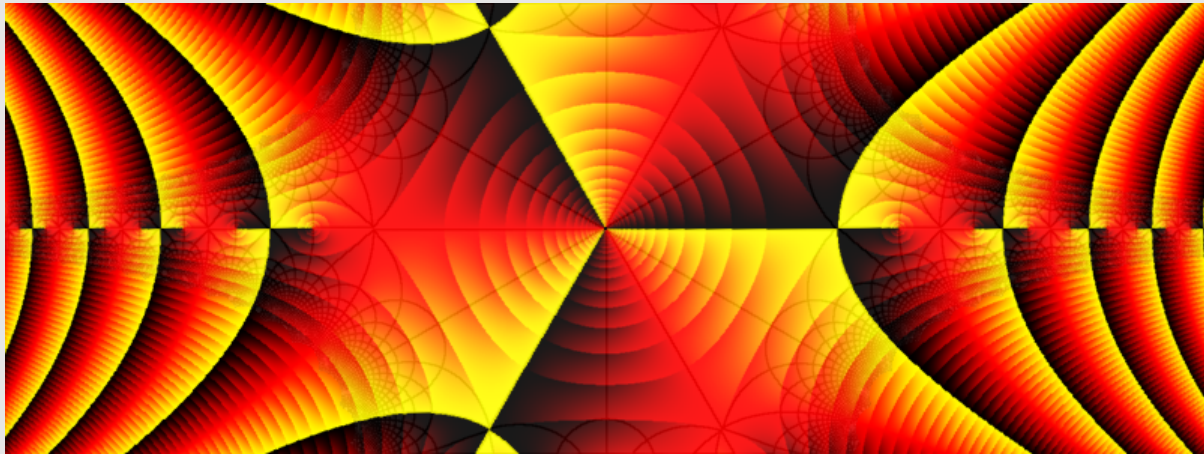


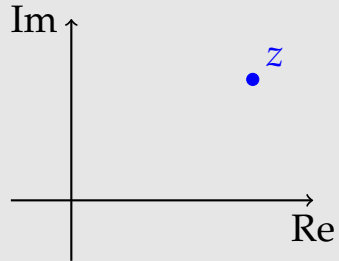
Visualisering av komplexvärda funktioner

Hans Lundmark, MAI

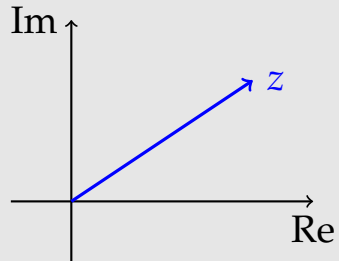


Uppvärmning: Komplexa tal

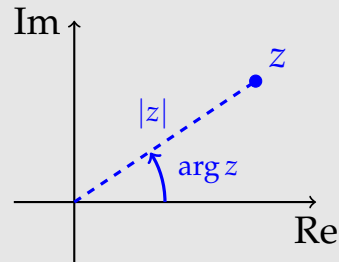
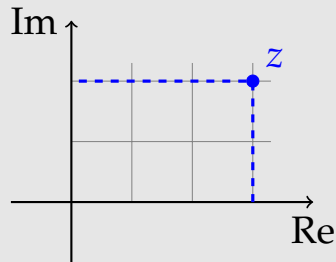
Vi kan betrakta komplexa tal som **punkter** i det komplexa talplanet:



Eller som **vektorer**:



Talets läge kan anges antingen med **real- och imaginärdel** (kartesiska koordinater) eller med **belopp och argument** (polära koordinater):

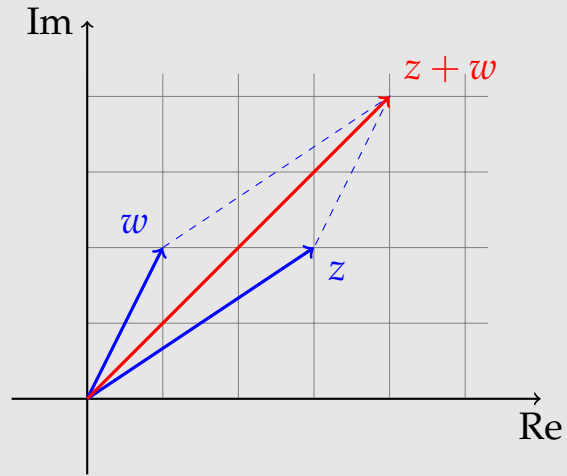


$$\text{T.ex. } z = 3 + 2i \iff \begin{cases} \operatorname{Re} z = 3 \\ \operatorname{Im} z = 2 \end{cases} \quad (\text{inte "Im } z = 2i\text{!"})$$

$$\iff \begin{cases} |z| = \sqrt{13} \\ \arg z = \arctan \frac{2}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

(Observera att argumentet inte är entydigt bestämt. Vad skrivsättet "arg z" egentligen betyder kan bero på sammanhanget – ibland används det för att beteckna ett specifikt argument, ibland står det för *mängden* av alla tänkbara argument.)

