Talsystem, del 2

Hyperreella och surreella tal

Hans Lundmark, MAI

TATA40 Matematiska utblickar

(feb 2018)

Förra gången:

- Ordinaltalen (inkl. de naturliga talen) enligt von Neumann:

$$
\begin{aligned}
0 &= \varnothing \\
1 &= \{0\} \\
2 &= \{0,1\} \\
3 &= \{0,1,2\} \\
4 &= \{0,1,2,3\} \\
&\vdots \\
\omega &= \{0,1,2,3,4,\ldots\} \\
\omega+1 &= \{0,1,2,3,4,\ldots,\omega\} \\
\omega+2 &= \{0,1,2,3,4,\ldots,\omega,\omega+1\} \\
&\vdots \\
\omega+\omega &= \{0,1,2,3,4,\ldots,\omega,\omega+1,\omega+2,\omega+3,\ldots\} = \omega\cdot 2 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

(Induktiv definition av addition och multiplikation.)

- Konstruktion av negativa tal och bråk från de naturliga talen.

  (Ekvivalensklasser av talpar.)

- Cantors konstruktion av $\mathbf{R}$ från $\mathbf{Q}$.

  (Reellt tal = ekvivalensklass av Cauchyföljder av rationella tal. Två följder representerar samma reella tal om skillnadsföljden går mot noll.)

- Dedekinds konstruktion av $\mathbf{R}$ från $\mathbf{Q}$ (eller $\mathbf{R}^+$ från $\mathbf{Q}^+$).

  (Reellt tal = Dedekindsnitt i $\mathbf{Q}$ = uppdelning av $\mathbf{Q}$ i en ”vänstermängd” L och en ”högermängd” R, där L saknar största element.)

- Kroppen $\mathbf{R}$ innehåller inte några (nollskilda) **infinitesimaler**.

  (**Den arkimediska egenskapen**: Om de reella talen a och b uppfyller $0 < a < b$, så finns ett heltal n sådant att $na > b$.)

- 1600- & 1700-talens **infinitesimalkalkyl** ersattes av analys baserad på begreppet **gränsvärde**.

  (”För varje reellt tal $\varepsilon > 0$ finns ett reellt tal $\delta > 0$ sådant att . . . ”)

Bortom de reella talen

Man har numera rigoröst konstruerat talsystem som förutom de vanliga reella talen även innehåller infinitesimaler och oändligt stora tal. De två mest kända är:

- **De hyperreella talen**

  Abraham Robinson, *Non-standard Analysis* (1966).

  Bygger på tidigare arbeten inom analys och logik.

  Samma resultat som i vanlig analys, men alternativa bevismetoder.

- **De surreella talen**

  John Horton Conway, *On Numbers and Games* (1976).

  En helt egen värld! Upptäcktes som en blixt från klar himmel vid studier av slutspel i brädspelet go. (**Kombinatorisk spelteori**.)

  (Andra tillämpningar? Bra teori för surreell analys saknas.)

  Namnet **surreal numbers** är vitsigare på engelska:
  real number = reellt tal, **surreal** = surrealistisk (à la Salvador Dalí).

De hyperreella talen ($^*\mathbf{R}$)

- Generalisering av Cantors sätt att konstruera $\mathbf{R}$ med talföljder.
- Ett hyperreellt tal är en **ekvivalensklass av följder av reella tal**.
- Det måste inte vara Cauchyföljder här!

  Varje följd av reella tal representerar ett hyperreellt tal.
- **Ekvivalensrelationen** som talar om när två följder $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ och $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ representerar samma hyperreella tal är **helt annorlunda** än i konstruktionen av de reella talen.

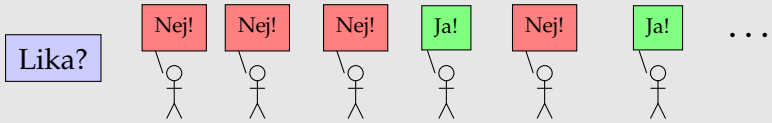
  Den bygger på **"omröstning med oändligt många röstande"**.

  Se nästa sida!

