vektorer i $\mathbf{R}^2$ – bara multiplicera de motsvarande komplexa talen! Från

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

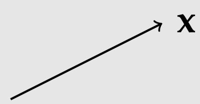
fås då multiplikationsregeln

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd \\ ad + bc \end{pmatrix}.$$

(Ett sätt att *definiera* de komplexa talen är att säga att $\mathbf{C}$ *är* vektorrummet $\mathbf{R}^2$, försett med denna multiplikation.)

Men denna multiplikation är lite suspekt om man tänker på vektorer som *geometriska* objekt (ekvivalensklasser av riktade sträckor).

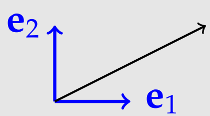
Här är t.ex. en geometrisk vektor i planet:



Fråga: Vad är $\mathbf{x}^2$?

(Alltså $\mathbf{x}$ gånger $\mathbf{x}$.)

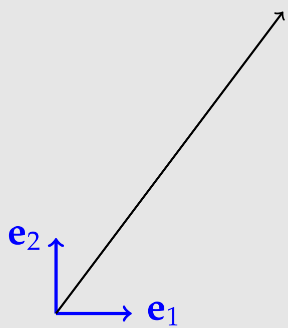
För att svara på frågan måste vi införa en bas, så att vi kan tala om *koordinatvektorn* för $\mathbf{x}$, t.ex. såhär:



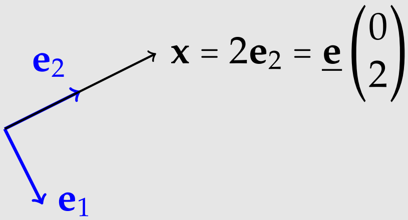
$$\mathbf{x} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi identifierar $\mathbf{x}$ med det komplexa talet $2+i$, och beräknar $(2+i)^2 = 3+4i$, alltså $\mathbf{x}^2 = 3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2$:

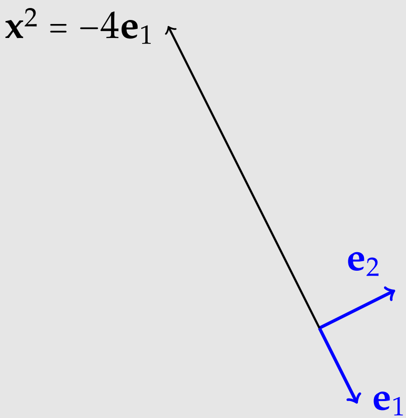
$$\mathbf{x}^2 = 3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2$$



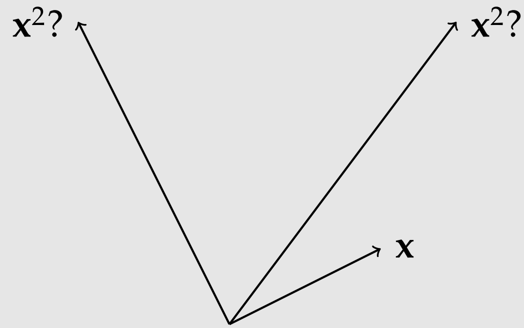
Men tänk om vi hade infört basen annorlunda, t.ex. såhär:



Då får vi $\mathbf{x}^2 = -4\mathbf{e}_1$, eftersom $(2i)^2 = -4$:



Så hur ska det vara egentligen?

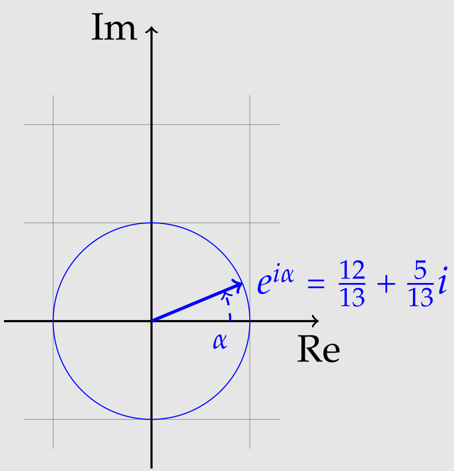


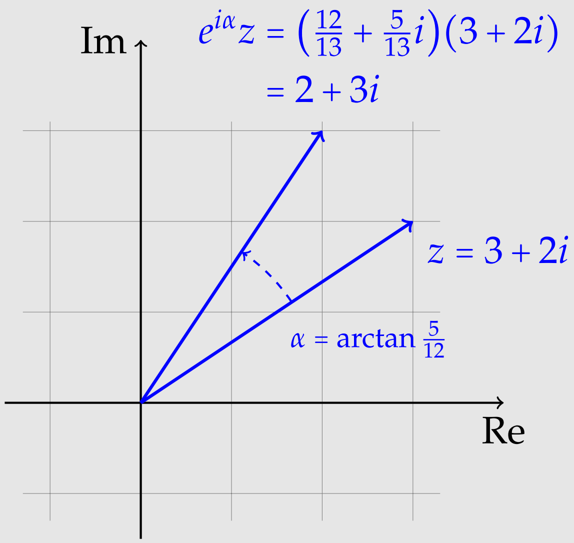
Produkten beror på valet av koordinatsystem!