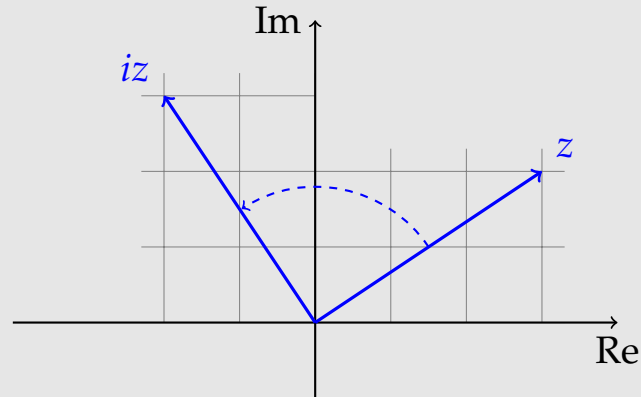
Addition av komplexa tal är bara vanlig vektoraddition:



$$\begin{aligned}z + w &= (3 + 2i) + (1 + 2i) \\ &= (3 + 1) + (2i + 2i) \\ &= 4 + 4i\end{aligned}$$

Multiplikation av komplexa tal är intressantare!

Först ser man att vektorn för iz fås genom att vektorn för z vrids 90 grader moturs:



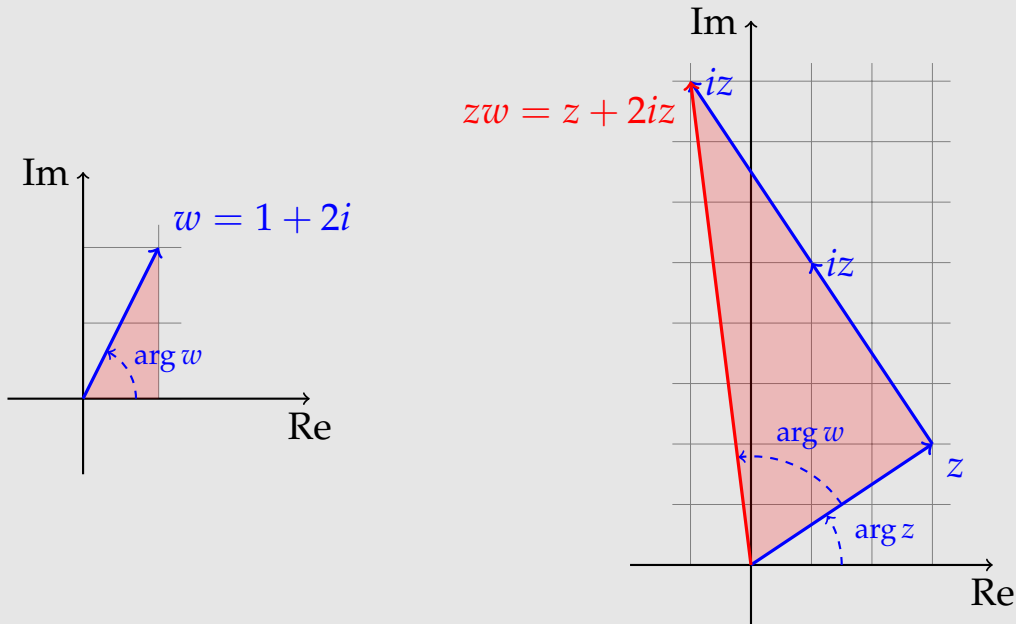
$$z = 3 + 2i \quad (\text{"3 rutor höger, 2 rutor uppåt"})$$

$$\implies iz = i(3 + 2i)$$

$$= -2 + 3i \quad (\text{"3 rutor uppåt, 2 rutor vänster"})$$

Med hjälp av detta ser man sedan att vektorn för zw har beloppet $|z| |w|$ och argumentet $\arg z + \arg w$:

$$\text{T.ex. } w = 1 + 2i \implies zw = z \cdot (1 + 2i) = 1 \cdot z + 2 \cdot iz$$



(Den högra röda triangeln är rätvinklig eftersom iz fås genom att z vrids 90 grader. Alltså är den likformig med den vänstra röda triangeln. Skalan är $1 : |z|$. Hypotenusan i den vänstra triangeln är $|w|$. Alltså är hypotenusan i den högra triangeln $|z| |w|$.)

Specialfall:

- Talet $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$ har beloppet 1 och argumentet α .
- Talet $w = \cos \beta + i \sin \beta$ har beloppet 1 och argumentet β .