- När ska två reella talföljder (a_n) och (b_n) betraktas som ekvivalenta?
- Föreställ dig att det vid varje position $n \in \mathbf{Z}^+$ står en **observatör**, som besvarar frågan **"är dessa två följder lika?"** enbart baserat på jämförelse av de element som hen ser på just **sin plats**:

$$(a_n) = (1, \quad 3, \quad \sqrt{2}, \quad \pi, \quad -15, \quad 123, \quad \ldots)$$

$$(b_n) = (9, \quad e^5, \quad -7, \quad \pi, \quad 512, \quad 123, \quad \ldots)$$



Vi vill nu säga att de två följderna (a_n) och (b_n) är ekvivalenta, dvs. representerar samma hyperreella tal, **om och endast om ja-sidan vinner omröstningen**, dvs. om följderna "är lika på tillräckligt många positioner".

- Om ena sidan bara får **ändligt många röster** så ska den **andra sidan** vinna (för den har ju då oändligt många röster).
- Men hur avgör man vilken sida som vinner ifall **båda sidorna** får **oändligt** många röster? (T.ex. varannan ja, varannan nej.)

Det finns uppenbarligen ett visst mått av godtycke när man specificerar röstningssystemet. Men låt oss ändå försöka konstruera **något** röstningssystem som är rimligt.

Kalla $\{k_1, k_2, \dots\}$ för en **vinnande mängd** ifall röster från observatörerna på positionerna $k_1, k_2, \dots$ skulle vinna över röster från de övriga observatörerna. Det vi behöver tala om är vilka mängder som är vinnande.

Uppenbara önskemål:

- En mängd ska vara vinnande omm dess komplement inte är det.

  (Varje omröstning ska ge ett definitivt utslag.)

- Ändliga mängder ska inte vara vinnande.

  (Som vi sade på förra sidan.)

- En mängd som innehåller en vinnande delmängd ska själv vara vinnande.

  (Man ska ju inte kunna hamna i ett sämre läge genom att lyckas värva över röstare från motståndarlägret, eller hur?)

Ett mindre uppenbart önskemål, ifall vi vill kunna använda omröstning för att skapa en ekvivalensrelation:

- **Skärningen** av två vinnande mängder ska vara vinnande.

(Annorlunda uttryckt: **Unionen** av två **förlorande** mängder ska vara förlorande, dvs. två förlorande väljargrupper kan inte vinna även om de går samman. Med induktion följer att samma sak gäller för godtyckligt ändligt antal.)

Detta behövs för att garantera *transitivitet*, dvs. följande egenskap som varje ekvivalensrelation måste ha:

$$\left.\begin{array}{l}(a_n) \sim (b_n)\\(b_n) \sim (c_n)\end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad (a_n) \sim (c_n)$$

(De observatörer som observerar $a_n = c_n$ är ju i värsta fall bara de som **både** observerar att $a_n = b_n$ och att $b_n = c_n$.)

Detta är i sin tur nödvändigt för att *likhet* mellan hyperreella tal ska bete sig på önskat sätt:

$$\left.\begin{array}{l}x = y\\y = z\end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad x = z$$

- **Dåliga nyheter:**

  För att fullständigt specificera ett sådant röstningssystem måste man göra **oändligt många godtyckliga val**.

  (I stil med ”ska de udda talen vinna över de jämna talen eller tvärtom?”)

  Det är därför **helt hopplöst** att ge en explicit beskrivning av exakt vilka mängder som är vinnande!

- **Halvgoda nyheter:**

  Med hjälp av **urvalsaxiomet** från mängdläran kan man ändå visa att det **i princip existerar** röstningssystem (familjer av vinnande mängder) som uppfyller de krav vi ställt upp.

  Sådana familjer kallas för **fria ultrafilter** (på mängden av positiva heltal).

- Givet att vi tror på existensen av fria ultrafilter, kan vi alltså tänka oss att vi har ett sådant, och använda det för att definiera vad som menas med att två reella talföljder är ekvivalenta.

  Då har vi definierat hyperreella tal *med avseende på just det ultrafiltret*. Teorin för hyperreella tal och ickestandardanalys påverkas dock inte av *vilket* ultrafilter det var; allt funkar om man bara har *något*.

