Jongleringsteori

Hans Lundmark, MAI

TATA40 Matematiska utblickar

(sept 2019)

”Siteswap”

- Matematisk modell & notation för **jongleringsmönster**.
  (*Vissa aspekter* av *vissa typer* av mönster.)
- Utvecklades på 1980-talet.
- Modellen struntar i *vad* som jongleras.
  Säg **bollar** för enkelhets skull.
- Den struntar också i om man kastar bakom ryggen, gör piruetter, korsar armarna, etc.

- Grundantagande:

  Man kastar och fångar **en boll i taget**.

- **Inte** i denna modell, alltså:

  - **Multiplex jonglering**

    En hand fångar/kastar/håller flera bollar samtidigt.

  - **Synkron jonglering**

    Flera händer fångar/kastar samtidigt.

  (Kan dock generaliseras även till sådan jonglering.)

- Vänster och höger hand alternerar.

  (Antalet händer spelar egentligen ingen roll i teorin. Men det är så man brukar jonglera i praktiken.)

- Diskreta tidssteg.
- I varje tidssteg händer detta:

  En tidigare kastad boll kommer in för landning.

  Den hand som står på tur fångar denna boll, och kastar den omedelbart igen.

- Eller möjligen detta:

  Alla bollar har tidigare kastats så högt att ingen av dem är på väg att landa för tillfället.

  Ingenting att göra, bara vänta till nästa tidssteg.

- I notationen betecknas varje kast med ett heltal $k \geq 1$ som anger **hur många tidssteg senare** den bollen kommer att (fångas och) kastas igen.
- Ett **väntesteg** (tom hand, inget kast) betecknas med talet **noll**.
- Jongleringen beskrivs alltså abstrakt som en följd av kast och/eller väntesteg:

$$\ldots, 3, 3, 4, 5, 5, 0, 1, 7, 7, 4, 0, 0, 0, 3, 3, \ldots$$

(I princip en oändlig följd.)

- Ju **fler tidssteg** bollen ska vara i luften innan den fångas, desto **högre** måste den kastas.
- Talet k brukar därför kallas för kastets **höjd**.

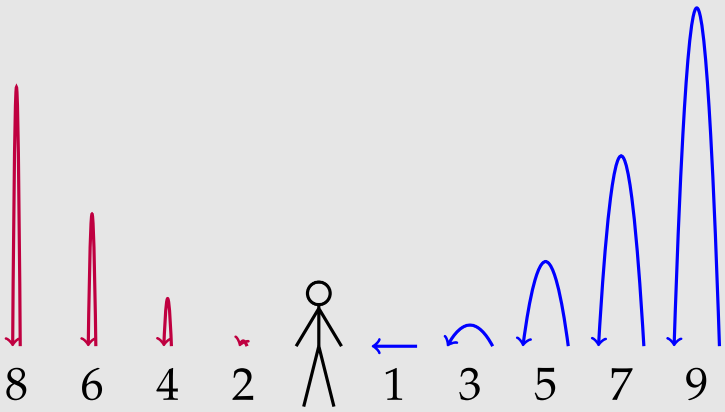
Men den **verkliga kasthöjden** som behövs är förstås proportionell mot **flygtiden i kvadrat**.

Och flygtiden måste i praktiken vara lite kortare än k tidssteg, för själva fångst- och kaströrelsen tar lite tid också.

Och tidsstegen kan överlappa i praktiken, för en hand kan fånga nästa boll redan under tiden som den andra handen gör sitt kast.

Vid jonglering med alternerade höger/vänster hand gäller:

- **Jämna kast fångas med samma hand som kastade**.
- **Udda kast fångas med den andra handen**.



Jämna kast: till samma hand igen

Udda kast: från ena handen till den andra

En äkta **tvåa** är ett löjligt lågt kast, som vanligen realiseras genom att **hålla** bollen i två tidssteg istället för att kasta.

- Fundamental princip:

  > Man måste välja kasthöjderna så att **två bollar aldrig landar i samma tidssteg**.