Enligt ovanstående geometriska resonemang får då talet zw beloppet $1 \cdot 1$ och argumentet $\alpha + \beta$:

$$zw = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$$

Men å andra sidan gäller ju även följande:

$$\begin{aligned} zw &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + i (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \end{aligned}$$

Därmed har vi bevisat additionsformlerna för cosinus och sinus!

Reella funktioner

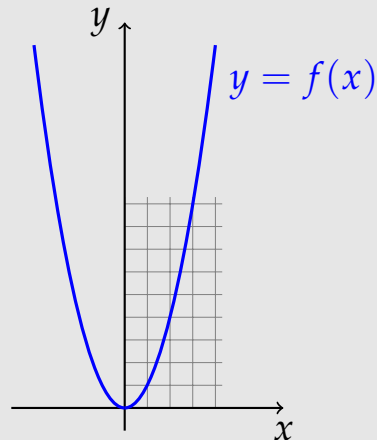
Vanliga funktioner $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ är välbekanta.

Exempel: $f(x) = x^2$.

Värdetabell:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x) = x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16

Graf:



Komplexa funktioner

Här ska vi ägna oss åt funktioner av typen $f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$.

Exempel: $f(z) = z^2$.

Det är enkelt att beräkna så många värden man vill:

z		0	1	2	3	4	i	$2i$	$1+i$	$3+4i$	\dots
$f(z) = z^2$		0	1	4	9	16	-1	-4	$2i$	$-7+24i$	\dots

Men hur visualiserar man detta?

Att rita grafen $w = f(z)$ skulle kräva ett fyrdimensionellt koordinat-system (x, y, u, v) , där $z = x + iy$ och $w = u + iv$.



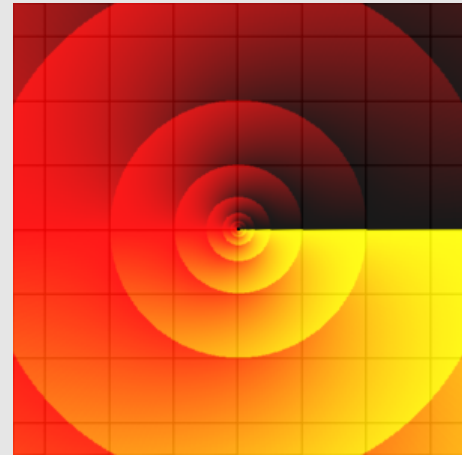
Ett smartare sätt att ställa upp värdetabellen är att skriva in värdet av $f(z) = z^2$ på z :s plats i det komplexa talplanet:

$-18i$	$-5 - 12i$	$-8 - 6i$	-9	$-8 + 6i$	$-5 + 12i$	$18i$
$5 - 12i$	$-8i$	$-3 - 4i$	-4	$-3 + 4i$	$8i$	$5 + 12i$
$8 - 6i$	$3 - 4i$	$-2i$	-1	$2i$	$3 + 4i$	$8 + 6i$
9	4	1	0	1	4	9
$8 + 6i$	$3 + 4i$	$2i$	-1	$-2i$	$3 - 4i$	$8 - 6i$
$5 + 12i$	$8i$	$-3 + 4i$	-4	$-3 - 4i$	$-8i$	$5 - 12i$
$18i$	$-5 + 12i$	$-8 + 6i$	-9	$-8 - 6i$	$-5 - 12i$	$-18i$

Idén är nu att till varje komplext tal associera en färg, och färglägga värdetabellen därefter. (Då färglägger man förstås inte bara heltalspunkterna, utan i princip varje punkt, så att man täcker planet med färg.)

$-3 + 3i$	$-2 + 3i$	$-1 + 3i$	$3i$	$1 + 3i$	$2 + 3i$	$3 + 3i$
$-3 + 2i$	$-2 + 2i$	$-1 + 2i$	$2i$	$1 + 2i$	$2 + 2i$	$3 + 2i$
$-3 + i$	$-2 + i$	$-1 + i$	i	$1 + i$	$2 + i$	$3 + i$
-3	-2	-1	0	1	2	3
$-3 - i$	$-2 - i$	$-1 - i$	$-i$	$1 - i$	$2 - i$	$3 - i$
$-3 - 2i$	$-2 - 2i$	$-1 - 2i$	$-2i$	$1 - 2i$	$2 - 2i$	$3 - 2i$
$-3 - 3i$	$-2 - 3i$	$-1 - 3i$	$-3i$	$1 - 3i$	$2 - 3i$	$3 - 3i$

