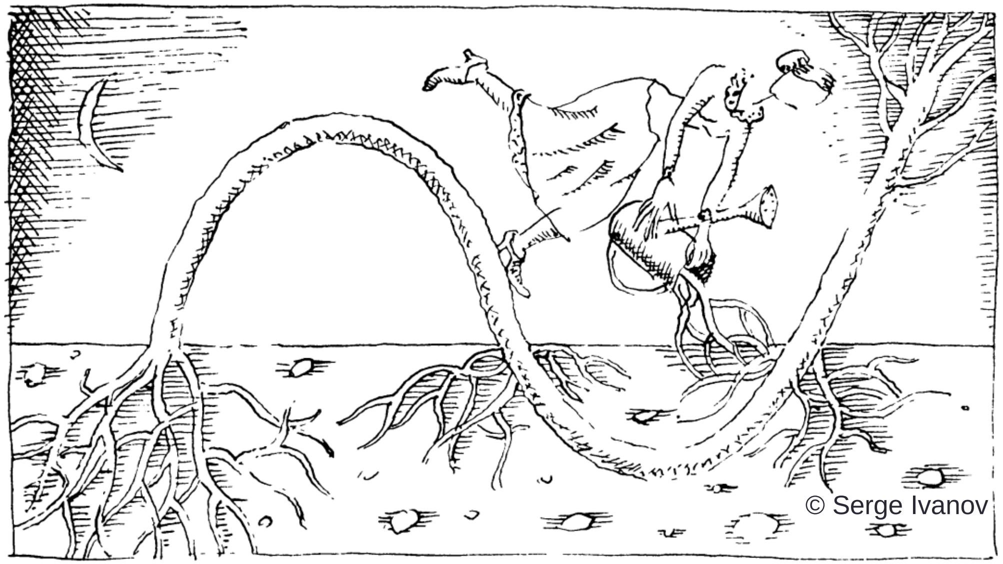
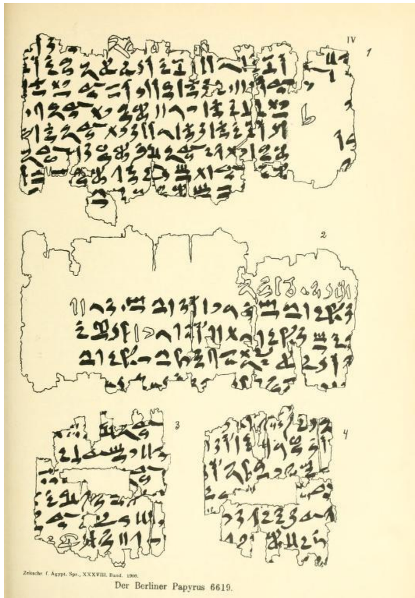


Tredjegradsekvationens kontrovers: Från Cardanos formel till monstergruppen

Vladimir Tkatjev

Prolog: Andragradsekvationer



- Berlinpapyrus (ca 1800 f.Kr) ger lösningar av enkla andragradsekvationer

Exempel. *Arean och omkrets av en rektangel är respektive 15 och 16, bestäm rektangelns sidor*:

$$\begin{cases} xy = 15 \\ x + y = 16/2 \end{cases}$$

- Brahmagupta (598-668) Indien, en indisk astronom och matematiker, var den första att hitta en metod för att lösa andragradsekvationer