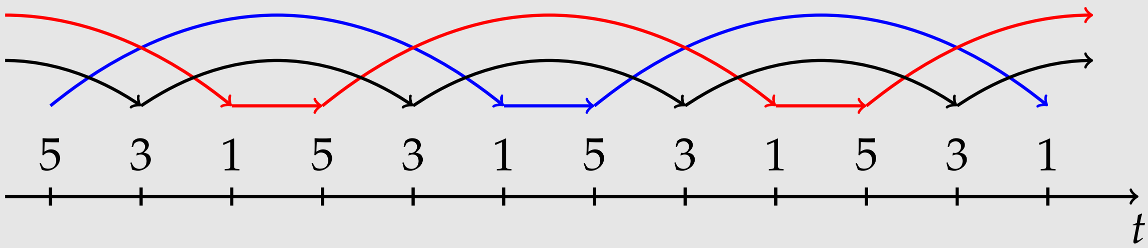
  (T.ex. $\ldots, 5, 4, \ldots$ funkar inte.)

- Dessutom måste nollorna stå på exakt de tidssteg där det inte landar någon boll.

  (T.ex. $\ldots, 3, 3, 3, 0, \ldots$ funkar inte.)

Exempel. Ett mönster med tre bollar:

$$\ldots, 5, 3, 1, 5, 3, 1, 5, 3, 1, \ldots$$



- Strunta i kommatecknen.

  (Kast med tvåsiffrig höjd används sällan i praktiken.)

- Skriv bara ut en period.

- Kortare skrivsätt, alltså: **531**.

  (Eller **315** om man så föredrar, eller **153**.)

Några exempel på periodiska jongleringsmönster

Tre bollar

- 3 (alltså $\cdots 33333333 \cdots$)

  Kaskad, det enklaste mönstret med tre bollar.

- 51 (alltså $\cdots 51515151 \cdots$)

  Shower, ganska mycket svårare!

- 441, 531, 34512, 5520, 55500, 60, 42, ...

Fyra bollar

- 4 Fontän/vattenfall = två i varje hand (asynkront).
- 53 *Half-shower*.
- 71 *Shower*.
- 534, 5551, 55514, ...

Fem bollar

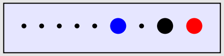
- 5 Kaskad.
- 73 *Half-shower*.
- 91 *Shower*.
- 64, 645, 753, 56734, 677172, …

Hur man enklast konstruerar giltiga kastföljder

I varje tidssteg befinner sig bollarna i ett visst **jonglerings-tillstånd**, den ”kö” som beskriver när de kommer att landa i framtiden.

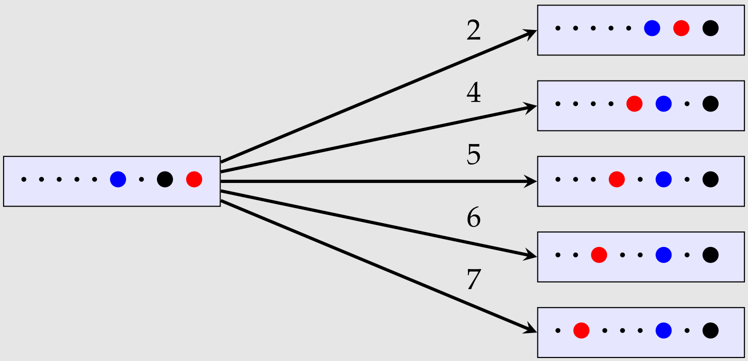
T.ex. kan det se ut såhär:

1. En boll (röd) ska just till att landa.
2. En boll (svart) kommer att landa i tidssteget därefter.
3. Ingen boll landar i steget därpå.
4. Ännu en boll (blå) landar ett steg senare.
5. Och det var allt, inga fler bollar är i luften.

Symboliskt (höger är längst fram i kön): 

När man fångat den första bollen får man inte kasta 1 eller 3. (Skulle leda till att två bollar landar samtidigt.)