Geometriskt sett är alla riktningar likvärdiga, men valet av koordinatsystem innebär ett symmetribrott; t.ex. beter sig vektorer längs reella axeln annorlunda än vektorer längs imaginära axeln, med avseende på denna multiplikation.

Trots detta är komplexa tal användbara i tvådimensionell geometri, på grund av egenskapen att när man multiplicerar två komplexa tal z och w kommer deras belopp att multipliceras och deras argument att adderas.

Operationen att **vrida** en vektor vinkeln α moturs i planet kan alltså utföras genom att multiplicera motsvarande komplexa tal med $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$:





Alla de vanliga geometriska operationerna i $\mathbf{R}^2$ kan representeras som algebraiska operationer med komplexa tal:

- Addition av komplexa tal fungerar precis som **vektoraddition**.
- Komplex konjugering motsvarar **spegling** i reella axeln.
- Att ta real- och imaginärdelen motsvarar att **projicera** på reella respektive imaginära axeln.
- Mer allmänt kan man beräkna **skalärprodukten** mellan komplexa tal (betraktade som vektorer i $\mathbf{R}^2$)

  $$z = a + bi, \qquad w = c + di$$

  med formeln $\mathrm{Re}(z\overline{w})$.

  Bevis:

  $$\begin{aligned}\mathrm{Re}(z\overline{w}) &= \mathrm{Re}\big((a+bi)(c-di)\big)\\ &= \mathrm{Re}\big((ac+bd)+(bc-ad)i\big)\\ &= ac+bd\\ &= \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}\end{aligned}$$

En naturlig fråga:

> Finns det något liknande ”tredimensionellt” talsystem som kan användas för att beskriva de geometriska operationerna i $\mathbf{R}^3$?

Frågan om hur man skulle kunna multiplicera och dividera taltripplar sysselsatte i många år Irlands store vetenskapsman, **William Rowan Hamilton** (1805–1865).

Han försökte länge med tal på formen $a + bi + cj$, med två imaginära enheter i och j. Men det gick inget vidare…

Brev till sonen Archibald Hamilton, 1865:

> Every morning in the early part of the above-cited month [Oct 1843], on my coming down to breakfast, your (then) little brother William Edwin, and yourself, used to ask me, “Well, Papa, can you multiply triplets?” Whereto I was always obliged to reply, with a sad shake of the head: “No, I can only add and subtract them.”

Men en dag fick han en ljus idé! Brevet fortsätter:

> But on the 16th day of the same month – which happened to be a Monday, and a Council day of the Royal Irish Academy – I was walking in to attend and preside, and your mother was walking with me, along the Royal Canal, to which she had perhaps driven; and although she talked with me now and then, yet an under-current of thought was going on in my mind, which gave at last a result, whereof it is not too much to say that I felt at once the importance. An electric circuit seemed to close; and a spark flashed forth, the herald (as I foresaw, immediately) of many long years to come of definitely directed thought and work, by myself if spared, and at all events on the part of others, if I should even be allowed to live long enough distinctly to communicate the discovery. Nor could I resist the impulse – unphilosophical as it may have been – to cut with a knife on a stone of Brougham [Broome] Bridge, as we passed it, the fundamental formula with the symbols, i, j, k; namely,
>
> $$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

Hamilton fick alltså sina teorier att fungera med ”fyrdimensionella” tal

$$a + bi + cj + dk \qquad (a, b, c, d \in \mathbf{R})$$

som han döpte till **kvaternioner**.

Multiplikationen är **associativ** men **icke-kommutativ**.
Från $i^2 = -1$ och $ijk = -1$ fås

$$i = (-i)(-1) = (-i)(ijk) = -(i^2)(jk) = -(-1)jk = jk,$$

alltså

$$jk = i.$$

De allmänna reglerna

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j, \quad ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j$$

visas på liknande sätt.

Kvaternioner har en **realdel** och en **vektordel**:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(a + bi + cj + dk) &= a \\ \mathrm{Ve}(a + bi + cj + dk) &= bi + cj + dk \end{aligned}$$

Ordet *vektor* myntades faktiskt av Hamilton, som beteckning för en ”ren kvaternion”, alltså en med realdel noll.

Om man multiplicerar två kvaternioner

$$\begin{aligned} q_1 &= a + \mathbf{x} = a + x_1 i + x_2 j + x_3 k \\ q_2 &= b + \mathbf{y} = b + y_1 i + y_2 j + y_3 k \end{aligned}$$

så får man

$$q_1 q_2 = (a + \mathbf{x})(b + \mathbf{y}) = ab + a\mathbf{y} + b\mathbf{x} + \mathbf{x}\mathbf{y},$$

där **xy** beräknas på nästa sida.