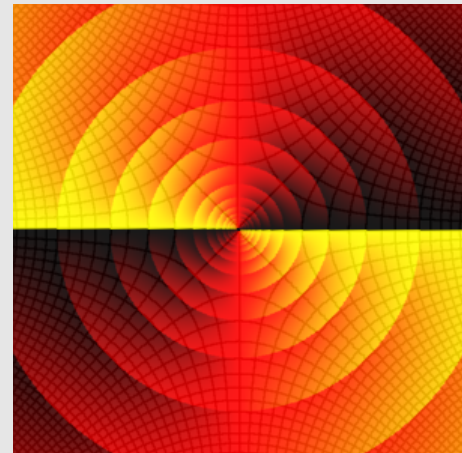
\leftrightarrow

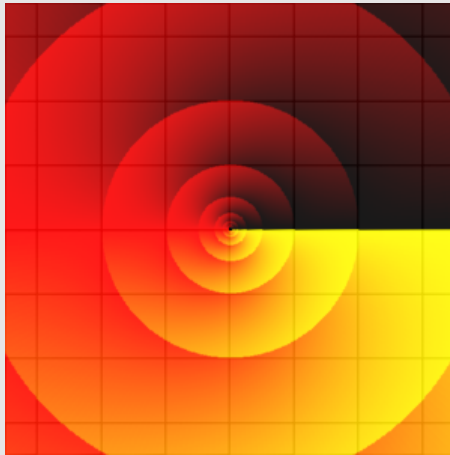


Om man t.ex. väljer färger enligt ovan, fås följande bild av $f(z) = z^2$:

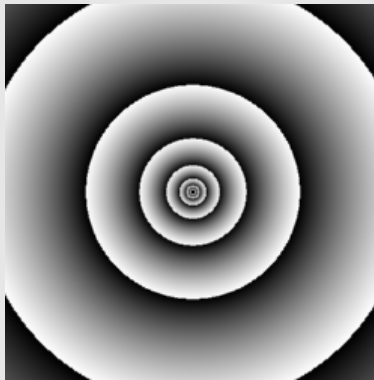
$-18i$	$-5 - 12i$	$-8 - 6i$	-9	$-8 + 6i$	$-5 + 12i$	$18i$
$5 - 12i$	$-8i$	$-3 - 4i$	-4	$-3 + 4i$	$8i$	$5 + 12i$
$8 - 6i$	$3 - 4i$	$-2i$	-1	$2i$	$3 + 4i$	$8 + 6i$
9	4	1	0	1	4	9
$8 + 6i$	$3 + 4i$	$2i$	-1	$-2i$	$3 - 4i$	$8 - 6i$
$5 + 12i$	$8i$	$-3 + 4i$	-4	$-3 - 4i$	$-8i$	$5 - 12i$
$18i$	$-5 + 12i$	$-8 + 6i$	-9	$-8 - 6i$	$-5 - 12i$	$-18i$

\leftrightarrow

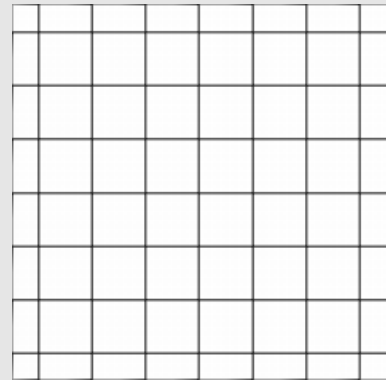




Färg = argument (dvs. vinkel)

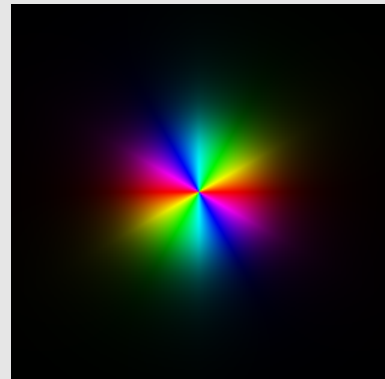
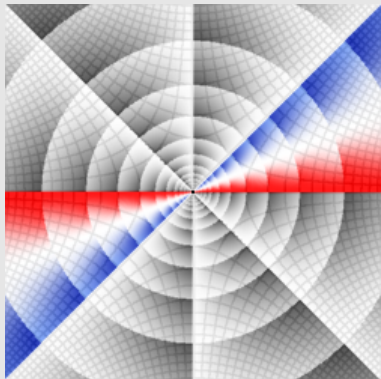
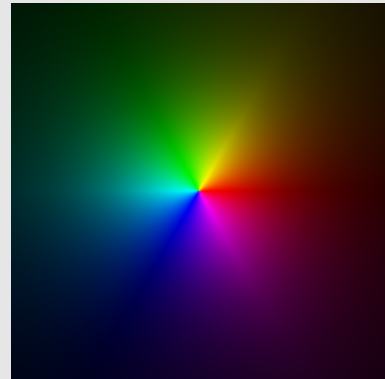
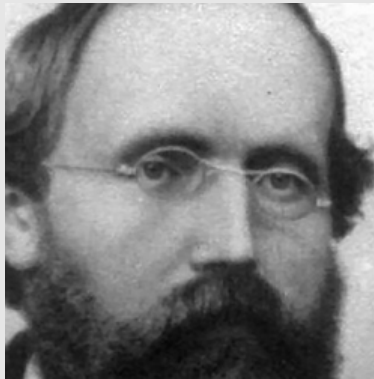
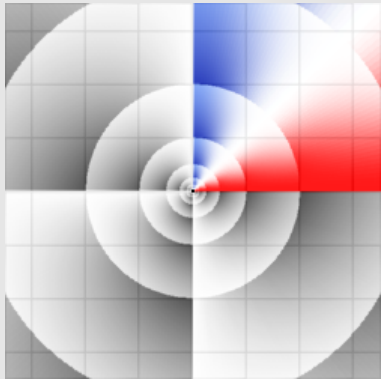