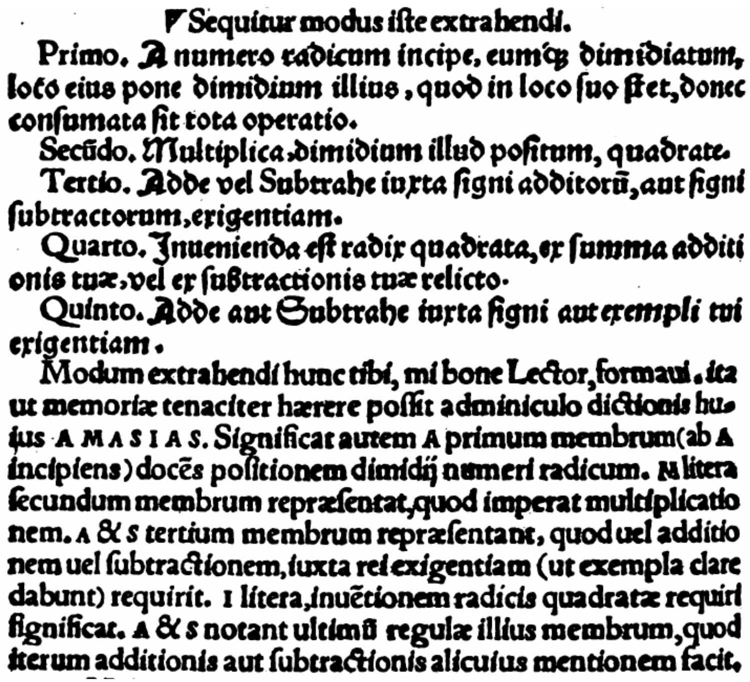
$$ax^2 + bx = c$$

Prolog: Andragradsekvationer

- Michael Stifel (1487-1567), en tysk munk och matematiker, var den första att lösa en allmän andragradsekvation.

- *Arithmetica integra* (1544)

  Metod kallades AMASIAS (se bilden)



Sequitur modus iste extrahendi.

Primo. A numero radicum incipe, cumq; dimidiatum, loco eius pone dimidium illius, quod in loco suo stet, donec consumata sit tota operatio.

Secũdo. Multiplica dimidium illud positum, quadrate.

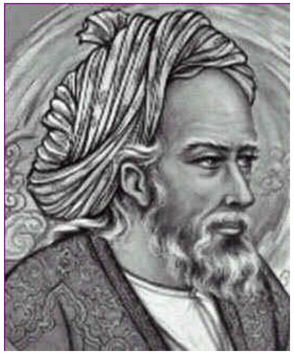
Tertio. Adde vel Subtrahe iuxta signi additorũ, aut signi subtractorum, exigentiam.

Quarto. Inuenienda est radix quadrata, ex summa additionis tuæ, vel ex subtractionis tuæ relicto.

Quinto. Adde aut Subtrahe iuxta signi aut exempli tui exigentiam.

Modum extrahendi hunc tibi, mi bone Lector, formaui, ita ut memoriæ tenaciter hærere possit adminiculo dictionis huius AMASIAS. Significat autem A primum membrum (ab A incipiens) docẽs positionem dimidij numeri radicum. M litera secundum membrum repræsentat, quod imperat multiplicationem. A & S tertium membrum repræsentant, quod uel additionem uel subtractionem, iuxta rei exigentiam (ut exempla clare dabunt) requirit. I litera, inuẽtionem radicis quadratæ requiri significat. A & S notant ultimũ regulæ illius membrum, quod iterum additionis aut subtractionis alicuius mentionem facit.

Första försök



Omar Khayyam (1048-1122), persisk matematiker, filosof, astronom, poet.

Khayyam ger lösning av tredjegradsekvationen $x^3 + cx = d$ med hjälp av *geometrisk algebra* (d.v.s. grafisk lösning).

För att lösa olika typer kubiska ekvationer (totalt 14 stycken) använder Khayyam kägelsnitt (parabler, hyperboler, ellipser).

Idé: en lösning x till ekvationen $x^3 + cx = d$ satisfierar även systemet

$$\begin{cases} \left(x - \frac{d}{2c}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{d}{2c}\right)^2 \\ x^2 = y\sqrt{c} \end{cases}$$

Nackdel: ger bara approximativa värde för rötterna

Första försök

Luca Pacioli (1445-1517), en italiensk franciskanermunk och matematiker, nära vän till Leonardo da Vinci.

1494 publicerar Pacioli *Summa de Arithmetica* där bl.a. han påstår att det inte går att hitta någon allmän algebraisk lösning till en tredjegradsekvationen.

Detta avrådde flera matematiker från att ens försöka hitta en lösning men några matematiker blev tvärtom sporrade att lösa ekvationen.

Del Ferros regel

1501-1502 föreläste Pacioli vid universitet i Bolgna där en av hans kollegor var Scipione del Ferro (1465-1526), en matematikprofessorn i Bologna och väldigt omtyckt föreläsare i aritmetik och geometri.

1515 har del Ferro funnit en lösningsmetod (*del Ferros regel*) för en stympad tredjegradsekvation

$$x^3 + ax = b$$

Han publicerade aldrig sin lösning vilket var vanligt på den tiden (man behandlade matematiska upptäckter som personliga ägodelar).