Produkten av de rena kvaternionerna $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ blir

$$\begin{aligned}
\mathbf{xy} &= (x_1 i + x_2 j + x_3 k)(y_1 i + y_2 j + y_3 k) \\
&= x_1 y_1 i^2 + x_2 y_2 j^2 + x_3 y_3 k^2 \\
&\quad + x_1 y_2 ij + x_2 y_1 ji + x_1 y_3 ik + x_3 y_1 ki + x_2 y_3 jk + x_3 y_2 kj \\
&= -(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) \\
&\quad + (x_2 y_3 - x_3 y_2) i + (x_3 y_2 - x_2 y_3) j + (x_1 y_2 - x_2 y_1) k.
\end{aligned}$$

Här dök några välbekanta uttryck upp!

Med modern notation skulle vi kunna skriva detta såhär:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(\mathbf{xy}) &= -\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \\
\operatorname{Ve}(\mathbf{xy}) &= \mathbf{x} \times \mathbf{y}
\end{aligned}$$

Den terminologi och notation för vektoralgebra och vektoranalys som används nu (skalärprodukt, kryssprodukt, divergens, rotation) infördes på 1880-talet av den amerikanske fysikern **Josiah Willard Gibbs** (1839–1903), och populariserades i boken *Vector Analysis* (1901) av E. B. Wilson.

En **vridning** i $\mathbf{R}^3$ (vinkeln α kring enhetsvektorn $\mathbf{a}$) representeras av kvaternionen

$$q = \cos\tfrac{\alpha}{2} + \mathbf{a}\sin\tfrac{\alpha}{2}$$

enligt följande formel:

$$R_{\mathbf{a},\alpha}(\mathbf{y}) = q\,\mathbf{y}\,\overline{q} = (\cos\tfrac{\alpha}{2} + \mathbf{a}\sin\tfrac{\alpha}{2})\,\mathbf{y}\,(\cos\tfrac{\alpha}{2} - \mathbf{a}\sin\tfrac{\alpha}{2}).$$

Bevis: Gör uppdelningen $\mathbf{y} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, där $\mathbf{u} \parallel \mathbf{a}$ och $\mathbf{v} \perp \mathbf{a}$. Då är

$$\mathbf{au} = -\mathbf{a}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{ua}, \qquad \mathbf{av} = -0 + \mathbf{a}\times\mathbf{v} = -\mathbf{va},$$

så att $q\,\mathbf{u}\,\overline{q} = \mathbf{u}\,q\,\overline{q} = \mathbf{u} = R_{\mathbf{a},\alpha}(\mathbf{u})$ och

$$\begin{aligned}
q\,\mathbf{v}\,\overline{q} &= (\cos\tfrac{\alpha}{2} + \mathbf{a}\sin\tfrac{\alpha}{2})\,\mathbf{v}\,(\cos\tfrac{\alpha}{2} - \mathbf{a}\sin\tfrac{\alpha}{2}) \\
&= (\cos\tfrac{\alpha}{2} + \mathbf{a}\sin\tfrac{\alpha}{2})(\cos\tfrac{\alpha}{2} + \mathbf{a}\sin\tfrac{\alpha}{2})\,\mathbf{v} \\
&= (\cos^2\tfrac{\alpha}{2} + \mathbf{a}^2\sin^2\tfrac{\alpha}{2} + 2\mathbf{a}\cos\tfrac{\alpha}{2}\sin\tfrac{\alpha}{2})\,\mathbf{v} \qquad (\text{obs. att } \mathbf{a}^2 = -1) \\
&= (\cos\alpha + \mathbf{a}\sin\alpha)\,\mathbf{v} \\
&= \mathbf{v}\,\cos\alpha + (\mathbf{a}\times\mathbf{v})\,\sin\alpha = R_{\mathbf{a},\alpha}(\mathbf{v}).
\end{aligned}$$

(Detta sätt att representera vridningar används t.ex. inom datorgrafik.)

Om man gör **två vridningar**, först $R_{\mathbf{a},\alpha}(\mathbf{y}) = q\,\mathbf{y}\,\overline{q}$ och sedan $R_{\mathbf{b},\beta}(\mathbf{y}) = r\,\mathbf{y}\,\overline{r}$, så kommer den **sammansatta vridningen**

$$R_{\mathbf{c},\gamma}(\mathbf{y}) = R_{\mathbf{b},\beta}\big(R_{\mathbf{a},\alpha}(\mathbf{y})\big) = r\,(q\,\mathbf{y}\,\overline{q})\,\overline{r} = rq\,\mathbf{y}\,\overline{rq}$$