Skuggning = absolutbelopp
(fördubblas för varje ring)



Rutnät (Re/Im = heltal)

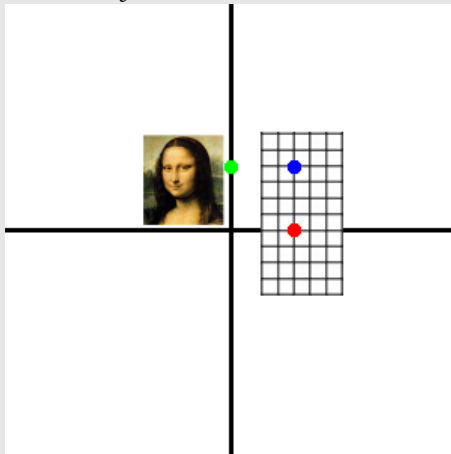
Samma funktion $f(z) = z^2$, men andra sätt att färglägga:



Visualiseringsmetoden ovan kallas på engelska **domain coloring**, dvs. **färgläggning av definitionsmängden** (eftersom vi färglägger varje punkt i z -planet där $f(z)$ är definierad).

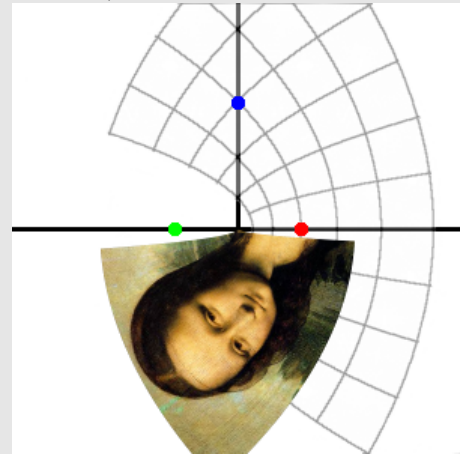
Den traditionella metoden är annars att låta $w = f(z)$ avbilda punkter i z -planet på punkter i w -planet. Ett rutnät i z -planet avbildas då på ett deformerat rutnät i w -planet, och analogt för andra mängder. Dock kan man få problem med överlappning ifall f inte är injektiv, som i vårt exempel $f(z) = z^2$ där ju z och $-z$ alltid avbildas på samma punkt:

$$z = x + iy$$



$$\xrightarrow{w=z^2}$$

$$w = u + iv$$



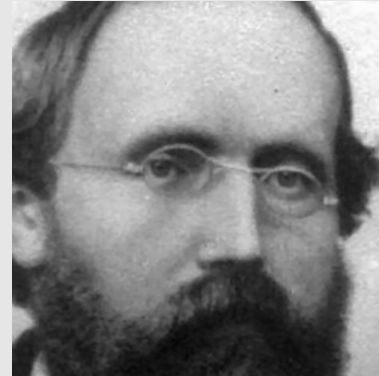
Färgläggningssmetoden fungerar "baklänges" jämfört med detta; den deformerade figur som illustrerar f bör betraktas som ritad i z -planet. Den avbildas då av f på den odeformerade referensfiguren i w -planet:

$$z = x + iy$$



$$\xrightarrow{w=z^2}$$

$$w = u + iv$$



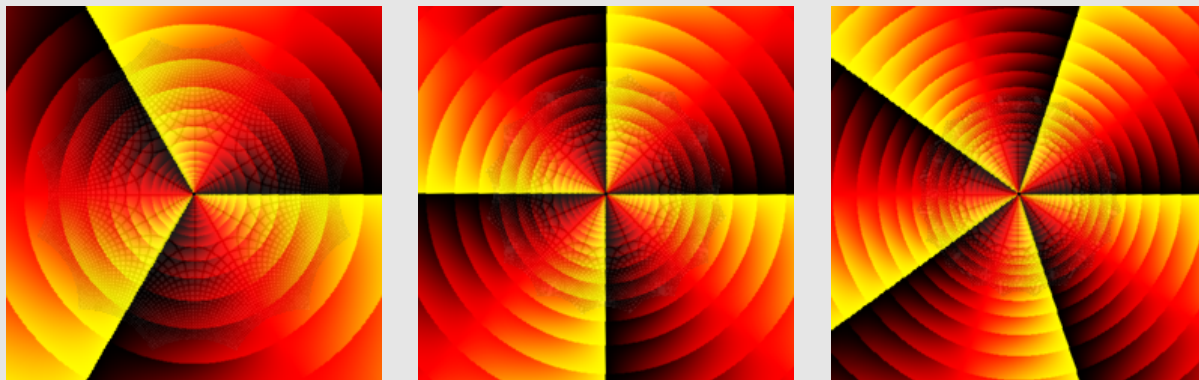
På så vis undviker man överlappning i w -planet. Att funktionen inte är injektiv syns istället på att vi har flera Bernhard Riemann i z -planet.