Efter hans död i 1526 arvs anteckningsbok med bl.a. hans formel av hans svärson Hannibal Nave, som var gift med del Ferros dotter Filippa

Del Ferro även meddelade under tysthetslöfte sitt resultat till en av sina elever, Antonio Maria Fiore

Duellen

Nicocolo Fantana Tartaglia (1500-1557), lärare i matematik i Verona och Venedig. När Frankrike invaderade Venedig 1512 utsattes Tartaglia för en svår misshandel, som för framtiden kvarlämnade det lyte, varav han fick sitt tillnamn (*tartaglia*, "den stammande").

1530 uppmannade Antonio Maria Fiore till en offentlig debatt Zuanne de Tonini da Coi, matematiklärare från Brescia. Man ska lösa bl.a.

$$x^3 + 6x^2 = 5$$
$$x^3 + 6x^2 + 8x = 1000$$

De Coi ber om hjälp hans vän, Nicocolo Tartaglia. Först vägrar Tartaglia att hjälpa: han är välmedveten om Paciolis beslut om olösbarhet. Men efter ett par veckor hävdar han att han har hittat en mirakulös lösning!

Duellen

1530-1533, upptäcker Tartaglia en metod att lösa ekvationer så som

$$ax^3 + bx^2 = c$$

Metodens möjligheter är tyvärr begränsade men Tartaglia deklarerar att han äger en *underbar metod* för allmänna tredjegradsekvationer!

När Antonio Fiore lär sig av detta, kallar han Tartaglia till en offentlig debatt i januari1535. Fiore är helt övertygen att Tartaglia bluffar för att *del Ferros lösning* är övernaturlig och absolut ouppnåelig för en ”vanlig självlärd människa”!.

Tartaglia antar utmaningen: den 22 februari 1535 ska Fiore och Tartaglia byta (via en notarie) 30 problem. För lösningen gavs 50 dagar och en förlorare borde *bjuda en vinnare tillsammans med hans 29 vänner!*

Duellen

Bara efter avtalets ingående lär Tartaglia att Fiore ägde den akta del Ferros regel för en stympad tredjegradsekvation och försöker att utarbeta den till ett mer allmänt fall.

Tartaglia arbetar frenetiskt och endast tio dagar innan disputationen, den 12 februari 1535, lyckas han att knäcka ekvationen!

Som resultat lyckades Tartaglia lösa samtliga Fiores problem medan Fiore inte lyckades lösa det enda problem från Tartatglias lista. Orsaken var att Fiore inte kunde lösa kubiska ekvationer innehållande andragradstermer.

Vilken metod har använts?

Ingrediens 1: Kvadratkomplettering

$$x^2 + 4x + 3 = \left(x + \frac{4}{2}\right)^2 - (2^2 - 3) = (x+2)^2 - 1$$

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{1}$$

$$(x_1 - x_2)^2 = 1$$

Allmänt:

$$x^2 + ax + b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - D$$

där

$$D \coloneqq \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b = (x_1 - x_2)^2$$

kallas *diskriminant* (~ skillnaden).

Ingrediens 1: Kvadratkomplettering

Sammanfattningsvis, ekvationen

$$x^2 + ax + b = 0$$

kan lösas i två enkla steg:

$$y = x + \frac{a}{2}$$

$$y^2 = d$$

där $d = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b$. Detta kallas för en $\underbrace{\textit{resolvent}}_{\text{"lösa ut"}}$ *metod.*

Ingrediens 2: Viètes sats

x_1, x_2 är rötter av $x^2 + ax + b = 0$ om och endast om

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1 x_2 = b \end{cases}$$

Ty

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2$$

Denna metod kallas för *Viètes resolvent*

Ingrediens 3: del Ferros resolvent

Söker lösningen av $x^3 + px + q = 0$ som summan $x = u + v$:

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$$

$$u^3 + v^3 + \underbrace{(3uv + p)}_{=0}(u+v) + q = 0$$

$$3uv + p = 0 \quad \Longrightarrow \quad u^3 + v^3 = -q$$

Viètes system (resolvent):

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3 v^3 = -p^3/27 \end{cases}$$

med diskriminant

$$D = (-q)^2 - 4\left(-\frac{p^3}{27}\right) = \frac{4p^3 - q^2}{27}$$

Ingrediens 3: del Ferros resolvent

Sammanfattningsvis är del Ferros resolvent för $x^3 + px + q = 0$

$$\begin{cases} u + v = x \\ u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\dfrac{p}{3} \end{cases}$$

Exempel

Lös $x^3 - 3x - 2 = 0$. Antar att $x = u + v$, alltså

$$(u+v)^3 - 3(u+v) - 2 = 0$$

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - 3(u+v) - 2 = 0$$

$$u^3 + v^3 + (3uv - 3)(u+v) - 2 = 0$$

Väljer u och v så att $3uv - 3 = 0$, så att

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = 2 \\ uv = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = 2 \\ u^3v^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad u^3 \text{ och } v^3 \text{ är rötter av } y^2 - 2y + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 1$$

Så får vi $u = 1$, $v = 1$ och följaktligen $x = 2$.