alltså att representeras av kvaternionen

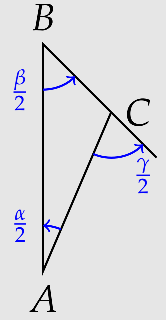
$$\begin{aligned} rq &= (\cos\tfrac{\beta}{2} + \mathbf{b}\sin\tfrac{\beta}{2})(\cos\tfrac{\alpha}{2} + \mathbf{a}\sin\tfrac{\alpha}{2}) \\ &= \left(\cos\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\beta}{2} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})\sin\tfrac{\alpha}{2}\sin\tfrac{\beta}{2}\right) \\ &\qquad + \left(\mathbf{b}\cos\tfrac{\alpha}{2}\sin\tfrac{\beta}{2} + \mathbf{a}\sin\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\beta}{2} + (\mathbf{b}\times\mathbf{a})\sin\tfrac{\alpha}{2}\sin\tfrac{\beta}{2}\right) \\ &= \cos\tfrac{\gamma}{2} + \mathbf{c}\sin\tfrac{\gamma}{2}, \end{aligned}$$

vilket ger formlerna för den sammansatta vridningens vinkel γ och axel $\mathbf{c}$.

Hamilton var dock inte först med dessa formler.

Den franske bankiren **Olinde Rodrigues** (1795–1850) publicerade 1840 nedanstående geometriska konstruktion för att bestämma **c** och γ, och tog därifrån fram formlerna med sfärisk trigonometri:

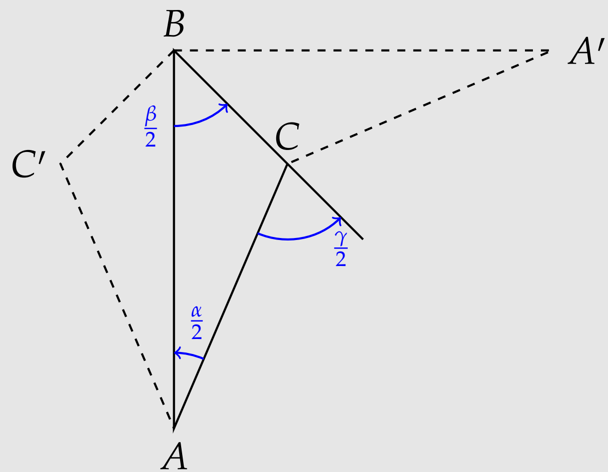
> Enhetsvektorerna **a**, **b**, **c** är ortsvektorer för punkter A, B, C på enhetssfären, som bildar en sfärisk triangel med följande vinklar:



(Schematisk figur; linjerna symboliserar storcirkelbågar på enhetssfären.)

Givet punkterna A och B och vinklarna α och β, bestäms alltså C:s läge av skärningen mellan två storcirkelbågar, och då blir vinkeln $\gamma/2$ vad den blir.

Bevis:



Den första vridningen kring A avbildar C på C', och vridningen kring B avbildar sedan C' tillbaka till C. Punkten C fixeras alltså av den sammansatta vridningen, och måste därmed ligga på dess vridningsaxel.

Den första vridningen kring A fixerar A, och vridningen kring B avbildar sedan A på A'. Den sammansatta vridningen kring C avbildar alltså A på A', och dess vridningsvinkeln måste därmed vara γ.

Men Rodrigues var inte heller först med detta, utan det var som vanligt **Carl Friedrich Gauss** (1777–1855)…

I efterlämnade opublicerade anteckningar från c:a 1819 visar han hur en allmän transformation av rummet (vridning & skalning) kan skrivas med en 3×3-matris i termer av fyra parametrar (a, b, c, d), och sedan kommer formlerna för sammansättning av två sådana transformationer:

$$
\begin{aligned}
a\alpha - b\beta - c\gamma - d\delta &= A \\
a\beta + b\alpha - c\delta + d\gamma &= B \\
a\gamma + b\delta + c\alpha - d\beta &= C \\
a\delta - b\gamma - c\beta - d\alpha &= D
\end{aligned}
$$

$$(a, b, c, d)(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (A, B, C, D)$$

tillsammans med kommentaren

> Es ist also $(a, b, c, d)(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ nicht mit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)(a, b, c, d)$ zu verwechseln.

Som kvaternionmultiplikation $(\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k)(a + bi + cj + dk)$, ju!

(Se åttonde bandet av Gauss’ samlade verk, s. 357–361. Finns i universitetsbiblioteket!)

Högre dimensioner?

Det var väldigt mycket tjat om tre dimensioner!

Kan man inte göra något liknande i $\mathbf{R}^n$?

Inspirerade av kvaternionerna upptäckte **John Graves** (1843) och **Arthur Cayley** (1845), oberoende av varandra, **oktonionerna**, som är tal av formen

$$x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3 + x_4 i_4 + x_5 i_5 + x_6 i_6 + x_7 i_7 \qquad (x_k \in \mathbf{R})$$

där de sju imaginära enheterna i_k multipliceras enligt regler som vi inte går in på här. (Denna multiplikation är inte ens associativ längre.)