Här i fallet $f(z) = z^2$ återfinns varje detalj från fotot på två ställen i z -planet, förutom att den punkt nära Riemanns högra öga som motsvarar $w = 0$ bara förekommer på ett ställe (nämligen vid $z = 0$).

Polynom

Det börjar bli dags att börja undersöka andra funktioner än bara z^2 !

Monomen z^3 , z^4 och z^5 ser ut såhär, ritade (liksom z^2 ovan) på en kvadrat med hörn i $z = \pm 3.5 \pm 3.5i$:

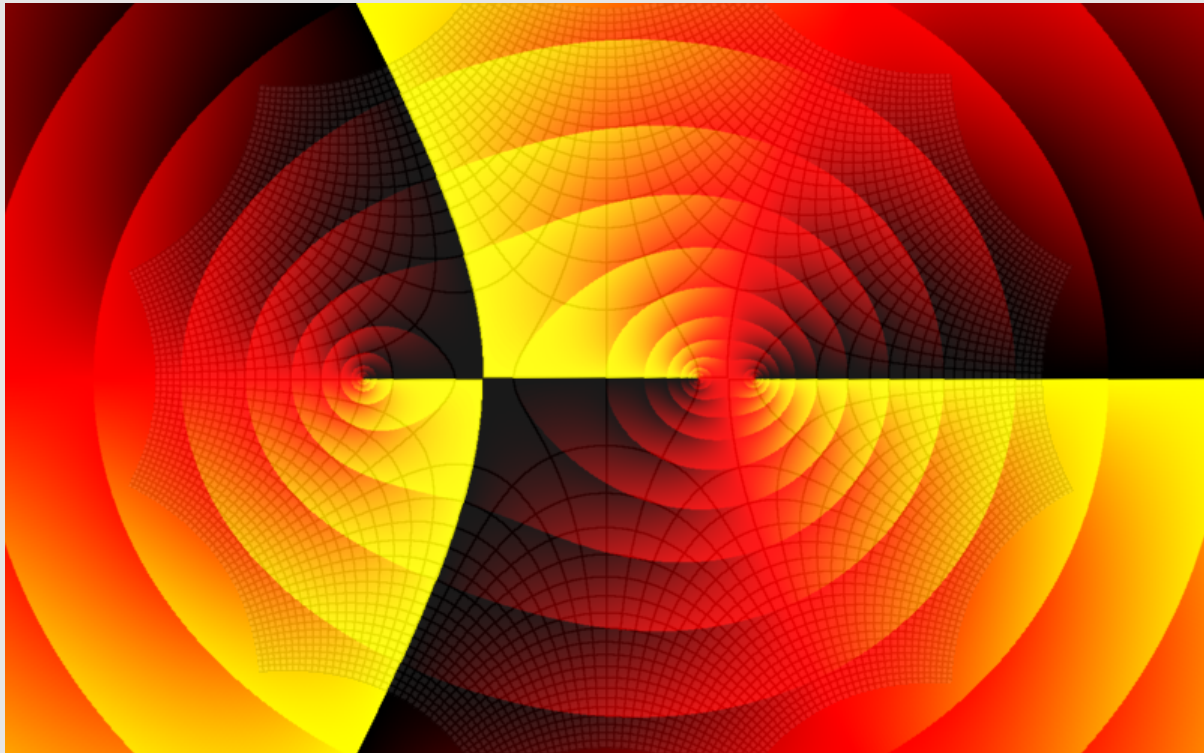


Rutnäten sträcker sig i princip över hela planet, men när man kommer en bit ut blir de så finmaskiga att det är meningslöst att försöka rita dem. I de här bilderna är de trunkerade vid ± 20 i real- och imaginärled.

Notera att nollställets ordning (trippel-, kvadrupel- resp. kvintupelrot i origo) enkelt avläses ur antalet "ekrar".