Cardano vs Tartaglia

Gerolamo Cardano (1501-1576) professor i matematik och medicin, uppfinnare, verksam i Milano och Pavia.

1535-1536 börjar han skriva boken *Practica arithmetice* som ska överträffa Paciolis *Summa* och göra Cardano berömd.

En viktig ingrediens av den kommande boken ska vara lösningen av tredjegradsekvation. Under 1537-38 försöker Cardano självständigt hitta lösningen men lyckas inte.

HIERONIMI
C.CARDANI MEDICI MEDIOLA
NENSIS, PRACTICA ARITH
metice, & Mensurandi singularis. In qua
que preter alias cõtinentur, versa
pagina demonstrabit.

2 januari 1539 ber Cardano Tartaglia via pappershandlare Zuan Antonio da Bassano om lösningen och lovar att han presenterar med Tartaglias namn.

Tartaglia vägrar: ” Berätta för hans excellens att han måste förlåta mig, att när jag publicerar min uppfinning kommer det att vara i mitt eget arbete och inte i andres.”

Cardano vs Tartaglia

Våren 1539: Cardano ger inte upp och efter några ganska långa och hotfulla utbyten blev Tartaglia äntligen lockad till att acceptera en inbjudan att besöka Cardano i Milano.

Betet som Tartaglia nappade på var ett löfte av Cardano att introducera Tartaglia till den spanska vicekungen och befälhavaren i Milano, Alfonso d'Avalos. Tartaglia hade skrivit en bok om artilleri och en sådan kontakt skulle garantera honom en bra inkomst.

Även i Malino nekar Tartaglia att ge lösningen men den 25 mars 1539 ger han slutligen upp. Cardano lovar Tartaglia att inte offentliggöra den hemliga lösningsmetoden och får metoden i form av en dikt. Han håller sitt löfte och publicerar *Practica arithmetice* utan Tartaglias lösning.

Tartaglias dikt

När kuben och tingen tillsammans är lika med något diskret tal
finn två andra tal som skiljer sig åt med detta.
Då skall Ni taga som regel att deras produkt alltid är exakt
lika med kuben av en tredjedel av tingen.
Som en allmän regel är därefter resten av deras subtraherade kubikrötter
lika med det väsentliga tinget.
I den andra av dessa handlingar, då kuben förblir ensam,
skall Ni notera dessa övriga överensstämmelser:
Ni skall genast dela talet i två delar så att
det ena gånger det andra tydligt ger exakt kuben av en tredjedel av tingen.
Av dessa båda delar skall Ni alltid taga de sammanlagda kubikrötterna,
och denna summa kommer att vara Eder tanke.
Den tredje av dessa våra beräkningar löses med den andra om Ni ger noga akt,
eftersom de till sin natur näst intill överensstämmer.
Detta har jag funnit och det inte med klumpiga steg.
År ettusen fem hundra trettiofyra.
På starka och gedigna grunder i staden som omges av havet.

Ting: x
Kuben: x^3
Tal: koefficient

Ferrari vs Tartaglia

Ludovico Ferrari (1522-65) från Bologna, anlände till Cardanos hus som en sekreterare när han var fjorton. Cardano erkänner snart ungens exceptionella talanger och tar fullt ansvar för hans utbildning.

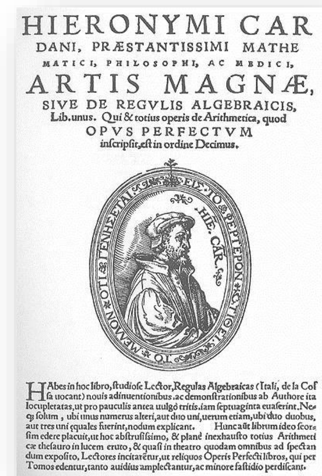
År 1540 upptäcker Ferrari lösning till en allmän tredjegradsekvation

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

Samma år upptäcker Ferrari lösning till en fjärdegradsekvation

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0!$$

1542 besöker Cardano och Ferrari Bologna där de träffar del Ferros svärson Hannibal Nave. De lär sig att del Ferro hade lösningen så tidigt som 1515, alltså behövs inget tillstånd från Tartaglias sida!



HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

HIE. CAR.

Habes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cossa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaserint. Neque solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aût librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarentur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

År 1545 publicerade Cardano lösningen av både tredje- och fjärdegradsekvationer i *Ars Magna* (*Den Stora Konsten*).

Stympad form

En tredjegradsekvation kan skrivas på en stympad form:

$$x^3 + ax^2 + \cdots = \underbrace{\left(x + \frac{a}{3}\right)^3}_{x^3 + ax^2 + \cdots} + Ax + B$$

och likadant för fjärdegradsekvation:

$$x^4 + ax^3 + \cdots = \underbrace{\left(x + \frac{a}{4}\right)^4}_{x^4 + ax^3 + \cdots} + Ax^2 + Bx + C =$$

Ferraris resolvent

En fjärdegradsekvation på en stympad form:

$$\underbrace{x^4 + px^2}_{kvadratkomplettera!} = qx + r$$

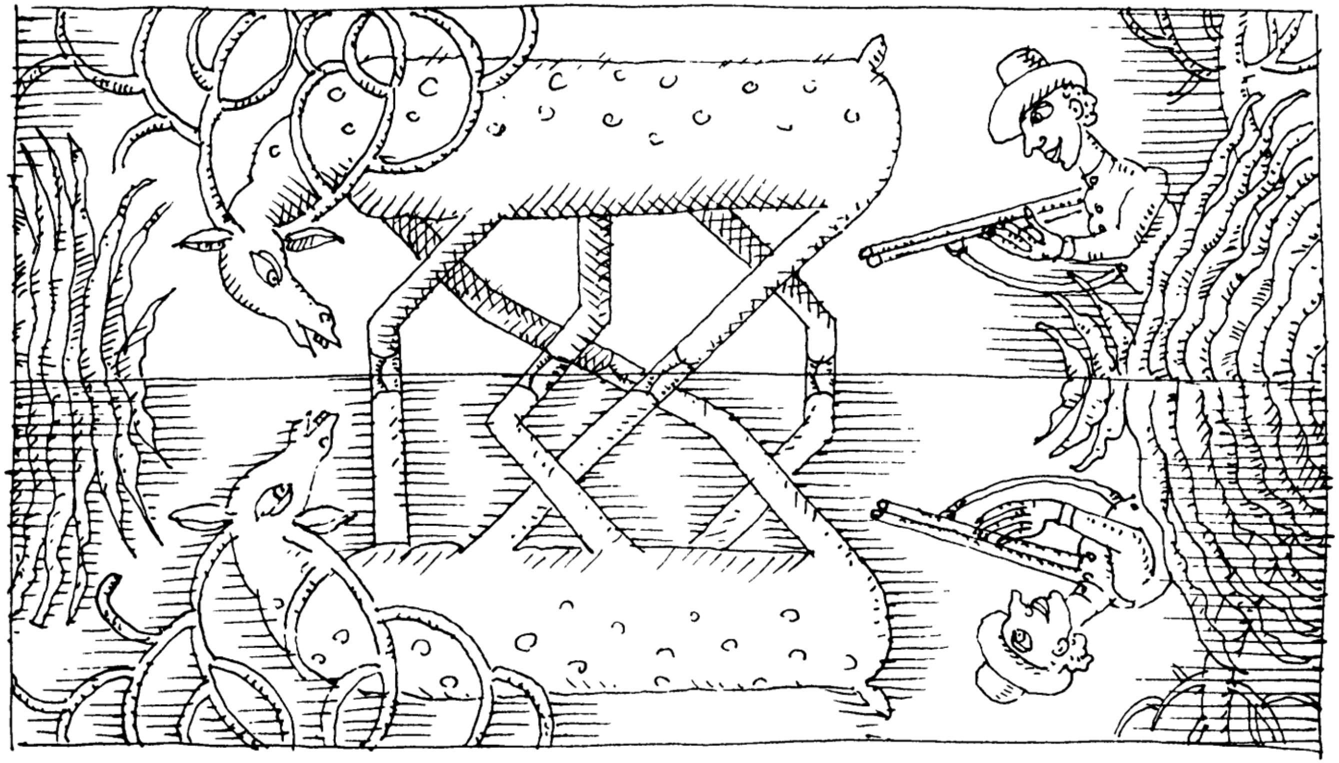
$$\left(x^2 + \frac{p}{2} + a\right)^2 = \underbrace{2ax^2 + \left(\frac{p}{2} + a\right)^2 + qx + r}_{kvadratkomplettera}$$