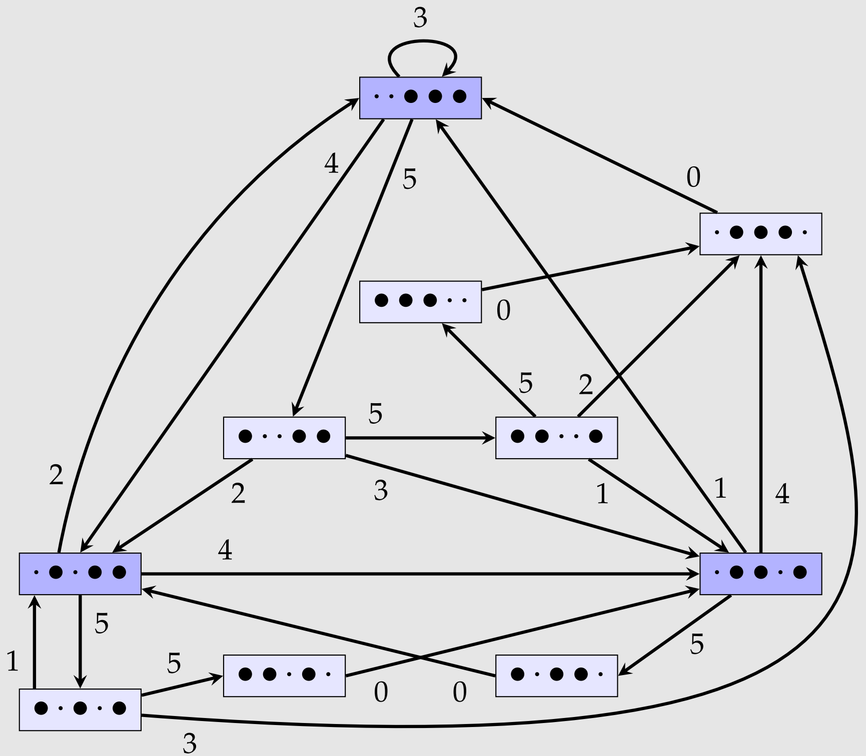
Övriga kast går bra, och ger nytt tillstånd i nästa tidssteg:



etc.

(Den kastade bollen ställer sig på anvisad plats i kön, och de övriga flyttar ett steg framåt.)

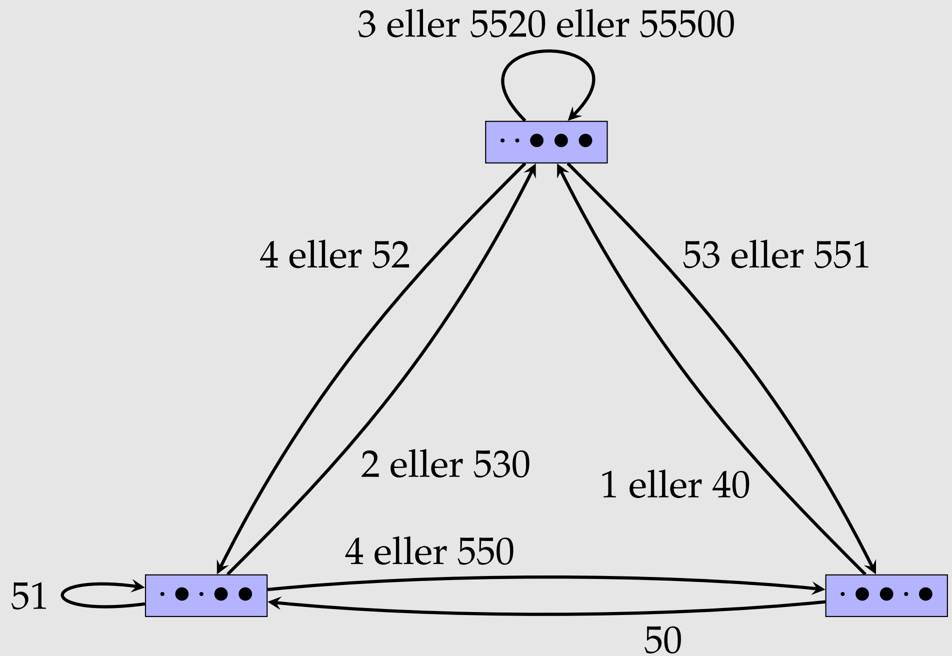
Med $b = 3$ bollar och kasthöjd högst $h = 5$ finns $\binom{h}{b} = \binom{5}{3} = 10$ tillstånd:



Giltiga jongleringsmönster $\longleftrightarrow$ Stigar i detta **tillståndsdiagram**

Tillståndsdiagrammet kan **förenklas** genom att ta bort tillstånd med **bara en pil in** (en femma) eller **bara en pil ut** (en nolla), och tilllåta att en pil står för en *följd* av kast.

