Berömda matematiska konstanter

Hans Lundmark, MAI

TATA40 Matematiska utblickar

(maj 2019)

Rationella tal

Bråk a/b där a och b är heltal, $b \neq 0$.

Uppräkneligt många.

Ändlig eller så småningom periodisk decimalutveckling.

T.ex. $\dfrac{1}{8} = 0{,}125$

$$\frac{5}{26} = 0{,}1\,\underbrace{923076}_{\text{period}}\,923076\,923076\ldots$$

De rationella talen bildar en s.k. **kropp** (sluten under de fyra räknesätten).

Irrationella tal

Reella tal som inte är rationella.

Överuppräkneligt många.

Icke-periodisk oändlig decimalutveckling.

T.ex. $\sqrt{2} = 1{,}41421356237309504880\ldots$

$e = 2{,}71828182845904523536\ldots$

$\pi = 3{,}14159265358979323846\ldots$

Algebraiska tal

Rötter till polynom med heltalskoefficienter.

Uppräkneligt många.

Innefattar alla rationella tal:

$$x = \frac{a}{b} \text{ är rot till } p(x) = bx - a.$$

Men även många irrationella tal, t.ex. $\sqrt{2}$:

$$x = \sqrt{2} \text{ är rot till } p(x) = x^2 - 2.$$

De algebraiska talen **A** utgör också en kropp.
(Inte lika uppenbart som för **Q**.)

Och det är även sant att rötter till polynom med *algebraiska* koefficienter måste vara algebraiska.

Transcendenta tal

Reella tal som inte är algebraiska.

Överuppräkneligt många.

T.ex. π och e (inte så lätt att bevisa).

Det första tal som bevisades vara transcendent är **Liouvilles konstant** (1851):

$$
\begin{aligned}
L = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} = \quad & 0{,}1 && (10^{-1}) \\
& + 0{,}01 && (10^{-2}) \\
& + 0{,}000001 && (10^{-6}) \\
& + 0{,}000000000000000000000001 && (10^{-24}) \\
& + \cdots \\
= \quad & 0{,}110001000000000000000001000\ldots
\end{aligned}
$$

Kedjebråk

Varje $x \in \mathbf{R}$ har **heltalsdel** $a_0 = \lfloor x \rfloor$ och **bråkdel** $b_0 = \{x\}$,

$$x = a_0 + b_0, \qquad a_0 \in \mathbf{Z}, \qquad 0 \le b_0 < 1.$$

Om $b_0 \neq 0$ så är $\frac{1}{b_0} > 1$, med heltalsdel $a_1 \ge 1$ och bråkdel b_1:

$$x = a_0 + b_0 = a_0 + \frac{1}{1/b_0} = a_0 + \frac{1}{a_1 + b_1}, \qquad 0 \le b_1 < 1.$$

Om $b_1 \neq 0$ så är $\frac{1}{b_1} > 1$, med heltalsdel $a_2 \ge 1$ och bråkdel b_2:

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{1/b_1}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + b_2}}, \qquad 0 \le b_2 < 1.$$

Och så vidare!

Processen slutar efter ändligt många steg om och endast om x är rationellt.

Annars fås en entydig oändlig kedjebråksutveckling:

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

Notation:

$$x = [a_0; a_1, a_2, a_3, a_4, \dots]$$

Exempel:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1;1,1,1,1,1,1,\dots] = 1 + \frac{1}{\phi}$$

$$\sqrt{2} = [1;2,2,2,2,2,2,\dots]$$

$$e = [2;1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1,10,1,\dots]$$

$$\begin{aligned}\pi = [3;&7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,1,14,2,1,1,2,2,2,2,\\ &1,84,2,1,1,15,3,13,1,4,2,6,6,99,1,2,2,6,3,\\ &5,1,1,6,8,1,7,1,2,3,7,1,2,1,1,12,1,1,1,3,1,\\ &1,8,1,1,2,1,6,1,1,5,2,2,3,1,2,4,4,16,1,161,\dots]\end{aligned}$$

Khinchins konstant K_0

- **Sats (Aleksandr Khinchin 1935).** För **nästan alla** reella tal

$$x = [a_0;\ a_1, a_2, a_3, \dots\ ]$$

(dvs. alla utom en mängd av **mått noll**) gäller att

$$\lim_{n\to\infty}(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} = K_0 = \prod_{r=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{r(r+2)}\right)^{\log_2 r} = 2{,}685452\dots$$

- Kända undantag: Det är **inte sant** att gränsvärdet är K_0 för t.ex. ϕ, $\sqrt{2}$ eller e. Eller om $x \in \mathbf{Q}$ såklart.
- Man känner inte till något enda explicit exempel på ett tal x för vilket gränsvärdet faktiskt **är** K_0!

  (Förutom att man kan konstruera talföljder $(a_n)_1^\infty$ som ger rätt gränsvärde, och sedan *definiera* $x = [0; a_1, a_2, a_3, \dots\ ]$.)
- Ej känt om K_0 är rationellt eller inte.

Rationella approximationer

Trunkeringar av kedjebråksutvecklingen ger bra rationella approximationer. T.ex. för $\pi = 3{,}14159265358979\ldots$ fås

$$[3;7] = 3 + \frac{1}{7} = \boxed{\frac{22}{7}} = 3{,}142857\ldots > \pi$$

$$[3;7,15] = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15}} = \boxed{\frac{333}{106}} = 3{,}14150943\ldots < \pi$$

$$[3;7,15,1] = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \frac{1}{1}}} = \boxed{\frac{355}{113}} = 3{,}1415929203\ldots > \pi$$

$$[3;7,15,1,292] = \cdots = \boxed{\frac{103993}{33102}} = 3{,}1415926530119\ldots < \pi$$

Att termen 292 i $\pi = [3;7,15,1,\ 292\ ,\ldots]$ är relativt stor gör att trunkeringen

$$[3;7,15,1] = \frac{355}{113}$$

är en anmärkningsvärt bra approximation till π i förhållande till nämnarens storlek:

$$\left|\pi - \frac{355}{113}\right| \approx 2{,}667 \times 10^{-7} \approx \frac{1}{113^{3{,}202}}$$

Sex korrekta decimaler med tresiffrig nämnare.

Bra ”valuta för pengarna”!

(Lätt att minnas: 11 33 55 $\longrightarrow$ 113 355 $\longrightarrow \frac{355}{113}$)

Gyllene snittet

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1;1,1,1,\ldots]$$

har så små tal som möjligt i sitt kedjebråk, och är därför det irrationella tal som är svårast att approximera bra med rationella tal.

Mathologer på YouTube:
The golden ratio spiral: visual infinite descent
Infinite fractions and the most irrational number

Detta är bl.a. av intresse för dynamiska system (**KAM-teori**, Kolmogorov–Arnold–Moser).

- En rationell approximation

$$x \approx \frac{p}{q}$$

anses vara ”bra” om felets storlek är litet i förhållande till nämnarens storlek:

$$0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^m} \qquad \text{med } m \geq 1 \text{ ”stort”.}$$

- Om det för ett givet $x \in \mathbf{R}$ och ett givet $m \geq 1$ går att hitta oändligt många bråk $\frac{p}{q}$ som uppfyller ovanstående olikhet, säger vi att x är ”m-approximerbart”.

  (Tillfällig hemmagjord benämning.)

- **Irrationalitetsmåttet** eller **irrationalitetsexponenten** $\mu(x)$ är **det största** talet m för vilket x är ”m-approximerbart”.