- De reella talen $\mathbf{R}$ kan identifieras med en delmängd av de hyperreella talen ${}^*\mathbf{R}$, nämligen de som svarar mot **konstanta följder**:

$$r \in \mathbf{R} \quad \longleftrightarrow \quad \Big(\text{ekvivalensklassen för följden } (r, r, r, \dots)\Big) \in {}^*\mathbf{R}$$

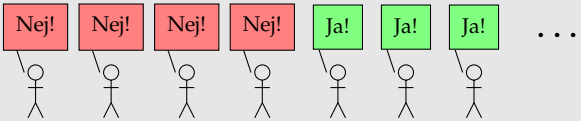
- Följden

$$(1, 2, 3, 4, 5, \dots)$$

representerar ett hyperreellt tal som vi kan döpa till ω.

Är då t.ex. $\omega > 4$ sant eller falskt? Låt oss rösta om saken!

Är talet ω...	(1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	...)
...större än talet 4?	(4,	4,	4,	4,	4,	4,	4,	...)



Bara ändligt många nej-röster (4 stycken). Storseger för ja-sidan!

På motsvarande sätt inses att $\omega > x$ är sant för varje reellt x, vilket visar att det i ${}^*\mathbf{R}$ finns tal som är **obegränsade** (”oändligt stora”).

- De fyra räknesätten: operera elementvis på representantföljder.

  T.ex. är talet $\varepsilon = \frac{1}{\omega}$ den ekvivalensklass som innehåller följden

  $$(\tfrac{1}{1}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \ldots).$$

  Omröstning visar att olikheten

  $$0 < \varepsilon < x$$

  gäller för varje positivt reellt tal x, så ε är en (nollskild) **infinitesimal**.

- Allmännare: *varje* funktion $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ kan utvidgas till en funktion ${}^*\mathbf{R} \to {}^*\mathbf{R}$ genom elementvis applikation på representantföljder.

  T.ex. definieras talet $\sin(\varepsilon)$ av följden

  $$(\sin \tfrac{1}{1}, \sin \tfrac{1}{2}, \sin \tfrac{1}{3}, \sin \tfrac{1}{4}, \ldots).$$

  Detta tal är en annan infinitesimal, som ligger mellan 0 och ε:

  $$0 < \sin(\varepsilon) < \varepsilon$$

  (Omröstning om huruvida denna olikhet är sann ger enhällig ja-seger, eftersom $0 < \sin \frac{1}{n} < \frac{1}{n}$ gäller för alla heltal $n \geq 1$.)

- En reell mängd $A \subset \mathbf{R}$ ger upphov till en motsvarande hyperreell mängd ${}^*A \subset {}^*\mathbf{R}$, som består av de hyperreella tal som representeras av följder (a_n) där alla a_n tillhör A.

  (Eller där åtminstone tillräckligt många a_n tillhör A, dvs. så många att omröstning om frågan "$a_n \in A$?" ger vinst för ja-sidan.)

- En reell funktion med definitionsmängd $A \subset \mathbf{R}$ utvidgas på samma sätt som ovan till en hyperreell funktion med definitionsmängd ${}^*A \subset {}^*\mathbf{R}$.

- På den hyperreella tallinjen är varje vanligt reellt tal omgiven av en ”halo” av infinitesimalt närliggande hyperreella tal.

  (Infinitesimalerna själva, som ε och $\sin(\varepsilon)$, tillhör halon kring $0 \in \mathbf{R}$.)

- Och varje hyperreellt tal tillhör en ”galax” av tal som ligger på begränsat avstånd ifrån varandra.

  (Talen ε och -43 ligger i samma galax, men ω ligger i en annan galax, som också innehåller t.ex. $\omega + \varepsilon$ och $\omega - 43$.)

- Varje begränsat hyperreellt tal kan ”avrundas till närmsta reella tal”, vilket kallas att ta **standarddelen** (eller **skuggan**) av talet.