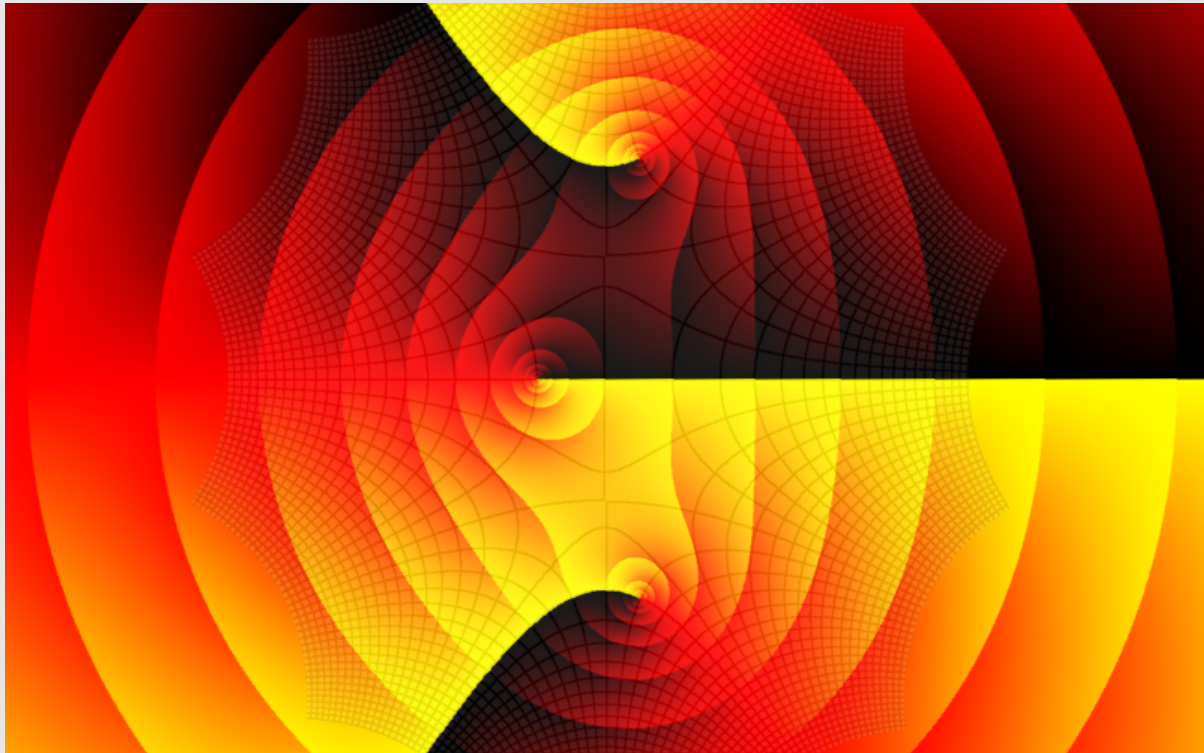
Ett tredjegradspolynom: $f(z) = z^3 - 2z + 1$

(Hörn i $z = \pm 4 \pm 2.5i$)



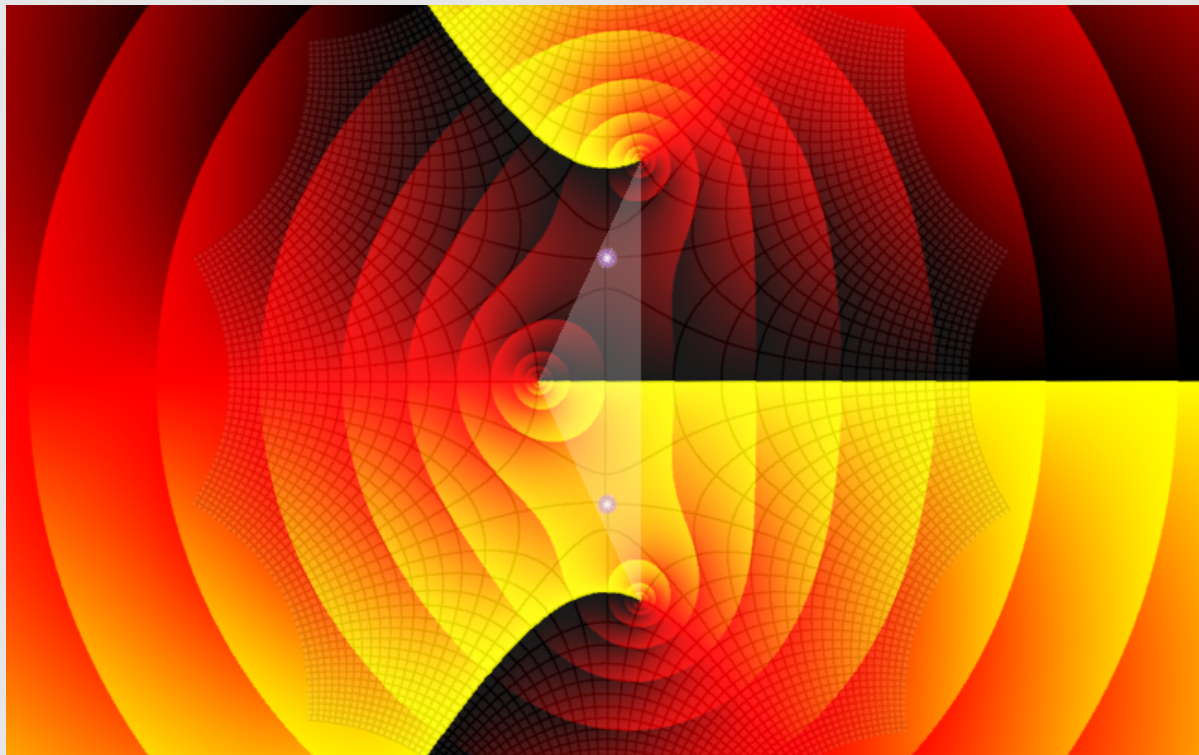
Tre reella nollställen. Tänk efter hur grafen $y = x^3 - 2x + 1$ ser ut, och jämför!