  (Eller **supremum** av alla sådana m, för att vara noga.)

- Rationella tal har $\mu(x) = 1$ (så dåligt som det kan bli).

  Rationella tal är alltså de tal som är allra svårast att approximera med (andra) rationella tal!

- Alla irrationella tal har $\mu(x) \geq 2$.

- Nästan alla $x \in \mathbf{R}$, inklusive alla algebraiska tal och även talet e, har $\mu(x) = 2$.

- $\mu(\pi)$ är okänt, men man vet att $\mu(\pi) \leq 7{,}60630853$.

- Liouvilles konstant $L = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}}$ har $\mu(L) = \infty$.

  (Tal med $\mu(x) = \infty$ kallas **Liouvilletal**.)

$$\pi = 3{,}1415926535\ldots$$

- Förhållandet mellan cirkelns omkrets och diameter:

$$O = \pi \cdot d$$

(Inte helt självklart att det är samma för alla cirklar!)

- Känt sedan antiken.
- **Egypten** (Rhindpapyrusen c:a 1550 f.Kr.):

$$A = (\tfrac{8}{9}\,d)^2 \qquad (\text{dvs. } \pi \approx (\tfrac{16}{9})^2 = 3{,}16049\ldots)$$

- **Arkimedes** (200-talet f.Kr.):

$$3 + \tfrac{10}{71} < \pi < \underbrace{3 + \tfrac{10}{70}}_{=3+\frac{1}{7}=\frac{22}{7}=3{,}142857\ldots}$$

(Via omkrets av in- och omskriven regelbunden 96-hörning.)

- Ganska dåliga approximationer som $\sqrt{10} = 3{,}162\ldots$ och $3 + \frac{1}{8} = 3{,}125$ har använts på många platser och vid många tidpunkter.

Notation

- Beteckningen π kommer **inte** från antikens greker.
- William Oughtred 1647: *Clavis Mathematicae*

$$\frac{\delta}{\pi} = \frac{\text{diameter}}{\text{periferi}}$$

16. Si in circulo ſit 7.22::δ.π::113.355: erit δ.π::
2R.P: &

δ.π.:Rq. Circul. Et π. δ:: $\frac{1}{4}$Pq. Circul.
δ.π::2Rc. Cylind. Et πq.δq::$\frac{1}{4}$Pc. Cylind.
δ.π::$\frac{4}{3}$Rc. Sphær. Et πq.δq::$\frac{1}{6}$Pc. Sphær.
δ.π::$\frac{2}{3}$Rc. Con. Et πq.δq::$\frac{1}{9}$,Pc. Con.

- Johann Christoph Sturm 1689: *Mathesis Enucleata*

$$e = 3{,}14\ldots$$

PRomptum autem hinc eſt inferre, ſi diame-
ter alicujus circuli ponatur *a*, circumfe-
rentiam appellari poſſe *ea*, (quæcunque enim
inter eas fuerit ratio, illius nomen poteſt deſi-
F gnari

82. :)o(:

gnari literâ *e*) & aream juxta Conſect. 2. Def.
XV. fore $\frac{1}{4}$ *eaa*.

Troligen första gången en ensam bokstav användes för förhållandet mellan omkrets och diameter.

- William Jones 1706: *Synopsis Palmariorum Matheseos*

$$\pi = 3{,}14\ldots$$

There are various other ways of finding the *Lengths*, or *Areas* of particular *Curve Lines*, or *Planes*, which may very much facilitate the Practice; as for Instance, in the *Circle*, the Diameter is to Circumference as 1 to

$$\sqrt{\frac{16}{5} - \frac{4}{239}} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{16}{5^3} - \frac{4}{239^3}} + \frac{1}{5}\sqrt{\frac{16}{5^5} - \frac{4}{239^5}} -, \&c. =$$

3.14159, &c. $= \pi$. This *Series* (among others for the same purpose, and drawn from the same Principle) I receiv'd from the Excellent Analyst, and my much Esteem'd Friend Mr. *John Machin*; and by means thereof, *Van Ceulen*'s Number, or that in Art. 64. 38. may be Examin'd with all desireable Ease and Dispatch.

Första gången π användes ensamt för förhållandet. (Jones använde dock även bokstaven π i andra betydelser i samma bok.)

- Leonhard Euler 1748: *Introductio in analysin infinitorum*.

  Berömd lärobok. Etablerade π = 3,14... som standard.

  I vissa andra skrifter använde dock Euler andra bokstäver (t.ex. c eller p) istället för π, eller använde π för andra vinklar än 180°, t.ex. 90°eller 360°.

  3Blue1Brown på YouTube: How pi was almost 6.283185...

Ponamus ergo Radium Circuli ſeu Sinum totum eſſe = 1, atque ſatis liquet Peripheriam hujus Circuli in numeris rationalibus exacte exprimi non poſſe, per approximationes autem inventa eſt Semicircumferentia hujus Circuli eſſe = 3, 14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706798214808651327230664709384 46 +, pro quo numero, brevitatis ergo, ſcribam π, ita ut ſit π = Semicircumferentiæ Circuli, cujus Radius = 1, ſeu π erit longitudo Arcus 180 graduum.

Refererar till halvcirkel med radie 1, inte cirkel med diameter 1.

Ger 127 decimaler (med ett tryckfel, sjuan ska vara en åtta).

Pi eller tau?

- **Radien** betraktas numera som viktigare än **diametern**:

$$O = \pi \cdot d = \pi \cdot 2r = 2\pi \cdot r$$

  Så konstanten 2π är kanske mer fundamental än π?

- Somliga förespråkar att denna konstant ska kallas **tau**:

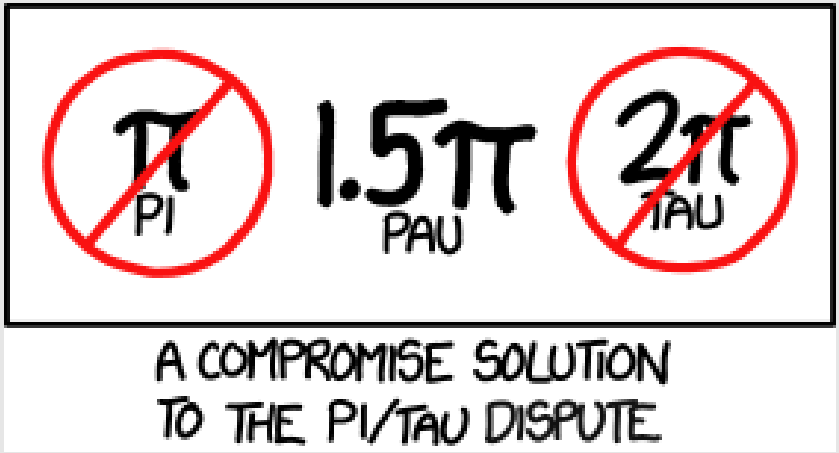
$$\boxed{\tau = 2\pi = 6{,}283185\ldots}$$

  (Och att man ska fira τ-dagen 28 juni istället för π-dagen 14 mars.)

- Sinus och cosinus är τ-periodiska.
- Uttrycket för cirkelns area blir $A = \frac{1}{2}\tau r^2$.