- Skrivsättet

  $$x \simeq y$$

  betyder att x och y är hyperreella tal som ligger infinitesimalt nära varandra, dvs. $|x - y| < \frac{1}{n}$ för alla positiva heltal n.

En mycket litet smakprov på ickestandardanalys

- Den reella funktionen $f\colon A \to \mathbf{R}$ är **kontinuerlig** i punkten $x \in A$ om och endast om dess hyperreella utvidgning $f\colon {}^*A \to {}^*\mathbf{R}$ uppfyller

$$y \simeq x \quad \text{och} \quad y \in {}^*A \qquad \Longrightarrow \qquad f(y) \simeq f(x).$$

- **Derivatan** $f'(x)$ definieras som **standarddelen** av kvoten df/dx:

$$f'(x) = \operatorname{st}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)$$

  där h är en godtycklig nollskild infinitesimal.

  Resultatet blir väldefinierat (ett reellt tal, samma tal för alla h) om och endast om f är **deriverbar** i punkten $x \in \mathbf{R}$ (i vanlig mening).

De surreella talen (No)

- Idén uppstod på slutet av 1960-talet inom kombinatorisk spelteori.
- Teori fanns för ”opartiska spel” (t.ex. nim), där båda spelarna har samma uppsättning av tillåtna drag i en given ställning.
- John Conway (matematiker i Cambridge) började på allvar undersöka ”partiska spel” då han fick brittiske mästaren i go som kollega.

  Ett typiskt go-parti sönderfaller på slutet i en ”summa” av flera separata slutstrider som spelas ”parallellt”.
- Conway upptäckte att det fanns en delklass av alla tänkbara ”spel” som inte bara kunde adderas, utan även multipliceras (med mera). Dessa spel kallade han ”tal”.

  (Senare döpta till ”Surreal numbers” av Donald Knuth.)

- Konstruktionen är en samtidig generalisering av Dedekinds sätt att konstruera **R** med snitt och von Neumanns sätt att bygga upp ordinaltalen **On** stegvis utifrån tomma mängden.

- Ett **surreellt tal** (eller **tal**, rätt och slätt) ges av ett snitt i form av ett mängdpar

$$(L, R)$$

  där L och R är mängder av tidigare konstruerade (”enklare”) tal sådana att $x < y$ för varje $x \in L$ och $y \in R$.

  Detta snitt är tänkt att representera det ”enklaste” talet som ligger strikt mellan vänstermängden L och högermängden R.

  (I konstruktionen ingår också att definiera vad som menas med ”$x < y$”, men det hoppar jag över just nu, liksom många andra detaljer.)

- Skapelsen börjar från ingenting, genom att låta både L och R vara tomma mängden. Detta ger det **enklaste talet** av alla, nämligen **noll**:

$$0 = (\varnothing, \varnothing)$$

- I nästa steg kan L och R vara antingen $\varnothing$ eller $\{0\}$, så vi kan bilda fyra olika par (L, R).

  Vi hade redan paret $(\varnothing, \varnothing)$.

  Med $L = R = \{0\}$ får vi paret $(\{0\}, \{0\})$, men det är inget tal.
  (Ty $x = 0 \in L$ och $y = 0 \in R$ uppfyller ej kravet $x < y$.)

  Vi får alltså **två nya tal**, det ”enklaste talet mindre än noll” och det ”enklaste talet större än noll”:

$$(\varnothing, \{0\}) \qquad (\{0\}, \varnothing)$$

  Dessa visar sig motsvara -1 och $+1$. Med en förenklad notation:

$$-1 = \{\ \mid 0\} \qquad 1 = \{0 \mid\ \}$$

- I nästa steg bildas fyra nya tal, som visar sig vara:

$$-2 = \{\ \mid -1, 0\} \qquad -\frac{1}{2} = \{-1 \mid 0\} \qquad \frac{1}{2} = \{0 \mid 1\} \qquad 2 = \{0, 1 \mid\ \}$$

- Vi kan även bilda $\{-1 \mid 1\}$. Detta snitt ska stå för det enklaste talet mellan -1 och 1, alltså 0, vilket dock redan hade definierats som $0 = \{\ \mid\ \}$. Man måste alltså också införa en **ekvivalensrelation**, så att flera **olika snitt** (L, R) kan representera **samma tal** $\{L \mid R\}$.