Vektordelen av produkten av två rena oktonioner ger upphov till ett slags kryssprodukt i $\mathbf{R}^7$, men där slutar det roliga ifall man söker en produkt ”vektor gånger vektor lika med vektor” med någorlunda vettiga och intressanta egenskaper.

Så vi ska titta på andra produkter där resultatet blir geometriska objekt av ett annat slag, **multivektorer**.

Yttre produkt och multivektorer

Den tyske skolläraren **Hermann Grassmann** (1809–1877) är upphovsman till den **yttre produkten** (eller **kilprodukten**)

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} \wedge \cdots \wedge \mathbf{z}.$$

Fråga: Givet två vektorer $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ i $\mathbf{R}^n$, säg icke-parallella till att börja med, vilka matematiska objekt kan man koppla till dem? (Det ska vara något geometriskt, dvs. oberoende av val av koordinatsystem.)

Tänkbart svar: Det **tvådimensionella underrum** som de spänner upp.

Eller: Den **parallellogram** som har $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ som kantvektorer. (Vi vet ju att kryssprodukten i $\mathbf{R}^3$ hänger ihop med arean av denna.)

Om $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ är parallella så kollapsar parallellogrammen till något med arean noll, vilket hänger ihop med kryssproduktens **antisymmetri**: det är ju så att $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x}$ medför $\mathbf{x} \times \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Grassmanns idé är att bygga en associativ och bilinjär produkt utgående enbart från kravet att $\mathbf{x} \wedge \mathbf{x} = 0$ för alla $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$.

En sådan produkt måste vara antikommutativ:

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \wedge (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \\ &= \mathbf{x} \wedge \mathbf{x} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} + \mathbf{y} \wedge \mathbf{x} + \mathbf{y} \wedge \mathbf{y} \\ &= 0 + \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} + \mathbf{y} \wedge \mathbf{x} + 0 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbf{y} \wedge \mathbf{x} = -\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$$

Då kan vi t.ex. göra en sådan här uträkning, om $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} &= (x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3) \wedge (y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3) \\
&= x_1y_1(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1) + x_1y_2(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) + x_1y_3(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3) \\
&\quad + x_2y_1(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1) + x_2y_2(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_2) + x_2y_3(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) \\
&\quad + x_3y_1(\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1) + x_3y_2(\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2) + x_3y_3(\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_3) \\
&= (x_2y_3 - x_3y_2)(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) \\
&\quad + (x_3y_1 - x_1y_3)(\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1) \\
&\quad + (x_1y_2 - x_2y_1)(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)
\end{aligned}$$

Det blir alltså precis som för kryssprodukt, förutom att vi inte säger att $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j$ måste bli en ny vektor, utan det kan bli något annat slags objekt.

Det vi vet om kryssprodukt säger oss att produkten $\mathbf{x}' \wedge \mathbf{y}'$ skulle ge exakt samma resultat som $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ ovan, ifall $\mathbf{x}'$ och $\mathbf{y}'$ är två andra vektorer som ligger i samma plan som $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$, och är orienterade likadant i förhållande till varandra som $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$, och spänner upp en parallellogram med samma area som den som $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ spänner upp.

Detta är nyckeln till att tolka det algebraiska objektet $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ geometriskt.

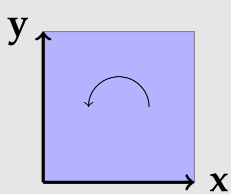
En **vektor** illustreras ju ofta med en "pil", dvs. en riktad sträcka $\overrightarrow{PQ}$ från punkten P till punkten Q.

Men en annan riktad sträcka $\overrightarrow{RS}$ sägs ju representera **samma** vektor, ifall linjesegmentet från R till S är parallellt med det från P till Q, och orienterat åt samma håll, och lika långt.

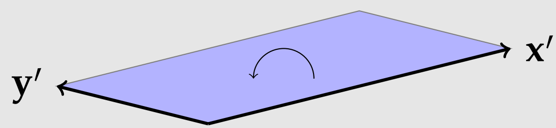
Man säger att en vektor är en *ekvivalensklass* av sådana riktade sträckor.

Objektet $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ är en **bivektor**, vilket (preliminärt) är en ekvivalensklass av orienterade parallellogrammer.

Två parallellogrammer representerar samma bivektor om och endast om de är parallella (alltså ligger längs samma plan), likadant orienterade, och har samma area:



är ekvivalent med



(så $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \mathbf{x}' \wedge \mathbf{y}'$)

Man kan även tänka på en (nollskild) vektor i $\mathbf{R}^n$ som ett endimensionellt underrum av $\mathbf{R}^n$, försett med en orientering, och med ett positivt tal associerat till sig (vektorns belopp/längd).

En (nollskild) bivektor blir på motsvarande sätt ett tvådimensionellt underrum av $\mathbf{R}^n$, försett med en orientering, och med ett positivt tal associerat till sig (bivektorns belopp/area).