  (Jfr många andra kvadratiska uttryck där det är naturligt med en faktor $\frac{1}{2}$, t.ex. $\frac{1}{2}gt^2$ eller $\frac{1}{2}mv^2$.)

```
$ python
Python 3.7.2 (default, Jan 10 2019, 23:51:51)
[GCC 8.2.1 20181127] on linux
Type "help", "copyright", "credits" or "license" for more information.
>>> import math
>>> math.tau
6.283185307179586
```



xkcd.com/1292

Andra möjliga definitioner av π:

- $\dfrac{\pi}{4} = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ (cirkelns area som en integral)
- $\dfrac{\pi}{2} = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (cirkelns omkrets som en integral)
- $\dfrac{\pi}{2}$ är det minsta positiva nollstället till funktionen

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

- (Etc.)

Bevis att π är irrationellt

- Johann Heinrich Lambert 1766.

  Mathologer: Pi is IRRATIONAL: animation of a gorgeous proof

- Enklare bevis av Charles Hermite 1873.

  Mathologer: Pi is IRRATIONAL: simplest proof on toughest test

- Se även Wikipedia:

  Proof that π is irrational

Bevis att π är transcendent

- Ferdinand Lindemann 1882.
  Förenklat av David Hilbert 1893.

  Mathologer: The PROOF: e and pi are transcendental

- Följd: **Cirkelns kvadratur** omöjlig.
  (Med passare och linjal.)

> One of the unnoticed good effects of television is that people now watch it instead of producing pamphlets squaring the circle.
>
> Underwood Dudley, *Mathematical Cranks* (1992), s. 303

- Också känt att t.ex. e^π och $\pi + \ln 2 + \sqrt{2}\ln 3$ är transcendenta.
- Okänt: $\pi + e$, πe, $\frac{\pi}{e}$, π^e, $\ln \pi$, ...
- Men **minst ett** av talen $\pi + e$ och πe måste vara transcendent!
- Allmänt:

  Om a och b är transcendenta kan inte både $a + b$ och ab vara algebraiska, för då skulle

  $$p(x) = (x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$$

  ha algebraiska koefficienter men transcendenta rötter.

Beräkning av approximationer till π

- In- och omskrivna polygoner var under lång tid det enda sätt man kände till.
- Zǔ Chōngzhī (Tsu Ch'ung-chih) (Kina, 400-talet):

$$3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927$$

$$\pi \approx \frac{22}{7} = 3{,}142857\ldots$$ yuē lǜ ≈ ungefärligt värde

$$\pi \approx \frac{355}{113} = 3{,}1415929203\ldots$$ mì lǜ ≈ noggrant värde

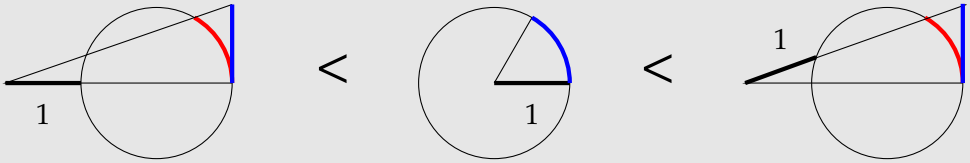
($\frac{355}{113}$ var inte känt av grekerna, indierna eller araberna. Återupptäckt i Europa först 1585 av Adriaan Anthonisz.)

- Ludolph van Ceulen publicerade 20 decimaler 1596, beräknade 35 innan han dog 1610.

  π kallas ibland på tyska **die Ludolphsche Zahl**.

- Willebrord Snell 1621 (utan bevis):

  Bättre instängning av cirkelbåge.



$$\frac{3\sin\phi}{2+\cos\phi} \qquad \phi \qquad 2\sin\frac{\phi}{3}+\tan\frac{\phi}{3}$$

Redan för $\phi = \pi/3$ blir det bättre än Arkimedes' 96-hörning.
Verifierade relativt enkelt van Ceulens 35 decimaler.

- Bevisat av Christiaan Huygens 1654.

- Ett genombrott:

$$\boxed{\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots}$$

för $-1 \le x \le 1$.

(Mādhava c:a 1400, James Gregory 1668, G. W. Leibniz 1671)

- Med $x = 1$ fås $\boxed{\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots}$

3Blue1Brown: Pi hiding in prime regularities

(Ger invecklat men intressant direkt bevis, inte via arctan-serien, utan genom att räkna heltalspunkter i cirklar med radie $R \to \infty$.)

- Konvergerar väldigt långsamt för $|x| = 1$. Mycket bättre om $|x| < 1$.

- Abraham Sharp (1699): 72 decimaler med

$$\boxed{\frac{\pi}{6} = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2k+1}}$$

- John Machin (1706): 100 decimaler med

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}}$$

Bevis: $(5+i)^4 = 476 + 480i$, och $\dfrac{476+480i}{1+i} = 2(239+i)$.

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{4}{5^{2k+1}} - \frac{1}{239^{2k+1}}\right)}$$

- William Shanks använde många år av sitt liv för att beräkna 707 decimaler (publ. 1873) med hjälp av Machins formel.

  Tyvärr var ”bara” de 527 första korrekta, men det upptäcktes inte förrän 1945.

- Liknande formler har använts vid världsrekordberäkningar ända in på 2000-talet.

  T.ex.

$$\frac{\pi}{4} = 12\arctan\frac{1}{49} + 32\arctan\frac{1}{57} - 5\arctan\frac{1}{239} + 12\arctan\frac{1}{110443}$$

- Eugene Salamin & Richard Brent (1976, oberoende av varandra):

$$\boxed{\frac{\pi}{2} = \frac{\operatorname{agm}\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} 2^k c_k^2}}$$

- **Aritmetiskt-geometriskt medelvärde**:

$$\boxed{\operatorname{agm}(a,b) = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n}$$

där

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= a > 0 \\ b_0 &= b > 0 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_{n+1} &= \tfrac{1}{2}(a_n + b_n) \\ b_{n+1} &= (a_n b_n)^{1/2} \\ c_{n+1} &= \tfrac{1}{2}(a_n - b_n) \end{aligned}}$$

- **Kvadratisk konvergens.** Antalet korrekta decimaler fördubblas i varje iteration!
- Formeln var känd av Gauss redan 1809, men föll i glömska.

  Ej lämplig för handräkning. Alla uträkningar måste göras med full precision (det önskade slutliga antalet decimaler). Rotutdragningar.
- Förbättrad implementation av Arnold Schönhage 1994. (Undviker kostsamma multiplikationer.)
- Liknande algoritmer av Jonathan & Peter Borwein har konvergens av ännu högre ordning.

Gauss' konstant

$$G = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\operatorname{agm}(1,\sqrt{2})} = 0{,}8346268416\ldots$$

- Förhållande mellan kurvlängd för **cirkel** och **lemniskata**.
- Berömd anteckning i Gauss' matematiska dagbok 30 maj 1799.
- Men borde heta **Lagranges konstant**.
  (Hade publicerat resultatet redan 1785.)

Nuvarande världsrekord för π-beräkning

$$\lfloor \pi \cdot 10^{13} \rfloor = 31\,415\,926\,535\,897 \text{ decimaler}$$

(Emma Haruka Iwao, Google, jan 2019)

Metod:

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (6k)!\,(545140134\,k + 13591409)}{(3k)!\,(k!)^3\, 640320^{3k+3/2}}$$

(David & Gregory Chudnovsky 1988)

Redan första termen ensam ger

$$\pi \approx 3.14159265358973 42\ldots$$

Sedan c:a 14 nya decimaler per term.