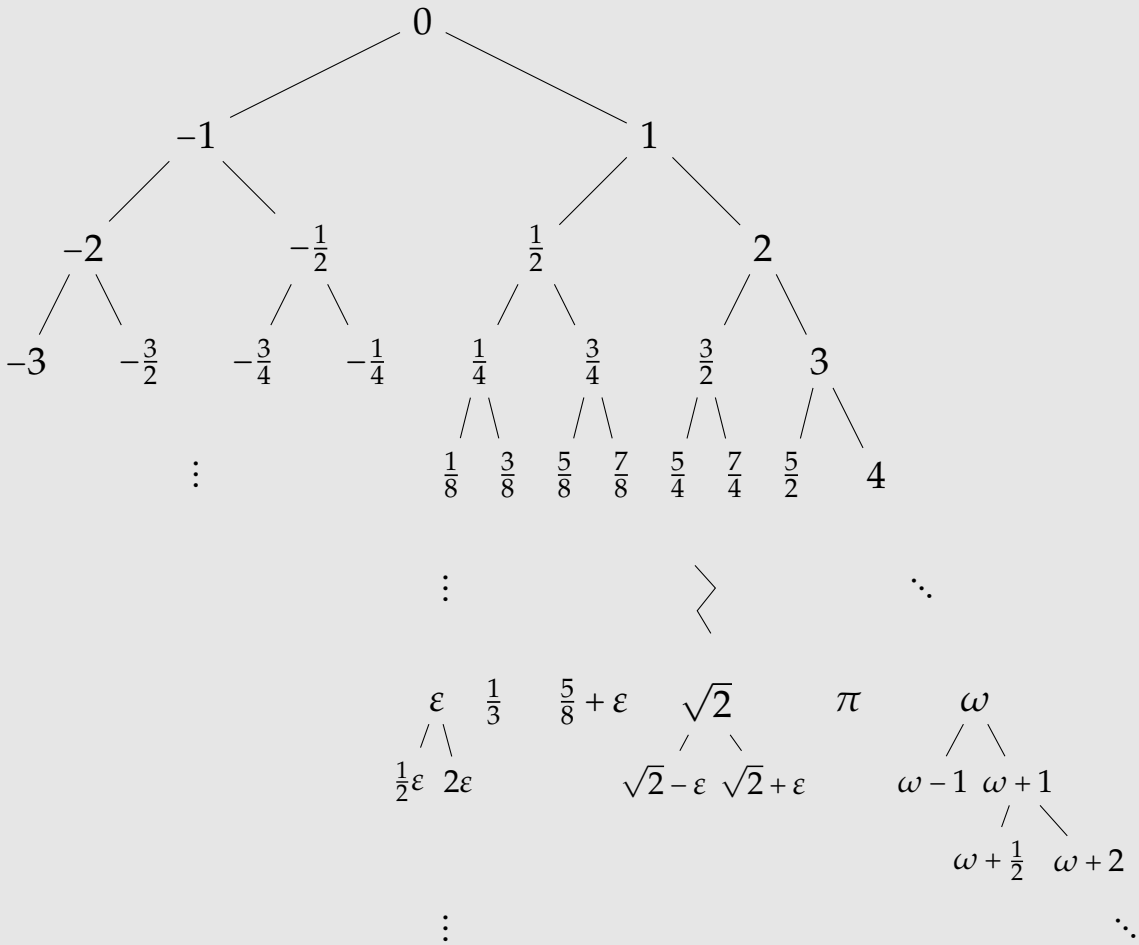
- Ordinaltalen kan identifieras med de surreella tal som har tom högermängd ($R = \varnothing$):

$$
\begin{aligned}
0 &= \{\ \mid\ \} \\
1 &= \{0 \mid\ \} \\
2 &= \{0, 1 \mid\ \} \\
3 &= \{0, 1, 2 \mid\ \} \\
&\vdots \\
\omega &= \{0, 1, 2, 3, \ldots \mid\ \} \\
\omega + 1 &= \{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega \mid\ \} \\
\omega + 2 &= \{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega + 1 \mid\ \} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

- I slutändan visar det sig att talen bildar ett **binärt träd** (figur på nästa sida). Längs högra kanten löper ordinaltalen, och de numrerar trädets nivåer (”dagarna i skapelsen”, talens ”födelsedagar”).