Kvar blir då bara tillstånden $\boxed{\cdot\,\square\,\square\,\square\,\bullet}$, som är $\binom{h-2}{b-1} = \binom{5-2}{3-1} = 3$ stycken:



- Tillståndsdiagram gör det enkelt att **konstruera** ”siteswaps” (dvs. giltiga jongleringsmönster) med ett givet antal bollar och given maxhöjd.
- Men hur avgör man om en **given talföljd** kan jongleras?
- Man kan ganska enkelt visa följande:

$$\boxed{a_0 a_1 \cdots a_{n-1} \text{ är en } (n\text{-periodisk) siteswap.}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Man får en } \textbf{permutation} \text{ av talen } 0, 1, \ldots, n-1 \text{ när man} \\ \text{reducerar talen } a_k + k \text{ modulo } n.\end{array}}$$

- Och i så fall är **antalet bollar** lika med **medelvärdet**:

$$b = \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n}$$

Exempel:

- **53487** är **inte** en siteswap, ty reduktion modulo 5 av

$$(5,3,4,8,7)+(0,1,2,3,4)=(5,4,6,11,11)$$

ger icke-permutationen

$$(0,4,1,1,1).$$

- Men **53494** går bra att jonglera, eftersom reduktion av

$$(5,3,4,9,4)+(0,1,2,3,4)=(5,4,6,12,8)$$

ger permutationen

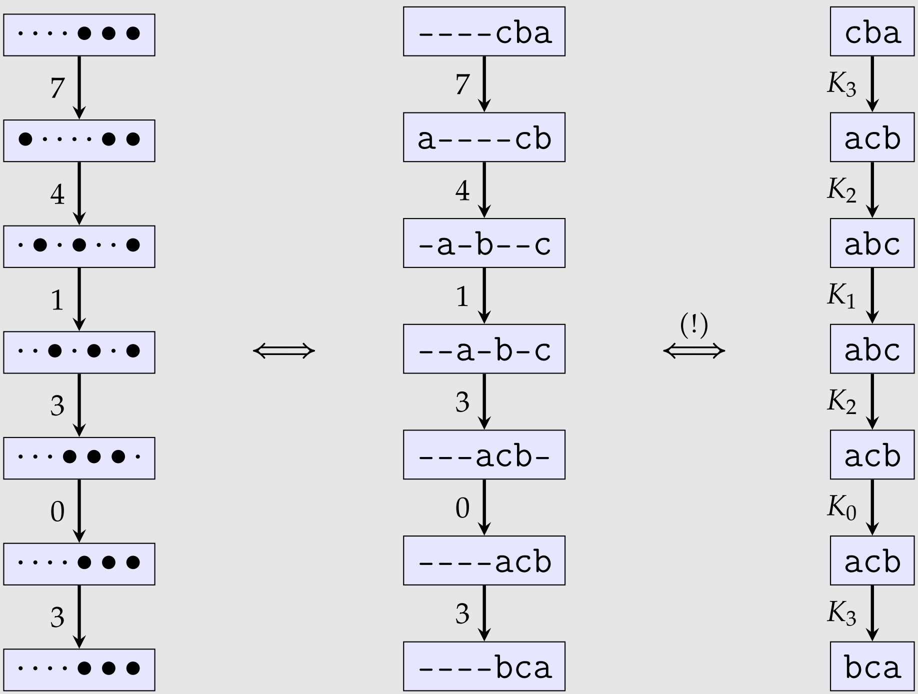
$$(0,4,1,2,3).$$

Antalet bollar i denna siteswap är $\frac{5+3+4+9+4}{5}=5$.