Och man kan fortsätta! En **trivektor** är en ekvivalensklass av orienterade parallellepipeder med samma volym, alternativt ett tredimensionellt underrum av $\mathbf{R}^n$, försett med en orientering, och med ett positivt tal associerat till sig (trivektorns belopp/volym). Detta är vad man får om man tar yttre produkten av tre vektorer.

Och så vidare…

Låt oss prova på att beräkna en trivektor i $\mathbf{R}^3$:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}\wedge\mathbf{y}\wedge\mathbf{z} &= (x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3)\\ &\quad\wedge (y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3)\\ &\quad\wedge (z_1\mathbf{e}_1 + z_2\mathbf{e}_2 + z_3\mathbf{e}_3)\\ &= x_1y_1z_1(\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_1) + x_1y_1z_2(\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2) + \cdots\\ &\quad + x_1y_2z_3(\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3) + \cdots + x_1y_3z_2(\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_2)\\ &\quad + \cdots + x_3y_3z_3(\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_3)\\ &= (x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2\\ &\quad - x_2y_1z_3 - x_1y_3z_2 - x_3y_2z_1)\,(\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3)\end{aligned}$$

(Observera att alla termer som innehåller samma faktor två gånger försvinner, t.ex. $\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2 = -0\wedge\mathbf{e}_2 = 0$.)

Det som överlever framför $\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3$ är determinanten $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$, vilket som bekant är (plus eller minus) **volymen** av parallellepipeden med kantvektorerna $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, om $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ är en höger-ON-bas.

Vi kan prova att ta yttre produkten av två vektorer i R^4 också:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} &= (x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 + x_4\mathbf{e}_4) \wedge (y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3 + y_4\mathbf{e}_4) \\
&= (x_1y_2 - x_2y_1)(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \\
&\quad + (x_1y_3 - x_3y_1)(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3) \\
&\quad + (x_1y_4 - x_4y_1)(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_4) \\
&\quad + (x_2y_3 - x_3y_2)(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) \\
&\quad + (x_2y_4 - x_4y_2)(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4) \\
&\quad + (x_3y_4 - x_4y_3)(\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_3)
\end{aligned}
$$

Det var ju inga problem!

Men här blev det sex termer, så det finns ingen chans att omtolka resultatet som en vektor i $\mathbf{R}^4$, utan vi måste verkligen låta det vara en bivektor.

(I $\mathbf{R}^3$ fick vi tre termer, och kunde relatera bivektorn $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ till vektorn $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ via korrespondensen $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \leftrightarrow \mathbf{e}_1$, osv., som kopplar ihop ett plan och dess normalvektor.)

I $\mathbf{R}^3$ är varje bivektor en linjärkombination av

$$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2, \qquad \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3, \qquad \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$$

och varje trivektor är en konstant gånger $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$.

I $\mathbf{R}^4$ är varje bivektor en linjärkombination av de sex bas-bivektorerna $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j$ på förra sidan, varje trivektor är en linjärkombination av

$$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, \qquad \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4, \qquad \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4, \qquad \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4$$

och varje kvadrivektor (eller vad det kan heta) är en konstant gånger $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4$.

Allmänt: i $\mathbf{R}^n$ bildar k-vektorerna ett $\binom{n}{k}$-dimensionellt vektorrum.

En allmän **multivektor** är en hybrid: en linjärkombination av en skalärdel, en vektordel, en bivektordel, en trivektordel, etc., exempelvis

$$5 + 3\,\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 17\,\mathbf{e}_{12} + 43\,\mathbf{e}_{234},$$

med det praktiska förkortade skrivsättet $\mathbf{e}_{i\ldots j}$ istället för $\mathbf{e}_i \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_\mathbf{j}$.

Varje multivektor i $\mathbf{R}^n$ kan alltså skrivas som en linjärkombination av

$$1 \qquad \{\mathbf{e}_i\} \qquad \{\mathbf{e}_{ij}\}_{i<j} \qquad \{\mathbf{e}_{ijk}\}_{i<j<k} \qquad \cdots \qquad \mathbf{e}_{123\ldots n}$$

vilket ger

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

stycken koefficienter.

En sådan hybrid har i allmänhet ingen naturlig geometrisk tolkning, utan det är bara ett element i den **yttre algebran** för $\mathbf{R}^n$, alltså det 2^n-dimensionella vektorrum som den yttre produkten är definierad på.

Faktum är att vi måste revidera vår tolkning av homogena multivektorer också, för det visar sig att t.ex. bivektorn $\mathbf{e}_{12} + \mathbf{e}_{34}$, alltså

$$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4,$$

inte går att skriva som $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ för några vektorer $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$, och därför inte kan tolkas som en parallellogram.

Så det är bara **enkla** multivektorer, dvs. sådana som råkar gå att skriva på den faktoriserade formen $\mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_k$, som har den geometriska tolkning som beskrivits ovan.

Cliffordprodukten

Den yttre produkten är användbar för att beräkna volymer, och den har den trevliga egenskapen att $\mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_k$ är **noll** om och endast om vektorerna $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ är **linjärt beroende**.