Det var **Ramanujan** som 1914 bevisade den första formeln av detta slag:

$$\frac{1}{\pi} = 162 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (6k)!\,(133\,k + 8)}{(3k)!\,(k!)^3\, 255^{3k+3/2}}$$

Relaterat till **elliptiska kurvor** och **modulära funktioner**, vilket också hänger ihop med **Fermat–Wiles sats** och det faktum att **Ramanujans konstant**

$$e^{\pi\sqrt{163}} = 262537412640768743{,}99999999999925\ldots$$

är mycket nära ett heltal.

- Uträkningen verifierad med **BBP-formeln**

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right)$$

som gör att man kan beräkna en godtycklig **hexa**decimal i π:s utveckling utan att beräkna de föregående.

(David Bailey, Peter Borwein, Simon Plouffe 1995)

- Och även med den effektivare BBP-liknande formeln

$$\pi = \frac{1}{2^6} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1024^k} \left(-\frac{2^5}{4k+1} - \frac{1}{4k+3} + \frac{2^8}{10k+1} - \frac{2^6}{10k+3} - \frac{2^2}{10k+5} - \frac{2^2}{10k+7} + \frac{1}{10k+9} \right)$$

(Fabrice Bellard 1997)

- Åter till Mādhava–Gregory–Leibniz-serien:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

$$\boxed{S_N = 4 \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}} \to \pi \qquad \text{då } N \to \infty$$

- Långsam konvergens.

  Med 150 000 termer fås bara fyra decimaler:

$$S_{150\,000} = 3{,}141585986\ldots$$

- Med 5 miljoner termer fås sex decimaler:

$$S_{5\,000\,000} = 3{,}1415924\ldots$$

- Men vänta lite… Vad kommer sedan?

$$S_{5\cdot 10^6} = 3{,}14159245358979323846464338327950278419716939938730582097494182230781640\ldots$$
$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640\ldots$$

$S_{5\cdot 10^6}$ = 3,1415924535897932384646433832795027841971693993873058209749418223078164 0...
π = 3,1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164 0...
diff. 2 −2 10 −122 2770

- Jämför med **Eulertalen**

$$(E_k^*)_0^\infty = (1, 1, 5, 61, 1385, 50521, \ldots)$$

Förekommer bl.a. i Maclaurinserien $\sec x = \dfrac{1}{\cos x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_k^* x^{2k}}{(2k)!}$

- Avvikelsen från π hos S_N verkar ha med $\pm 2E_k^*$ att göra?
- Svar ja, och det syntes i decimalutvecklingen eftersom $2N = 10^7$ råkade vara en **tiopotens** i fallet ovan:

$$\pi - S_N \sim \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2E_k^*}{(2N)^{2k+1}}$$

(J. Borwein, P. Borwein, K. Dilcher 1989)

Basel-problemet

Fråga (Pietro Mengoli 1650):

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots = \boxed{?}$$

Svar (Euler 1734): $\boxed{\dfrac{\pi^2}{6}}$

math.stackexchange.com:
Different methods to compute $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ (Basel problem)

3Blue1Brown:
Why is pi here? And why is it squared? A geometric answer to the Basel problem

Ett elementärt bevis för $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

- Grunken & instängningsregeln räcker!
- Utgångspunkt:

$$\boxed{0 < \sin x < x < \tan x} \qquad \text{för } 0 < x < \tfrac{\pi}{2}$$

- Detta medför

$$\frac{1}{\tan^2 x} < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x} \qquad \text{för } 0 < x < \tfrac{\pi}{2}$$

vilket p.g.a. trig-ettan är samma sak som

$$\boxed{\frac{1}{\sin^2 x} - 1 < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x}} \qquad \text{för } 0 < x < \tfrac{\pi}{2}$$

- Fixera ett heltal $n \geq 1$, och dela intervallet $(0, \frac{\pi}{2})$ i 2^n lika stora bitar. Kalla delningspunkterna för

$$x_k = k \cdot \left(\frac{\pi/2}{2^n} \right) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, 2^n - 1)$$

- Summera olikheten $\frac{1}{\sin^2 x} - 1 < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x}$ över $x = x_k$:

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} \left(\frac{1}{\sin^2 x_k} - 1 \right) \quad < \quad \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{x_k^2} \quad < \quad \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2 x_k}$$

Alltså, om summan i högerledet döps till S_n:

$$S_n - (2^n - 1) \quad < \quad \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k^2 \left(\frac{\pi/2}{2^n} \right)^2} \quad < \quad S_n$$

$$\boxed{\left(\frac{\pi/2}{2^n} \right)^2 \left(S_n - (2^n - 1) \right) \quad < \quad \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k^2} \quad < \quad \left(\frac{\pi/2}{2^n} \right)^2 S_n}$$

- Det återstår att beräkna $S_n = \sum \frac{1}{\sin^2 x_k}$. Notera att

$$\boxed{\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^2(\frac{\pi}{2} - x)}} = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

$$= \frac{4}{(2 \sin x \cos x)^2} = \boxed{\frac{4}{\sin^2 2x}}$$

Om man tar mittpunkten $\frac{\pi}{4}$ för sig, och parar ihop $x_k < \frac{\pi}{4}$ med $x_{2^n - k} = \frac{\pi}{2} - x_k > \frac{\pi}{4}$, får man alltså rekursionen

$$\boxed{S_n} = \sum \frac{1}{\sin^2 x_k} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + 4S_{n-1} = \boxed{2 + 4S_{n-1}}$$

- Begynnelsevillkor: $S_0 = 0$.

- För att lösa rekursionen, studera hur mycket S_n avviker från jämviktslösningen $S^* = -\frac{2}{3}$, dvs. betrakta

$$T_n = S_n - S^* = S_n + \tfrac{2}{3}$$

$$\begin{cases} S_n = 2 + 4S_{n-1} \\ S_0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} S_n + \frac{2}{3} = 4(S_{n-1} + \frac{2}{3}) \\ S_0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} T_n = 4T_{n-1} \\ T_0 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Detta ger $T_n = \frac{2}{3} \cdot 4^n$, så $S_n = T_n - \frac{2}{3}$ blir alltså

$$\boxed{S_n = \tfrac{2}{3}(4^n - 1)}$$

- Vet vi nu:

$$\boxed{\left(\frac{\pi/2}{2^n}\right)^2 \left(\tfrac{2}{3}(4^n - 1) - (2^n - 1)\right) < \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k^2} < \left(\frac{\pi/2}{2^n}\right)^2 \tfrac{2}{3}(4^n - 1)}$$

Ytterleden går här mot $\frac{\pi^2}{6}$ då $n \to \infty$. Klart!

Riemanns zeta-funktion

$$\boxed{\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}}$$

Konvergent för $s \in \mathbf{C}$ med $\mathrm{Re}(s) > 1$.

- Vi visade just att $\boxed{\zeta(2) = \pi^2/6}$.
- Euler beräknade även $\boxed{\zeta(4) = \pi^4/90}$, $\boxed{\zeta(6) = \pi^6/945}$, etc.
- Allmän formel, i termer av **Bernoullitalen** B_k:

$$\boxed{\zeta(2m) = \tfrac{1}{2}(-1)^{m+1} B_{2m} (2\pi)^{2m}/(2m)!}$$

- Mycket mindre är känt om $\zeta(2m+1)$.
- **Apérys konstant**

$$\boxed{\zeta(3) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}}$$

bevisades vara irrationell av Roger Apéry 1978.