$$\left(x^2 + \frac{p}{2} + a\right)^2 = 2a\left(x + \frac{q}{4a}\right)^2 + \underbrace{\left(\frac{p}{2} + a\right)^2 - \frac{q^2}{8a} + r}_{eliminera!}$$

Ferraris resolvent:

$$\begin{cases} \left(\frac{p}{2} + a\right)^2 - \frac{q^2}{8a} + r = 0 \\ x^2 + \frac{p}{2} + a = \sqrt{2a}\left(x + \frac{q}{4a}\right) \end{cases}$$

Ekvationen av femte grad



Allmänna algebraiska ekvationer

- Leonard Euler 1732 gav de fullständiga (komplexa) lösningarna till tredjegradsekvationen

- Karl Friedrich Gauss var först som bevisat att en allmän algebraisk ekvation har minst en komplex rot

- Josef Louis Lagrange tog ett viktig steg genom att visade på svårigheter genom att permutera rötter: ett systematiskt försök att förenkla en femtegradsekvation ger sjätte grads ekvation!

- Uppstod misstanken att det inte finns någon allmän metod för femtegradsekvationen

Femtegradsekvation

- En italiensk matematiker Paolo Ruffini publicerade 1813 ett ofullständigt bevis för att femtegradsekvationen var olösbar

- En norsk matematiker Niels Henrik Abel (1802-1829) visade att den allmänna femtegradsekvationen *inte* kunde lösas genom successiva rotutdragningar.

- En fransk matematiker Évariste Galois (1811-1832) bestämde de nödvändiga och tillräckliga villkoren för att en algebraisk ekvation skall kunna lösas med hjälp av rotutdragningar

Inblick i Abel-Galois bevis

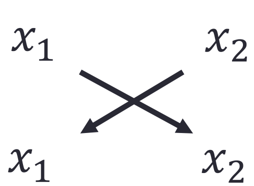
Betrakta $x^2 - p = 0$ med rötterna

$$x_1 = \sqrt{p}, \qquad x_2 = -\sqrt{p}$$

Om $p = e^{it}$ (p snurrar runt origo ett varv) då ger de Moivres formel att

$$x_1 = e^{\frac{it}{2}} \quad \text{och} \quad x_2 = e^{\pi + \frac{it}{2}}$$

$\Rightarrow$ byter rötterna sina platser (permutation):