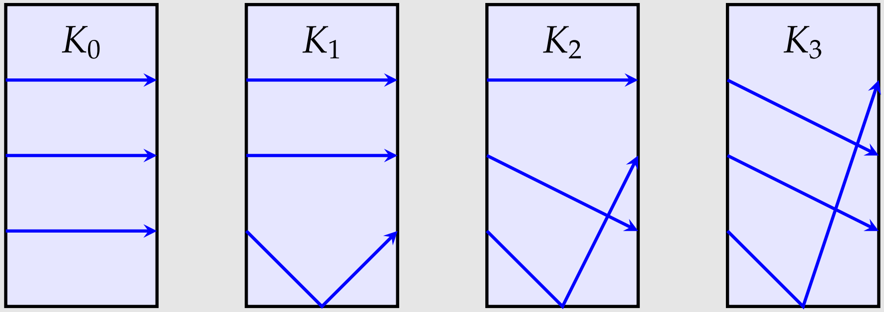
Hur många?

För att **räkna** hur många siteswaps det finns av en given längd och med ett visst antal bollar är en **alternativ representation** bättre.

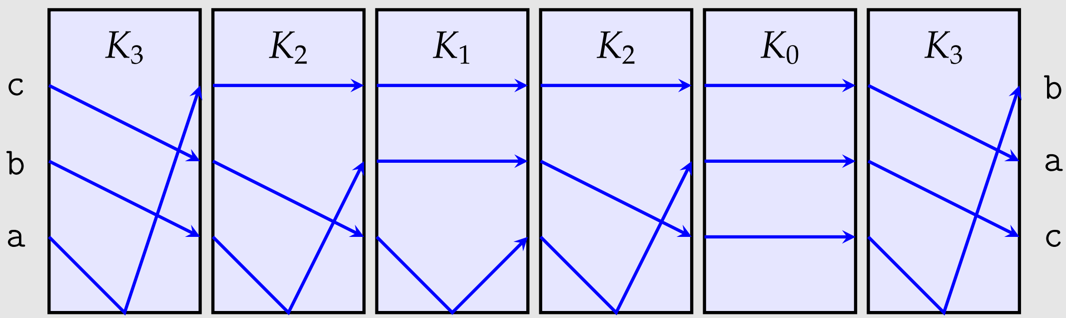
Betrakta t.ex. 741303, en siteswap av längd sex med tre bollar:



Med ”jongleringskort för tre bollar”



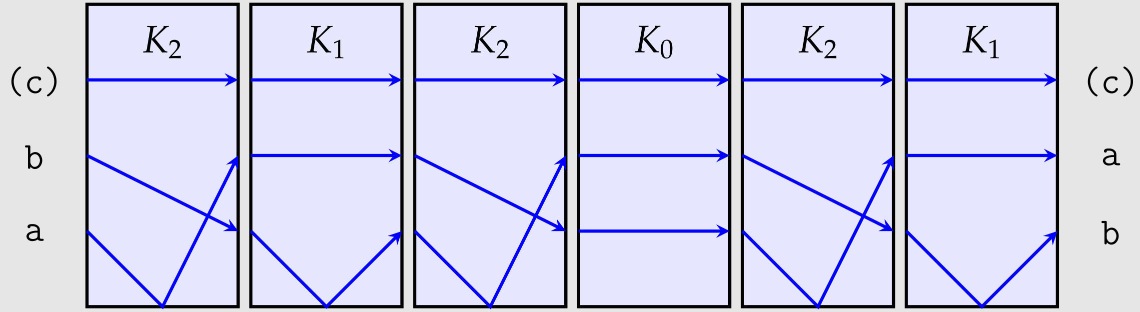
kan vi representera jongleringsmönstret som $K_3K_2K_1K_2K_0K_3$ istället:



Genom att räkna hur många tidssteg varje boll förblir i luften kan vi återskapa vår siteswap 741303, så detta är en helt ekvivalent representation.

Med de fyra korten $\{K_0, K_1, K_2, K_3\}$ ovan, som ju involverar tre bollar, kan vi t.ex. bilda $4^6 = 4096$ strängar av längd 6, alltså 4096 siteswaps av längd 6.