- Wadim Zudilin 2001:

  Minst ett av talen $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9)$ och $\zeta(11)$ är irrationellt.

$$\zeta(2) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2} = \sum_{\text{udda } k} \frac{1}{k^2} + \underbrace{\sum_{\text{jämna } k} \frac{1}{k^2}}_{= \sum_{m\geq 1} \frac{1}{(2m)^2} = \frac{1}{4}\zeta(2)}$$

medför att

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \sum_{\text{udda } k} \frac{1}{k^2} = \frac{3}{4}\zeta(2) = \frac{\pi^2}{8}$$

- Den motsvarande **alternerande** serien kallas för **Catalans konstant**:

$$\boxed{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^2}} = \frac{1}{1} - \frac{1}{9} + \frac{1}{25} - \frac{1}{49} + \frac{1}{81} - \cdots$$

$$= \boxed{0{,}9159655941\ldots}$$

Ej känt om den är rationell eller inte.

- Här är det istället fallen med *udda* potenser som går att beräkna uttryckt i π. För kuber blir det

$$\boxed{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3}} = \frac{1}{1} - \frac{1}{27} + \frac{1}{125} - \frac{1}{343} + \frac{1}{729} - \cdots = \boxed{\frac{\pi^3}{32}}$$

Gauss-integralen

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}} \quad \left(\Longleftrightarrow \quad \boxed{I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\,dx = 1} \right)$$

- Gausskurvan $y = e^{-x^2}$ beskriver normalfördelning i sannolikhetslära.
- Man behöver veta dess integral för att kunna normera så att totala sannolikheten blir 1.
- Problem: Dess primitiv går ej att uttrycka i elementära funktioner (bevisat av Liouville på 1830-talet).

Följande uträkning med hjälp av **polära koordinater**

$$x = r\cos\phi \qquad y = r\sin\phi$$

och deras **lokala areaskala** r är en klassiker i flervariabel-analyskurser:

$$\begin{aligned}
I^2 = I \cdot I &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2}\,dy\right) \\
&= \iint_{\mathbf{R}^2} e^{-\pi x^2} e^{-\pi y^2}\,dx\,dy = \iint_{\mathbf{R}^2} e^{-\pi(x^2+y^2)}\,dx\,dy \\
&= \iint_{0\le r,\ 0\le\phi<2\pi} e^{-\pi r^2}\, r\,dr\,d\phi \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\phi\right)\left(\int_0^{\infty} r\,e^{-\pi r^2}\,dr\right) = 2\pi\cdot\left[\tfrac{-1}{2\pi}\,e^{-\pi r^2}\right]_0^{\infty} = 1
\end{aligned}$$

Slutsats, eftersom $I > 0$: $I = 1$, vilket skulle visas.

Ett bevis för att $\pi < 22/7$ (D. P. Dalzell, 1944)

$$0 < \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - \frac{4}{1+x^2}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^7}{7} - \frac{4x^6}{6} + x^5 - \frac{4x^3}{3} + 4x - 4\arctan x\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{7} - \frac{2}{3} + 1 - \frac{4}{3} + 4 - 4\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{22}{7} - \pi$$

Liknande (S. K. Lucas 2005, 2007):

$$0 < \int_0^1 \frac{x^5(1-x)^6(197+462x^2)}{530(1+x^2)}\,dx = \pi - \frac{333}{106}$$

$$0 < \int_0^1 \frac{x^8(1-x)^8(25+816x^2)}{3164(1+x^2)}\,dx = \frac{355}{113} - \pi$$

Wallis' produkt

John Wallis 1655

$$\boxed{\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots}$$

- Låt $I_n = \int_0^\pi \sin^n x\,dx$. **Partiell integration** ger, för $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^\pi \sin x \sin^{n-1} x\,dx \\ &= \Big[(-\cos x)\sin^{n-1} x\Big]_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x)\,(n-1)\sin^{n-2} x \cos x\,dx \\ &= 0 + (n-1)\int_0^\pi \sin^{n-2} x\,(1-\sin^2 x)\,dx = (n-1)\,(I_{n-2} - I_n) \end{aligned}$$

dvs. $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$.

- Uträkning ger $I_0 = \pi$, $I_1 = 2$. Och $(I_n)_0^\infty$ är uppenbart en **avtagande** följd:

$$\pi > 2 > \frac{1}{2}\cdot\pi > \frac{2}{3}\cdot 2 > \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi > \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2 > \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi > \frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2 > \cdots$$

- Lös ut olikheter för $\pi/2$ och använd **instängningsregeln** för gränsvärden.

- Ett annat bevis:

  3Blue1Brown: The Wallis product for pi, proved geometrically

- Låt p_n beteckna sannolikheten för **lika många krona som klave** vid $2n$ slantsinglingar.

$$p_n = \frac{\binom{2n}{n}}{2^n} = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)(2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)2n}$$

$$\frac{1}{p_n^2} = \underbrace{\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n-2}{2n-1} \frac{2n}{2n-1}}_{\approx \pi/2 \text{ enl. Wallis}} \cdot 2n \approx \pi n$$

$$\boxed{p_n \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}}} \quad \text{när } n \text{ är stort}$$

Stirlings approximation av n-fakultet

Trapetsregeln (med steglängd 1) ger att

$$\int_1^n \ln x \, dx = \Big[x \ln x - x \Big]_1^n = n \ln n - n + 1$$

är ungefär lika med

$$\frac{\ln 1 + \ln 2}{2} + \frac{\ln 2 + \ln 3}{2} + \frac{\ln 3 + \ln 4}{2} + \cdots + \frac{\ln(n-1) + \ln n}{2}$$

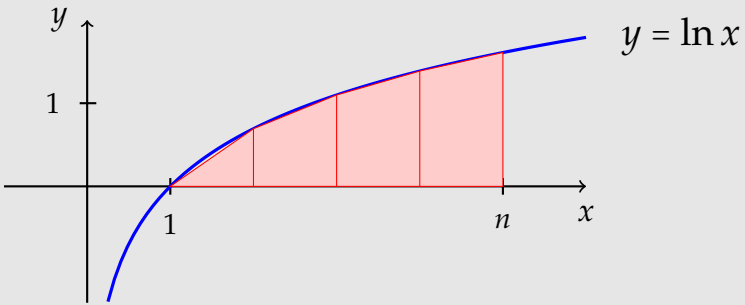
$$= \ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \cdots + \ln(n-1) + \ln(n) - \frac{\ln n}{2}$$

$$= \ln(n!) - \frac{\ln n}{2}$$

dvs.

$$\ln(n!) \approx (n + \tfrac{1}{2}) \ln n - n + 1$$

$$\boxed{n! \approx n^{n+1/2} e^{1-n} = e\sqrt{n}\,(n/e)^n}$$



Kurvan är konkav, så trapetsapproximationen ger en underskattning:

$$n! < e\,\sqrt{n}\,(n/e)^n$$

Bättre: $n! \approx C\,\sqrt{n}\,(n/e)^n$ med något $C < e$?

- Abraham de Moivre 1730:

  Gränsvärdet $\boxed{C = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{n}\,(n/e)^n}}$ existerar.

- James Stirling 1730:

$$\boxed{C = \sqrt{2\pi}} \approx 2{,}5066 < e$$

  (Bevis på nästa sida.)