Men den är lite ensam utan någon skalärprodukt (som ju också ibland kallas för *inre produkt*).

Det finns ett sätt att multiplicera multivektorer som kopplar samman inre och yttre produkt. Denna produkt är uppkallad efter **William Kingdon Clifford** (1845–1879), och brukar helt enkelt skrivas $\mathbf{xy}$. Den bygger på relationen

$$\mathbf{x}^2 = |\mathbf{x}|^2$$

för alla vektorer $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$.

Om $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ är en ON-bas får man då $\mathbf{e}_k^2 = 1$ istället för $\mathbf{e}_k \wedge \mathbf{e}_k = 0$, men fortfarande

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_{ij}$$

för $i \neq j$.

Såhär blir Cliffordprodukten av två vektorer i R^4:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{xy} &= (x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 + x_4\mathbf{e}_4)(y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3 + y_4\mathbf{e}_4) \\
&= (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4) \\
&\quad + (x_1y_2 - x_2y_1)\,\mathbf{e}_{12} \\
&\quad + (x_1y_3 - x_3y_1)\,\mathbf{e}_{13} \\
&\quad + (x_1y_4 - x_4y_1)\,\mathbf{e}_{14} \\
&\quad + (x_2y_3 - x_3y_2)\,\mathbf{e}_{23} \\
&\quad + (x_2y_4 - x_4y_2)\,\mathbf{e}_{24} \\
&\quad + (x_3y_4 - x_4y_3)\,\mathbf{e}_{34} \\
&= \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \mathbf{x}\wedge\mathbf{y}
\end{aligned}
$$

Produkten $\mathbf{xy}$ är alltså en hybrid, en multivektor som består av en **skalärdel** $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ (symmetrisk) och en **bivektordel** $\mathbf{x}\wedge\mathbf{y}$ (antisymmetrisk).

(Och om man multiplicerar ihop flera vektorer får man en salig blandning av termer av olika grad.)

Med en liknande beräkning som för kvaternionerna ovan kan man visa att avbildningen

$$S_{\mathbf{n}}(\mathbf{y}) = -\mathbf{n}\mathbf{y}\mathbf{n}$$

är en **spegling** i det hyperplan som har enhetsvektorn $\mathbf{n}$ som normal.

Varje isometri F på $\mathbf{R}^n$ (**vridning** eller **vridspegling**) kan skrivas som en sammansättning av ändligt många speglingar, och kan därför skrivas med Cliffordprodukt,

$$\begin{aligned} F(\mathbf{y}) &= (-1)^k (\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2\cdots\mathbf{n}_k)\,\mathbf{y}\,(\mathbf{n}_k\cdots\mathbf{n}_2\mathbf{n}_1) \\ &= (\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2\cdots\mathbf{n}_k)\,\mathbf{y}\,\overline{(\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2\cdots\mathbf{n}_k)}, \end{aligned}$$

om man definierar *konjugering* så att $\overline{\mathbf{x}} = -\mathbf{x}$ och $\overline{\mathbf{x}\mathbf{y}} = \overline{\mathbf{y}}\,\overline{\mathbf{x}}$.

Avbildningen F representeras alltså av multivektorn $\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2\cdots\mathbf{n}_k$, som är en hybrid med skalärdel, bivektordel, etc., om k är jämnt (vridning) eller med vektordel, trivektordel, etc., om k är udda (vridspegling).

Om man inför en operation som kallas *kontraktion*, som är "dual" till den yttre produkten, så kan man även snyggt generalisera **projektionsformeln** till projektion på underrum av godtycklig dimension.

Såhär: Kontraktion från vänster med en basvektor beräknas genom att byta plats så att den basvektorn kommer först, och sedan stryka den, t.ex.

$$\mathbf{e}_3 \lrcorner \mathbf{e}_{1234} = \mathbf{e}_3 \lrcorner \mathbf{e}_{3124} (-1)^2 = \mathbf{e}_{124} (-1)^2 = \mathbf{e}_{124},$$

och det blir noll om den basvektorn inte är med, t.ex.

$$\mathbf{e}_3 \lrcorner \mathbf{e}_{124} = 0.$$

Räkneregel (motsvarande gäller med fler eller färre faktorer också):

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \lrcorner (\mathbf{y}_1 \wedge \mathbf{y}_2 \wedge \mathbf{y}_3 \wedge \mathbf{y}_4) = {} & (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}_1)\, \mathbf{y}_2 \wedge \mathbf{y}_3 \wedge \mathbf{y}_4 \\ & - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}_2)\, \mathbf{y}_1 \wedge \mathbf{y}_3 \wedge \mathbf{y}_4 \\ & + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}_3)\, \mathbf{y}_1 \wedge \mathbf{y}_2 \wedge \mathbf{y}_4 \\ & - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}_4)\, \mathbf{y}_1 \wedge \mathbf{y}_2 \wedge \mathbf{y}_3. \end{aligned}$$

Formel för projektion på det k-dim. underrum som representeras av den enkla k-vektorn A:

$$P_A(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \lrcorner A)\, A^{-1}.$$

Rummet av multivektorer, med Cliffordprodukt istället för yttre produkt, kallas **Cliffordalgebran** för $\mathbf{R}^n$.