Men av dessa är det $3^6 = 729$ stycken som bara använder de tre korten $\{K_0, K_1, K_2\}$, och i dessa fall kommer minst en av bollarna att "sväva ovanför" de andra och aldrig landa, dvs. det är bara högst två bollar som egentligen jongleras:



- Alltså finns det

$$4^6 - 3^6 = 4096 - 729 = 3367$$

stycken siteswaps av längd 6 med exakt 3 bollar.

- Och på motsvarande sätt visas att det finns

$$(b+1)^n - b^n$$

stycken siteswaps av längd n med exakt b bollar.

- Men siffran 3367, eller $(b+1)^n - b^n$ allmänt, är **inte** vad jonglörer egentligen är intresserade av!
- Våra siteswaps av längd 6 inkluderar nämligen sådana som vi **redan känner till** ifall vi tidigare har räknat alla siteswaps av **kortare längd**, t.ex.

$$333333 = 3, \qquad 515151 = 51, \qquad 441441 = 441.$$

  Dessa är inte så spännande här, utan vad vi vill veta är hur många som har **minimal** period 6.

- Vi har också räknat **cykliska skift** som **olika** siteswaps:

$$\begin{aligned}&741303,\\ &\quad 413037,\\ &\qquad 130374, \ldots\end{aligned}$$

  Men de bör ju **betraktas som samma**, eller hur?

- Fixera antalet bollar b.
- Låt $F(n) = (b+1)^n - b^n$ vara antalet n-periodiska siteswaps med b bollar.
- Låt $G(n)$ vara antalet sådana med **minimal** period n.
- Då är $F(n) = \sum_{k \backslash n} G(k)$ (dvs. summa över n:s delare):

$$
\begin{aligned}
F(1) &= G(1) \\
F(2) &= G(2) + G(1) \\
F(3) &= G(3) + G(1) \\
F(4) &= G(4) + G(2) + G(1) \\
F(5) &= G(5) + G(1) \\
F(6) &= G(6) + G(3) + G(2) + G(1) \\
F(7) &= G(7) + G(1) \\
F(8) &= G(8) + G(4) + G(2) + G(1) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

- Vi känner $F(n)$ för alla n, och vill lösa ut $G(n)$ ur sambanden ovan.
- Vi beräknar enkelt (steg för steg):

$$\begin{cases} F(1) = G(1) \\ F(2) = G(2) + G(1) \\ F(3) = G(3) + G(1) \\ F(4) = G(4) + G(2) + G(1) \\ F(5) = G(5) + G(1) \\ F(6) = G(6) + G(3) + G(2) + G(1) \\ F(7) = G(7) + G(1) \\ F(8) = G(8) + G(4) + G(2) + G(1) \\ \qquad\vdots \end{cases} \iff \begin{cases} G(1) = F(1) \\ G(2) = F(2) - F(1) \\ G(3) = F(3) - F(1) \\ G(4) = F(4) - F(2) \\ G(5) = F(5) - F(1) \\ G(6) = F(6) - F(3) - F(2) + F(1) \\ G(7) = F(7) - F(1) \\ G(8) = F(8) - F(4) \\ \qquad\vdots \end{cases}$$

- Mer generellt ges svaret av **Möbius' inversionsformel**

$$F(n) = \sum_{k \backslash n} G(k) \quad \Longleftrightarrow \quad G(n) = \sum_{k \backslash n} \mu(\tfrac{n}{k}) F(k).$$

- **Möbiusfunktionen** μ definieras av

$$\mu(m) = \begin{cases} 0, & \text{om } m \text{ innehåller någon } \textbf{upprepad} \\ & \text{primfaktor} \\ +1, & \text{om } m \text{ är en produkt av ett } \textbf{jämnt} \\ & \text{ antal } \textbf{distinkta} \text{ primfaktorer} \\ -1, & \text{om } m \text{ är en produkt av ett } \textbf{udda} \\ & \text{ antal } \textbf{distinkta} \text{ primfaktorer} \end{cases}$$

- Specialfallet $\mu(1) = +1$ kan tas som en separat definition.
  Eller tänk att primfaktoriseringen av 1 är den **tomma produkten** med **noll** stycken faktorer (ett **jämnt** antal).

- Antalet vi söker, när cykliska skift identifieras, är

$$\frac{G(n)}{n}$$

eftersom alla de n cykliska skiften är olika ifall n är den **minimala** perioden.