- Alltså Stirlings formel: $\boxed{n! \approx \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n}$
- Kan preciseras, t.ex.

$$\boxed{\sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n\, e^{1/(12n+1)} < n! < \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n\, e^{1/(12n)}}$$

Stirlings uträkning: Wallis' produkt ger

$$\boxed{\frac{\pi}{2}} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{2k}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k+1} \right) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{2k}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k} \cdot \frac{2k}{2k} \cdot \frac{2k}{2k+1} \right)$$

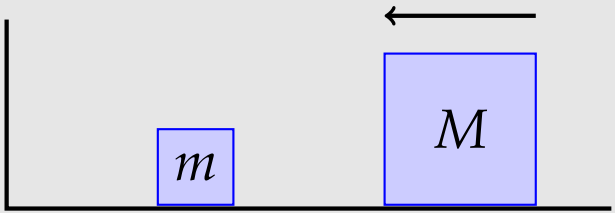
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^4\, 2^{4n}}{(2n)!\,(2n)!\,(2n+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\dfrac{n!}{\sqrt{n}\,(n/e)^n} \right)^4 \left(\sqrt{n}\,(n/e)^n \right)^4 2^{4n}}{\left(\dfrac{(2n)!}{\sqrt{2n}\,(2n/e)^{2n}} \right)^2 \left(\sqrt{2n}\,(2n/e)^{2n} \right)^2 (2n+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\dfrac{n!}{\sqrt{n}\,(n/e)^n} \right)^4 n^2}{\left(\dfrac{(2n)!}{\sqrt{2n}\,(2n/e)^{2n}} \right)^2 2n\,(2n+1)} = \boxed{\frac{C^4}{C^2 \cdot 4}} \implies \boxed{C = \sqrt{2\pi}}$$

Ett mekanikproblem

(Gregory Galperin 1995, publ. 2003)



Hur många kollisioner (inkl. med väggen)?

(Ingen friktion, elastiska stötar.)

Massförhållande M/m	Antal kollisioner
1	3
10^2	31
10^4	314
10^6	3141
10^8	31415
10^{10}	314159
$\vdots$	$\vdots$

3Blue1Brown:
The most unexpected answer to a counting puzzle
So why do colliding blocks compute pi?
How colliding blocks act like a beam of light … to compute pi.

$$e = 2{,}7182818284\ldots$$

Möjliga definitioner av talet e:

- $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
- $e = \exp(1)$ där **exponentialfunktionen** definieras som potensserien

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

eller som lösningen $y(x) = \exp(x)$ till differentialekvationen

$$y'(x) = y(x) \qquad y(0) = 1$$

eller som den inversa funktionen $\exp = \ln^{-1}$ till

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \qquad \left(\text{så att } 1 = \int_1^e \frac{dt}{t}\right)$$

- (Etc.)

- Talet e upptäcktes mycket senare än π.
- Diverse ”nästan-upptäckter” i logaritmernas barndom (1600-talet).
- Jakob Bernoulli 1683 (studerade ränta på ränta):

  Gränsvärdet $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ existerar, ligger mellan 2 och 3.

  Såg inget samband med logaritmer.
- Leibniz 1690–91, brev till Huygens: Refererar till talet b vars logaritm är 1.
- Euler 1731: Använder notationen e i brev till Goldbach.
- Euler 1736: *Mechanica*.

  Första publicerade verket där beteckningen e används.

- Euler 1748: *Introductio in analysin infinitorum*.

  Första grundliga studien av exponentialfunktionen och e.

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$$

$$e = [2;1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1,10,1,\dots]$$

$$e \approx 2{,}718281828459045235$$

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

och mycket annat.

Bevis att e är irrationellt

- Euler 1737: Kedjebråket är oändligt.
- Fourier: (Publ. av de Stainville 1815. "Cette démonstration m'a été communiquée par M. Poinsot, qui m'a dit la tenir de M. Fourier.")

$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + (0 < \text{summa} < 1)$ är ej ett heltal.

Om $e = \frac{a}{b}$ vore **rationellt**, så vore

$$x = b!\left(e - \sum_{k=0}^{b} \frac{1}{k!}\right) = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot b!}_{\text{heltal}} - \sum_{k=0}^{b} \underbrace{\frac{b!}{k!}}_{\text{heltal}}$$

ett heltal. Men å andra sidan man kan visa från

$$x = b!\left(\sum_{k=b+1}^{\infty} \frac{1}{k!}\right) \qquad (\text{med } b \geq 2, \text{ ty } e = \tfrac{a}{b} \notin \mathbf{Z})$$

att $0 < x < 1$, **motsägelse**.

Bevis att e är transcendent

- Charles Hermite 1873.

  Gav sig inte på π, i tron att det skulle vara för svårt.

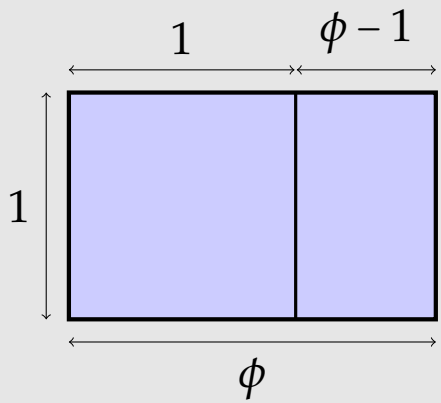
  Men Lindemanns bevis 1882 för att π är transcendent använder samma idé som Hermites bevis för e.

- Också förenklat av Hilbert 1893, i samma artikel som beviset för π.

  Mathologer: The PROOF: e and pi are transcendental

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339887\ldots$$

Det gyllene snittet:



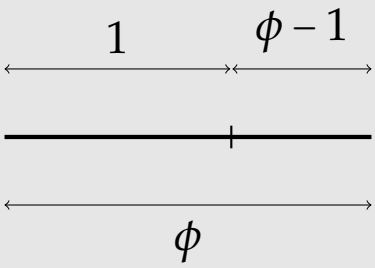
Stora och lilla rektangeln har samma proportioner när

$$\boxed{\frac{\phi}{1} = \frac{1}{\phi - 1}} \iff \phi^2 - \phi - 1 = 0$$

$$\iff \phi = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{1}{2})^2 + 1} = \tfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$$

dvs. $\boxed{\phi = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5})}$ (den negativa lösningen förkastas).

Uttryckt i termer av delning av en sträcka:



Den korta delen förhåller sig till den långa delen så som den långa delen förhåller sig till hela sträckan.

$$\frac{\phi - 1}{1} = \frac{1}{\phi}$$

- Förekommer i Euklides' *Elementa*.

  T.ex. i samband med konstruktion av regelbunden femhörning.

  Benämning i latinsk översättning: **proportio habens medium et duo extrema**.

  Men beteckningen ϕ kommer **inte** från antikens greker.

- Luca Pacioli 1509: *Divina proportione*.

  Återger resultat av Euklides och andra.

  Illustrationer av Leonardo da Vinci.

  Listar bl.a. fem egenskaper som detta ”**gudomliga förhållande”** har gemensamt med Gud.

  T.ex. ”kan ej definieras exakt eller förstås i ord” (irrationellt tal).
  Eller ”treenigheten” ($\phi - 1 : 1 : \phi$).
  Eller ”är oföränderlig” (konstant)!

- Martin Ohm 1835: *Die Reine Elementarmathematik, Bd II*.

  Bror till fysikern Georg Ohm (Ohms lag).

  Första användningen av benämningen **der Goldene Schnitt**.

- Det vackraste delningsförhållandet?