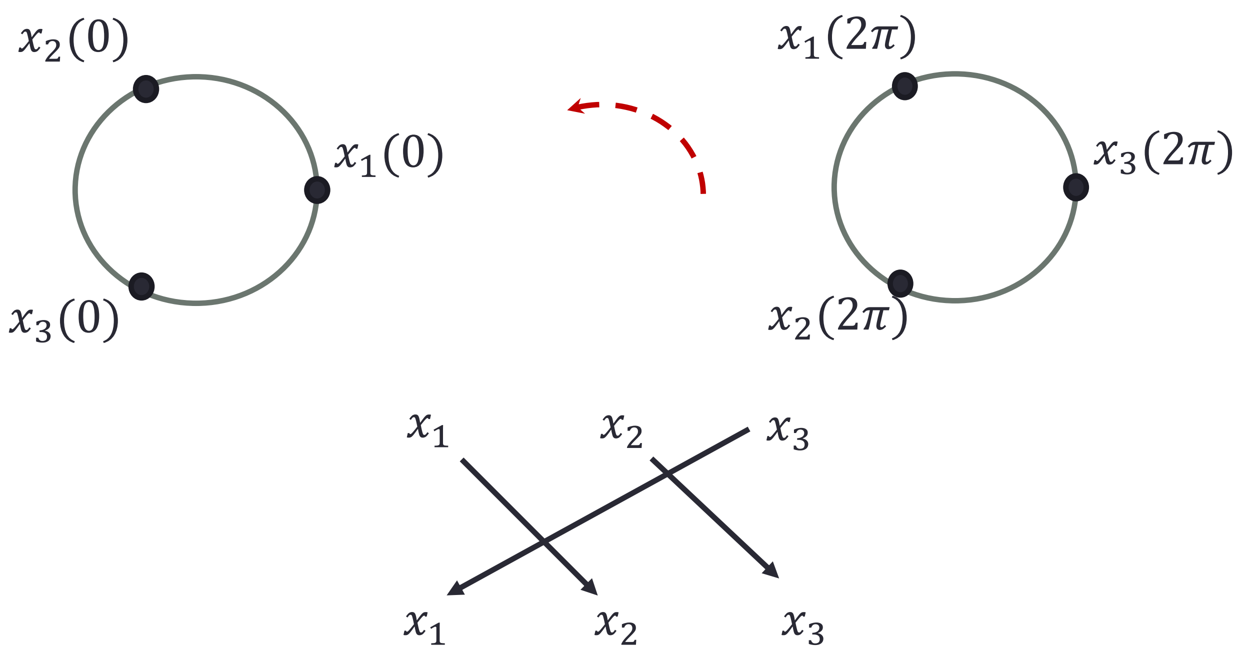


Inblick i Abel-Galois bevis

En tredjegrads ekvation:

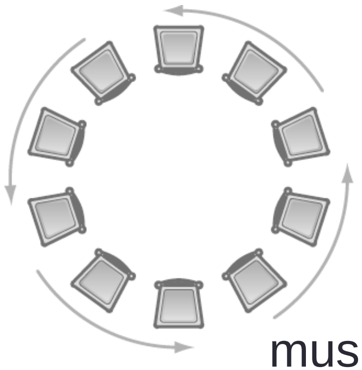
$$x^3 - p = 0, \qquad p = e^{it}$$

$$x_1 = e^{\frac{it}{3}}, \qquad x_2 = e^{\frac{2\pi}{3}+\frac{it}{3}}, \qquad x_3 = e^{\frac{4\pi}{3}+\frac{it}{3}}$$



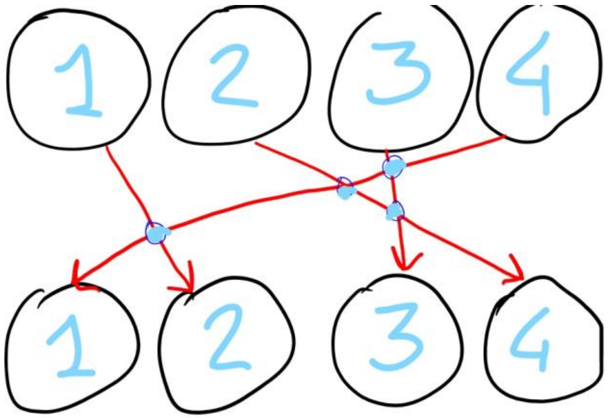
Inblick i Abel-Galois bevis

En cyklisk grupp:



musikstolar

En (jämn) permutation:



eller m.h.a. determinant:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = +1$$

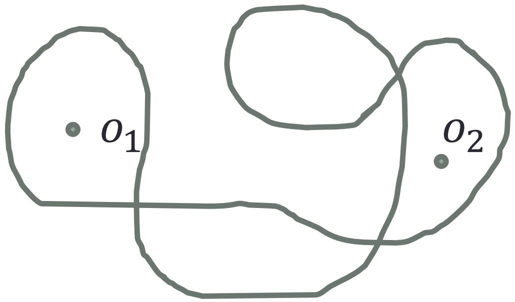
Inblick i Abel-Galois bevis

En femte grads ekvation:

$$x^5 - x + p = (x - x_1) \ldots (x - x_5), \qquad p = p(t)$$

med (olika) rötterna:

$$x_1 = x_1(p), \qquad \ldots , \qquad x_5 = x_5(p)$$



Om p följer en godtycklig ögla i komplexa planet så ger det en permutation av rötterna. Sådana permutationer bildar monodromi gruppen.