Cliffordalgebran för $\mathbf{R}^2$ består av multivektorer av formen

$$a + (x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2) + b\,\mathbf{e}_{12}$$

där

$$\mathbf{e}_{12}^2 = \mathbf{e}_1 \underbrace{\mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_1}_{=-\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2} \mathbf{e}_2 = -\underbrace{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1}_{=1} \underbrace{\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2}_{=1} = -1$$

så att den *jämna delalgebran* innehållande element av formen $a + b\,\mathbf{e}_{12}$ är en "kopia" av det komplexa talsystemet.

Cliffordalgebran för $\mathbf{R}^3$ består av multivektorer av formen

$$a + (x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2 + z\,\mathbf{e}_3) + (bi + cj + dk) + u\,\mathbf{e}_{123}$$

där $i = -\mathbf{e}_{23}$, $j = -\mathbf{e}_{31}$ och $k = -\mathbf{e}_{12}$ uppfyller Hamiltons relationer $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, så att den jämna delalgebran innehållande element av formen $a + bi + cj + dk$ är en "kopia" av kvaternionerna.

När vi beskrev vridningar i $\mathbf{R}^2$ och $\mathbf{R}^3$ tidigare så var allting uttryckt enbart i termer av komplexa tal respektive kvaternioner.

När man beskriver vridningar med Cliffordprodukt separeras elementen som representerar vridningarna (multivektorer i den jämna delalgebran av Cliffordalgebran) från de objekt som vrids (vektorerna), vilket ger en renare geometrisk bild och undviker många fallgropar som historiskt sett har orsakat förvirring och kontroverser, framför allt vad gäller kvaternioner.

(T.ex. att rena kvaternioner verkar bete sig som ”pseudovektorer” snarare än som riktiga vektorer. Men på förra sidan såg vi ju mycket riktigt kvaternionerna dyka upp som *bivektorer* snarare än *vektorer*, så det blir helt naturligt i Clifford-sammanhanget.)

Hela denna apparat, med Cliffordprodukt, yttre produkt och kontraktion, brukar ibland marknadsföras under namnet **geometrisk algebra**.

Cliffordalgebror används flitigt i modern matematisk fysik, om än ibland i förklädd skepnad.

T.ex. kan Cliffordalgebran för $\mathbf{R}^3$ representeras med komplexa 2×2-matriser, där 1, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ motsvaras av **Paulis spinnmatriser** (från kvantmekaniken):

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cliffordprodukten motsvaras då såklart av vanlig matrisprodukt.

Och i speciella relativitetsteorin används Minkowskirummet $\mathbf{R}^{1,3}$, som är som $\mathbf{R}^4$ förutom att man har en ”skalärprodukt” som inte är positivt definit: $\mathbf{e_0}^2 = +1$, $\mathbf{e_1}^2 = \mathbf{e_2}^2 = \mathbf{e_3}^2 = -1$. Cliffordalgebran för $\mathbf{R}^{1,3}$ kan representeras med reella 4×4-matriser, **Diracs γ-matriser**. Istället för att beskriva elektriska fält med ett vektorfält

$$E = E_1\mathbf{e}_1 + E_2\mathbf{e}_2 + E_3\mathbf{e}_3$$

och magnetiska fält med ett (pseudo)vektorfält

$$B = B_1\mathbf{e}_1 + B_2\mathbf{e}_2 + B_3\mathbf{e}_3$$

slår man i relativitetsteorin ihop dem till ett enda bivektorfält

$$E_1\mathbf{e}_{10} + E_2\mathbf{e}_{20} + E_3\mathbf{e}_{30} - B_1\mathbf{e}_{23} - B_2\mathbf{e}_{31} - B_3\mathbf{e}_{12}.$$

Precis som observatörer i relativ rörelse inte kan enas om vad som är ”samtidigt” och ”på samma plats”, eftersom de använder olika koordinatsystem i rumtiden, kan de heller inte enas om vad som är ”elektriskt” och ”magnetiskt”; när man byter bas (Lorentztransformation) ändras ju det kombinerade fältet till

$$\widetilde{E}_1\mathbf{f}_{10} + \widetilde{E}_2\mathbf{f}_{20} + \widetilde{E}_3\mathbf{f}_{30} - \widetilde{B}_1\mathbf{f}_{23} - \widetilde{B}_2\mathbf{f}_{31} - \widetilde{B}_3\mathbf{f}_{12}.$$

där de nya komponenterna är blandningar av *alla* de gamla.

Det finns mycket, mycket mer att säga om Cliffordalgebror och dylikt. Men nu får det räcka för denna gång…

SLUT