  Det finns många tvivelaktiga påståenden om hur gyllene snittet har samband med konst, musik, aktiemarknaden, människokroppens proportioner, Parthenon, Keopspyramiden, kosmos, utomjordingar, etc.

  (Eller varför inte ”$\pi = \dfrac{4}{\sqrt{\phi}} = 3{,}144605511\ldots$”?)

  Adolf Zeising (1810–1876), tysk psykolog, tyckte sig se gyllene snittet överallt i natur och konst. ”Universell lag för skönhet.”

  Gustav Fechner (1801–1887), tysk psykolog, hävdade att hans försökspersoner fann den gyllene rektangeln mest estetiskt tilltalande.

  Arkitekten Le Corbusier (1887–1965) använde sig mycket medvetet av gyllene snittet.

- Förekomst i naturen?

  Vad som möjligen är sant är att man kan observera Fibonaccitalen och den gyllene vinkeln $\frac{\phi-1}{\phi} \cdot 2\pi \approx 137{,}5°$ i naturen.

  (Solrosor, kottar, ananas, . . .)

- Theodore Andrea Cook 1914: *The Curves of Life*.

  Brittisk konstkritiker och författare, silvermedaljör i litteratur(!) vid OS i Antwerpen 1920.

  Tjock bok om **spiraler** i naturen. Många bilder!

  Kallar gyllene snittet för **Ratio of Pheidias** (grekisk skulptör, 400-talet f.Kr.).

  > [...] it would appear that Chinese philosophy had adopted the logarithmic spiral as a symbol of growth as long ago as the twelfth century. But the exact form of logarithmic spiral most suitable to the fundamental conceptions involved had never yet been satisfactorily discovered. The Formula for Growth now suggested in this book is here called the ϕ spiral, or Spiral of Pheidas, an new mathematical conception worked out from an ancient principle by Mr. Mark Barr and Mr. William Schooling [...]

  Lite åt talmystikhållet, alltså.

  Men det var i denna bok som beteckningen ϕ etablerades, med hänvisning till Barr (amerikansk ingenjör) och Schooling (brittisk försäkringsstatistiker).

Fibonaccitalen och gyllene snittet

$$\boxed{F_0 = 0} \qquad \boxed{F_1 = 1} \qquad \boxed{F_n = F_{n-1} + F_{n-2}}$$

$$(F_n)_{n=0}^{\infty} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$$

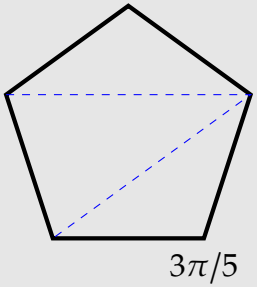
$$\boxed{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) = \frac{\phi^n - (\frac{-1}{\phi})^n}{\sqrt{5}} \approx \frac{\phi^n}{\sqrt{5}}}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi}$$

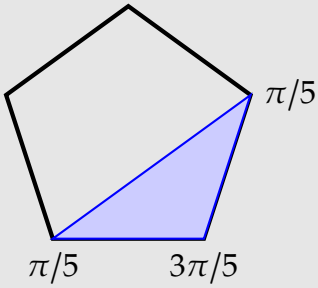
En engelsk mil (*mile*) är 1,609344 km, ganska nära $\phi = 1{,}618\ldots$

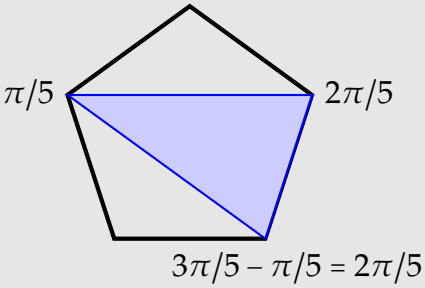
Så 5 miles ≈ 8 km, 8 miles ≈ 13 km, 13 miles ≈ 21 km, osv.

Den regelbundna femhörningen

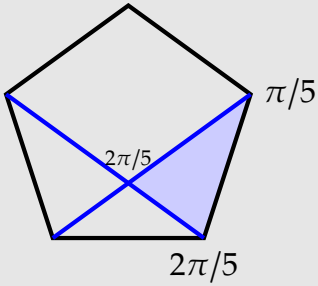


Uppdelningen i tre trianglar visar att totala vinkelsumman är 3π. Så varje vinkel är $3\pi/5$.

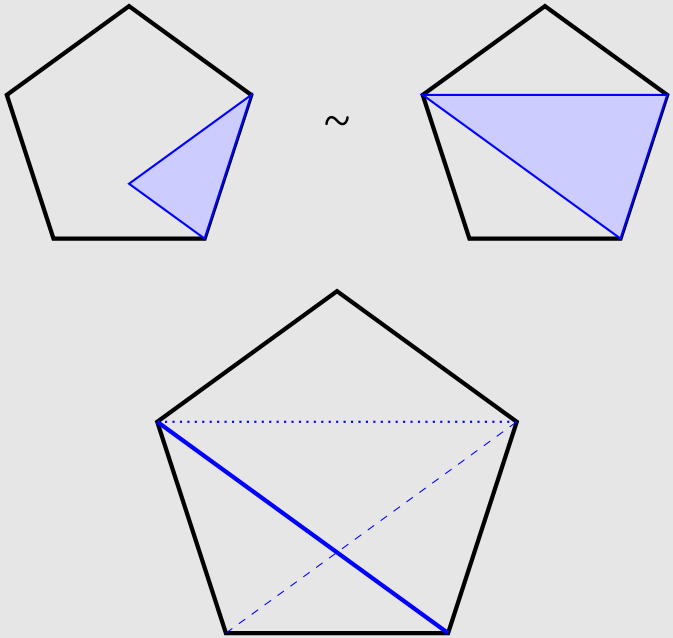




Likbenta trianglar.

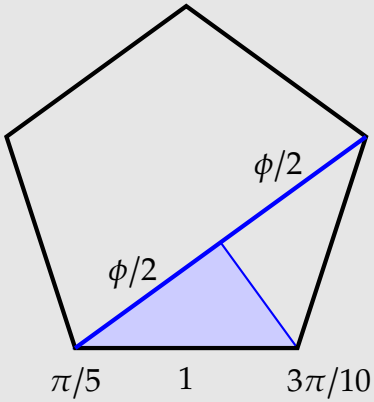


Också likbent, likformig med den högra ovan.



Diagonalerna delar alltså varandra så att den korta delen förhåller sig till den långa delen så som den långa delen förhåller sig till hela sträckan. Gyllene snittet!

Den långa delen är lika lång som sidan i femhörningen, och **diagonalen är alltså ϕ gånger så lång som sidan**.



$$\cos(\pi/5) = \sin(3\pi/10) = \phi/2$$

$$\cos(36^\circ) = \sin(54^\circ) = \phi/2$$

I en regelbunden **ikosaeder** (”20-sidig tärning”) bildar hörnen tre stycken ortogonala gyllene rektanglar (på fem olika sätt).