- Med $b = 3$ bollar får vi därmed 554 **genuint olika siteswaps** som har längd 6 och inte är en upprepning av en kortare siteswap:

$$\begin{aligned}\frac{G(6)}{6} &= \frac{F(6) - F(3) - F(2) + F(1)}{6} \\ &= \frac{(4^6 - 3^6) - (4^3 - 3^3) - (4^2 - 3^2) + (4^1 - 3^1)}{6} \\ &= \frac{3367 - 37 - 7 + 1}{6} \\ &= 554\end{aligned}$$

Följden $G(n)/n$ börjar såhär (fortfarande med $b = 3$):

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{G(n)}{n}$	1	3	12	42	156	554	2028	7350

[oeis.org/A065179]

1 st. av längd 1:	3
3 st. av längd 2:	42, 51, 60
12 st. av längd 3:	423, 441, 450, 522, 531, 603, 612, 630, 711, 720, 801, 900
42 st. av längd 4:	4233, ...
156 st. av längd 5:	42333, ...
554 st. av längd 6:	423333, ...

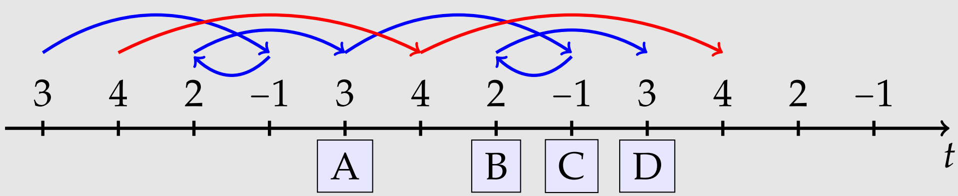
Tillbaka till framtiden

Lek nu med tanken att tillåta kast med **negativ höjd**!

Exempel: 4530 är en siteswap med tre bollar.

Genom att subtrahera 1 från varje kast fås en (generaliserad) siteswap med två bollar: 342(−1).

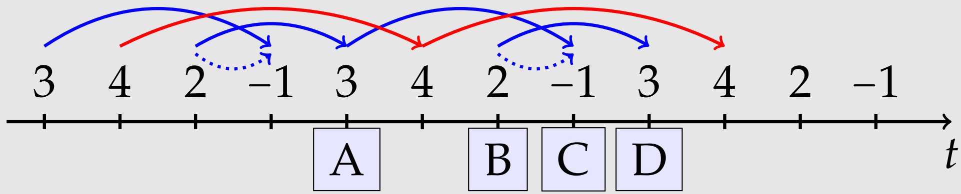
$\Big[$ Kontroll: $(3,4,2,-1)+(0,1,2,3)=(3,5,4,2)\equiv(3,1,0,2) \pmod 4$ OK! $\Big]$



Bollen som kastas vid A fångas vid C, kastas därifrån ett steg **bakåt** i tiden, fångas vid B, och kastas två tidsteg framåt till D.

Men här är ett **annat sätt att tolka** vad som händer:

- Boll som färdas bakåt i tiden
  $\iff$ **antiboll** som färdas framåt i tiden.
- Att kasta en boll k steg bakåt vid tidssteg t
  $\iff$ att kasta en antiboll k steg framåt från $t - k$.



1. Vid B har vi ingen inkommande boll att fånga, så en tom hand är ledig. Istället för att kasta en nolla (dvs. vänta) skapar vi ett boll-antiboll-par ur vakuum!

2. Bollen kastas två tidssteg framåt till D, vilket som vanligt anges av tvåan vid kasttidpunkten B.

3. Antibollen kastas samtidigt ett tidssteg framåt till C, vilket anges av minusettan *vid mottagningstidpunkten C*.

   (Påminner lite om COMEFROM-kommandot, motsatsen till GOTO!)

4. Vid C fångas antibollen samtidigt med den boll som kastades vid A, och de annihilerar varandra.

Kan realiseras! Typ…

- Multiplex jonglering.
- Bollar och antibollar motsvaras av bollar med olika färg.
- Kreation/annihilation implementeras genom att plocka upp eller lägga ner bollar.

[YouTube]