Algebraiska utryck så som

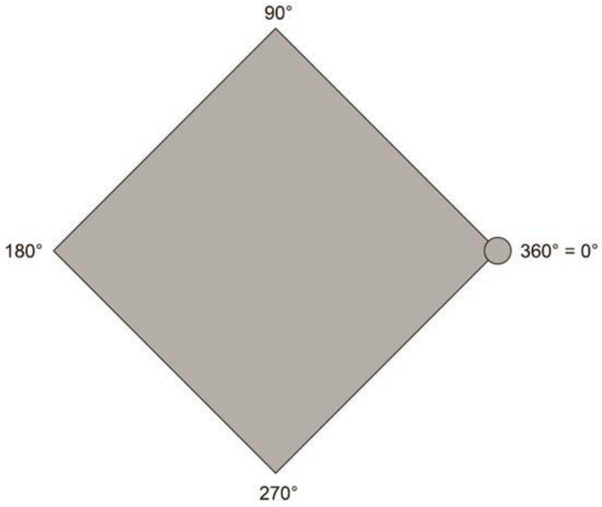
$$\sqrt{p}, \qquad 2p + \sqrt[3]{1-p}, \qquad etc$$

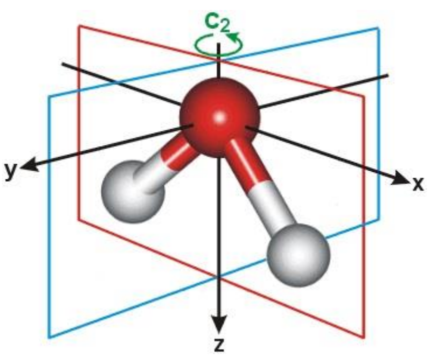
har alltid en ”lösbar” (dvs nära cyklisk) monodromi gropp. Å andra sidan kan man visa att monodromi grupp av ett allmänt femte polynomet ovan är ”olösbar”.

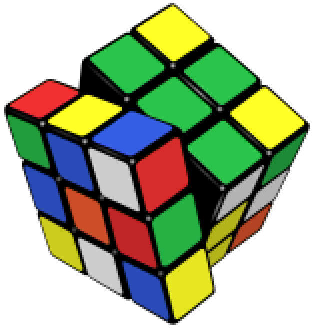
Gruppteori

En grupp $(G,\bullet)$ är en mängd G tillsammans med en grupp-operationen, representerad med tecknet ' • ', på G som uppfyller följande villkor:

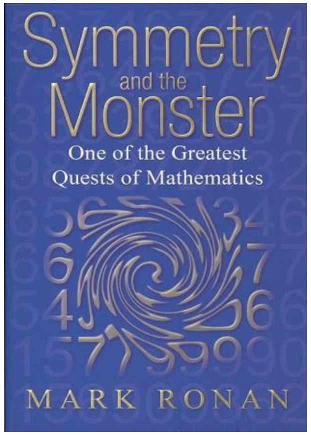
- $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$.
- Det finns e i G: $e \bullet a = a = a\, e$ för alla a.
- För varje a i G finns b, kallat *inversen* till a: $a \bullet b = e = b \bullet a$.







Enkla grupper och Monstergruppen



- Ändliga grupper
- Enkla grupper
- Sporadiska grupper
- Den största sporadiska gruppen: Monster ($\sim 10^{53}$ symmetrier!), upptäckt av Robert L. Griess, Jr. (1981)
- Monstergruppen och Moonshine

- Mark Ronans book *Symmetry and Monster group*

Videor:

- *Monster Group – Numberphile* https://www.youtube.com/watch?v=jsSeoGpiWsw
- *Finding Moonshine: A Mathematician's journey through symmetry* https://www.youtube.com/watch?v=agDE3KHQykk

Referenser

- Guter R.S., Polunov Ju.L. Girolamo Kardano, Moscow, 1971
- Rothman T., Cardano vs Tartaglia: The Great Feud Goes Supernatural, https://arxiv.org/abs/1308.2181
- Livio M. The Equation That Couldn't Be Solved : How Mathematical Genius Discovered The Language Of Symmetry. New York : Simon & Schuster, 2005
- Martinsson Th., Fahlgren M., Det möjliga och det omöjliga – glimtar från ekvationslösningens historia, Nämnaren, 2008, 305
- Fuchs D., Tabachnikov S. Mathematical omnibus. Thirty lectures on classical mathematics
- Girolamo Cardano, De Vita Propria Liber, New York Review Books, 2002
- Girolamo Cardano, The book of my life http://djm.cc/library/cardan-book-of-my-life-1930.pdf
- https://www.svd.se/matematikerna-har-fangat-sina-monster
- https://wikivisually.com/wiki/Abel%E2%80%93Ruffini_theorem