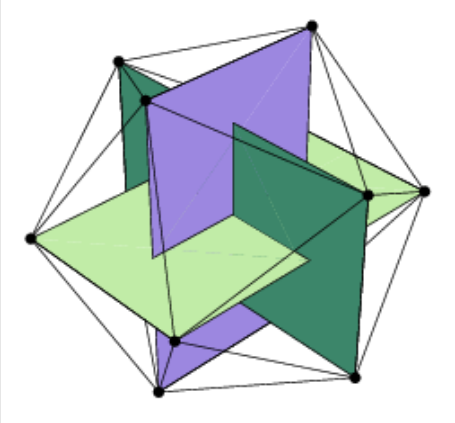


Bild: Wikimedia Commons

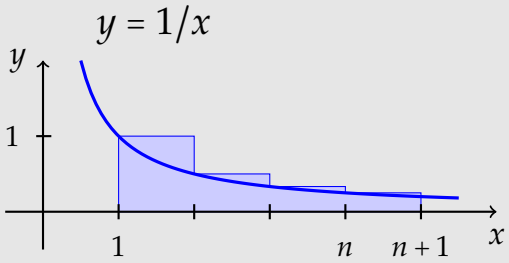
Rotationssymmetrigruppen består av 60 rotationer, och är isomorf med den alternerande gruppen A_5, motsvarande de jämna permutationerna av de fem möjliga sådana rektangelkonfigurationerna.

En regelbunden **dodekaeder** (”12-sidig tärning”) har samma symmetri.

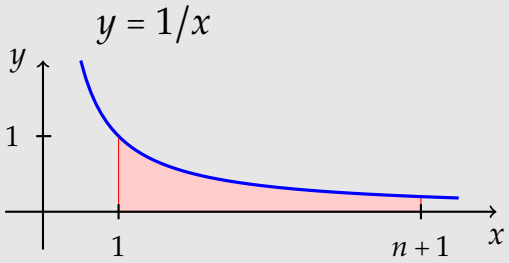
$$\gamma = 0{,}5772156649\ldots$$

Den **harmoniska serien** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ är **divergent**.

Uppskattning av delsumman $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$:



$$\text{Area} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n$$



$$\text{Area} = \int_0^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1)$$

$$\text{Överskjutande area} = H_n - \ln(n+1)$$

- Sammanlagd överskjutande area när $n \to \infty$:

$$\boxed{\gamma = \lim_{n\to\infty}\big(H_n - \ln(n+1)\big) = 0{,}5772156649\ldots}$$

- Gränsvärdet existerar, ty **växande** och **uppåt begränsad** talföljd. (Överskjutande arean är högst 1, vilket man ser genom att flytta in alla bitarna till y-axeln; de ryms inuti enhetskvadraten.)

- Kallas **Eulers konstant**, eller ibland **Euler–Mascheronis konstant** för att inte förväxlas med e.

- Vår definition ovan:

$$\boxed{\gamma = \lim_{n\to\infty}\big(H_n - \ln(n+1)\big)}$$

- Vanligare:

$$\boxed{\gamma = \lim_{n\to\infty}\big(H_n - \ln n\big)}$$

Detta är samma sak, eftersom

$$\ln(n+1) - \ln n = \ln\tfrac{n+1}{n} = \ln(1+\tfrac{1}{n}) \to 0 \quad \text{då } n \to \infty.$$

- Allmännare: Kan ta

$$\boxed{\gamma = \lim_{n\to\infty}\big(H_n - \ln(n+\alpha)\big)}$$

för vilket $\alpha \in \mathbf{R}$ som helst.

För snabbast konvergens, ta $\alpha = 1/2$.

(Ger fel av ordning n^{-2} istället för n^{-1}.)

- Euler 1734: *De Progressionibus harmonicis observationes*.

$$\ln(n+1) = \sum_{k=1}^{n}\big(\ln(k+1) - \ln k\big) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} - \frac{1}{4k^4} + \cdots\right)$$

$$\ln(n+1) - H_n = \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} - \frac{1}{4k^4} - \cdots\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\big(H_n - \ln(n+1)\big) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k^2} - \frac{1}{3k^3} + \frac{1}{4k^4} - \cdots\right)$$

$$= \boxed{\frac{\zeta(2)}{2} - \frac{\zeta(3)}{3} + \frac{\zeta(4)}{4} - \cdots \approx 0{,}577218}$$

- Euler kallade denna konstant för C. Beteckningen γ kom senare (1830-talet).

- Euler 1776: *De Numero Memorabili in Summatione Progressionis Harmonicae Naturalis Occurente*.

  Fler resultat.

  Bl.a. ger **Euler–Maclaurins summationsformel** att

$$\boxed{H_n \sim \gamma + \ln n + \frac{1}{2n} - \frac{1/6}{2n^2} + \frac{1/30}{4n^4} - \frac{1/42}{6n^6} + \cdots}$$

  med **Bernoullitalen** B_k i nämnarna.

  Beräknade 16 decimaler med hjälp av detta (termer upp t.o.m. n^{-14} i högerledet, och med $n = 10$ insatt):

$$\gamma \approx 0{,}5772156649015325$$

- Lorenzo Mascheroni 1790:
  Adnotationes ad calculum integrale Euleri.

  Beräknade 32 decimaler av γ (varav 19 var korrekta).

- Ej känt om γ är rationellt eller inte.

  Men om $\gamma = a/b$ så måste b vara minst 10^{242080}.

  (T. Papanikolaou, genom att beräkna 470006 termer i kedjebråksutvecklingen för γ.)

- G. H. Hardy sägs ha erbjudit sin professur i Oxford till den som kunde bevisa att talet γ är irrationellt!

- **Gammafunktionen** $\Gamma(z)$ ges för $\mathrm{Re}(z) > 1$ av

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x}\, dx$$

och utvidgas via relationen

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$$

till att vara definierad för $z \in \mathbf{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

- Från $\Gamma(1) = 1$ fås $\Gamma(n+1) = n!$ för $n \in \mathbf{N}$.
- Derivatan i de punkterna involverar γ:

$$\Gamma'(n+1) = n!\left(H_n - \gamma\right)$$

Ett par andra intressanta värden:

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty x^{-1/2} e^{-x}\, dx = 2\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{4}) = (2\pi)^{3/4}\sqrt{G}$$

med Gauss' konstant $G = \dfrac{1}{\operatorname{agm}(1, \sqrt{2})}$.

Massor av bestämda integraler ger upphov till γ :

$$\int_0^\infty e^{-x} \ln x \, dx = -\gamma$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \ln x \, dx = -\tfrac{1}{4}\sqrt{\pi}\,(\gamma + 2\ln 2)$$

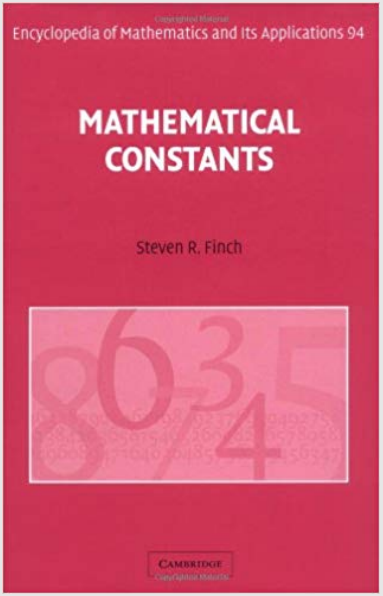
$$\int_0^\infty e^{-x} \ln^2 x \, dx = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{1-x}\right) dx = \gamma$$

$$\int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^2} \, dx = \int_0^1 \left\{\frac{1}{t}\right\} dt = 1 - \gamma$$

$$\vdots$$

Till sist, ett boktips för konstantentusiaster:



Steven R. Finch, *Mathematical Constants*
Cambridge University Press (2003), 602 sidor