  Olikheten $x < y$ motsvarar att x ligger till vänster om y i trädet.

  Ett tal x på nivå α (där α är ett ordinaltal) nås från nollan genom att gå α steg vänster (minus) eller höger (plus): $x = (+--+-+\cdots)$.


0
−1
1
−2
−1/2
1/2
2
−3
−3/2
−3/4
−1/4
1/4
3/4
3/2
3
1/8
3/8
5/8
7/8
5/4
7/4
5/2
4
ε
1/3
5/8 + ε
√2
π
ω
1/2 ε
2ε
√2 − ε
√2 + ε
ω − 1
ω + 1
ω + 1/2
ω + 2

- Det ”kanoniska” snittet $\{L \mid R\}$ för ett tal x erhålls genom att låta mängderna L resp. R bestå av de tal som **ligger på stigen** som går från 0 till x i trädet och är **mindre** resp. **större** än x.

- På ändliga dagar föds bara **dyadiska bråk**, dvs. rationella tal av typen $k/2^n$.

- Men på dag ω (när L och R kan vara oändliga mängder) föds plötsligt **alla de övriga reella talen**, dvs. **icke-dyadiska bråk** som

$$\frac{1}{3} = \left\{0, \tfrac{1}{4}, \tfrac{5}{16}, \tfrac{21}{64}, \ldots \,\middle|\, 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{8}, \tfrac{11}{32}, \ldots\right\} = (+-(-+)^{\omega}) = (+--+-+-+-+\cdots)$$

och **irrationella tal** som

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= \left\{\text{dyadiska bråk } x \geq 0 \text{ med } x^2 < 2 \,\middle|\, \text{d:o med } x^2 > 2\right\} \\ &= \left\{0, 1, \tfrac{5}{4}, \tfrac{45}{32}, \tfrac{181}{128}, \ldots \,\middle|\, 2, \tfrac{3}{2}, \tfrac{23}{16}, \tfrac{91}{64}, \tfrac{363}{256}, \ldots\right\} \\ &= (++--++-+-+-----+--++++-\cdots) \quad \text{(ej periodiskt)}\end{aligned}$$

(De **namn** som vi har gett talen i trädet är såklart inte motiverade förrän vi har infört **räkneoperationer**, och t.ex. visat att talen $\frac{1}{3}$ och $\sqrt{2}$ ovan uppfyller ekvationerna $3x = 1$ resp. $x^2 = 2$.)

- På dag ω föds också en massa **andra tal** som inte finns i reella talsystemet, nämligen de obegränsade talen $\pm\omega$ där

$$\omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots \mid \ \} = (+^{\omega}) = (+++++++\cdots)$$

och infinitesimalerna $\pm\varepsilon$ där

$$\varepsilon = \frac{1}{\omega} = \left\{0 \,\middle|\, 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, \ldots\right\} = (+-^{\omega}) = (+------\cdots)$$

samt tal av formen ”dyadiskt bråk plus/minus ε”, t.ex.

$$\frac{5}{8} + \varepsilon = (+-+-+-^{\omega}) \qquad \frac{5}{8} - \varepsilon = (+-+--+^{\omega})$$

(utgå från $\frac{5}{8} = (+-+-)$ och haka på $(+-^{\omega})$ resp. $(-+^{\omega})$).

- Dagen därpå (alltså på dag $\omega + 1$) föds bland annat

$$\omega - 1 = \{0, 1, 2, 3, \ldots \mid \omega\} = (+^{\omega}-),$$

det enklaste talet som är större än alla heltal men mindre än ω.

Och sedan fortsätter det med alltmer svindlande konstiga tal!

- Obs. att **alla tal** skapas på samma sätt. Man behöver alltså inte gå stegvis $\mathbf{N} \to \mathbf{Q}^+ \to \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ eller $\mathbf{N} \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Q} \to \mathbf{R}$ och i varje steg identifiera de ”gamla” talen med en delmängd av de ”nya”.

- Negation, addition och multiplikation definieras rekursivt såhär:

$$\begin{aligned} -x &= \{-x^R \mid -x^L\} \\ x+y &= \{x^L+y,\ x+y^L \mid x^R+y,\ x+y^R\} \\ xy &= \{x^Ly+xy^L-x^Ly^L,\ x^Ry+xy^R-x^Ry^R \mid \\ &\qquad x^Ly+xy^R-x^Ly^R,\ x^Ry+xy^L-x^Ry^L\} \end{aligned}$$

  där talen x^L, x^R, y^L, y^R löper genom de vänstra/högra mängderna i de snitt som definierar x resp. y.

  (Alla operationer på högersidan involverar *enklare* tal. När man rekursivt nystar ut allting kommer man efter ändligt många steg att landa i "tomma" operationer med $0 = (\varnothing, \varnothing)$.)

- Den surreella additionen är associativ och kommutativ som vanligt, och likaså multiplikationen.

  (Så t.ex. $\omega + 3 = 3 + \omega$ och $2 \cdot \omega = \omega \cdot 2$, alltså **inte** som för ordinaltal.)

- Operationerna negation och addition har spelteoretiskt ursprung.

  Negation av ett spel: de två spelarna ("L och R") byter roller.

  Addition av två spel: spelen spelas sida vid sida, och ett drag i summaspelet består av att välja ett av partierna och göra ett drag där.

- Att hitta den rätta definitionen av multiplikation är svårare!

  Idén som visar sig fungera är att $(x - x^L)(y - y^L)$ ska vara större än noll om $x^L < x$ och $y^L < y$:

$$\begin{aligned} & 0 < (x - x^L)(y - y^L) \\ \iff \quad & 0 < xy - x^L y - xy^L + x^L y^L \\ \iff \quad & x^L y + xy^L - x^L y^L < xy \end{aligned}$$

  Alltså bör $x^L y + xy^L - x^L y^L$ ligga i vänstermängden för xy.

  (Och analogt för övriga kombinationer av L och R.)

- I det surreella talsystemet kan man även dividera med alla tal utom noll, dra roten ur ickenegativa tal, hitta minst ett surrellt nollställe till varje polynom av udda gradtal med surrella koefficienter, definiera exponentialfunktionen (med viss möda!), med mera.

  Exempelvis är följande är ett fullt legitimt surreellt tal, som döljer sig någonstans djupt inne i trädet:

$$\frac{\sqrt{\omega - \pi}}{\exp(\sqrt{2} + \varepsilon - \varepsilon^5)}$$

Den exakta och fullständiga definitionen av surrella tal enligt Conway:

* * *

If L, R are any two sets of numbers, and no member of L is $\geq$ any member of R, then there is a number $\{L \mid R\}$. All numbers are constructed in this way.

Definition of $x \geq y$, $x \leq y$.
We say $x \geq y$ iff (no $x^R \leq y$ and $x \leq$ no y^L), and $x \leq y$ iff $y \geq x$.
We write $x \nleq y$ to mean that $x \leq y$ does not hold.

Definition of $x = y$, $x > y$, $x < y$.
$x = y$ iff ($x \geq y$ and $y \geq x$). $x > y$ iff ($x \geq y$ and $y \ngeq x$). $x < y$ iff $y > x$.

Definition of $x + y$.
$x + y = \{x^L + y,\ x + y^L \mid x^R + y,\ x + y^R\}$.

Definition of $-x$.
$-x = \{-x^R \mid -x^L\}$.

Definition of xy.
$xy = \{x^L y + xy^L - x^L y^L,\ x^R y + xy^R - x^R y^R \mid x^L y + xy^R - x^L y^R,\ x^R y + xy^L - x^R y^L\}$.

It is remarkable that these few lines already define a real-closed Field with a very rich structure.

* * *

Definitionen av "$x = y$" är det som introducerar ekvivalensrelationen som nämndes tidigare.