Med ombytt tecken på z -koefficienten: $f(z) = z^3 + 2z + 1$



Strängt växande på reella axeln, därmed bara ett reellt nollställe. De övriga två nollställena utgör ett komplexkonjugerat par.

Avbildningen är **konform** (vinkelbevarande) utom där $f'(z) = 0$.



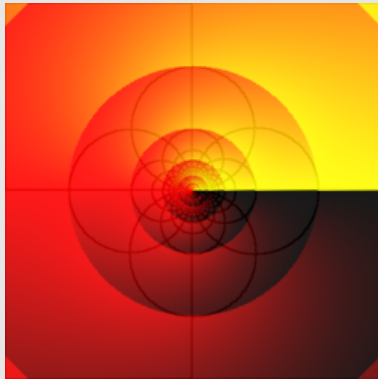
Lucas' sats: Om f är ett polynom, så ligger f' 's nollställen i konvexa höljet av f 's nollställen.

Rationella funktioner

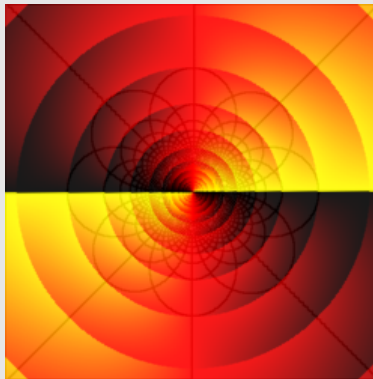
Nollställena i nämnaren kallas **poler**.

Så här ser enkel-, dubbel- resp. trippelpol ut:

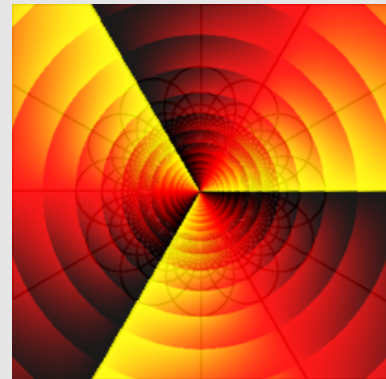
$$f(z) = 1/z$$



$$f(z) = 1/z^2$$



$$f(z) = 1/z^3$$

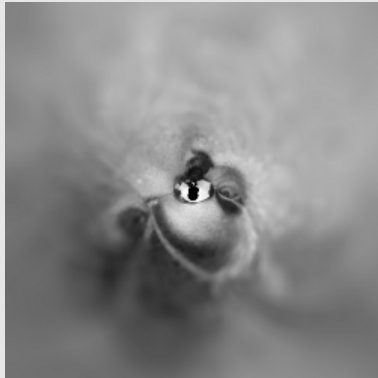


(Hörn i $\pm 1.5 \pm 1.5i$)

Den färgläggning som används här gör att nollställena och poler blir ganska lika varandra (bortsett från rutnätet). Observera dock att färgerna går runt åt motsatt håll.

Med ett annat val av färgläggning behöver inte poler och nollställen likna varandra alls, vilket Riemann illustrerar nedan:

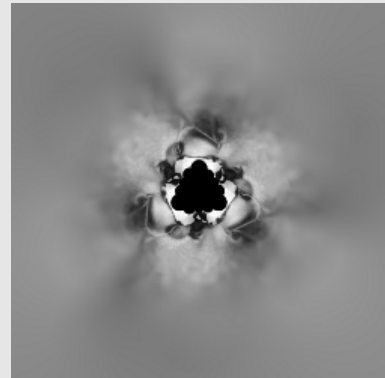
$$f(z) = 1/z$$



$$f(z) = 1/z^2$$



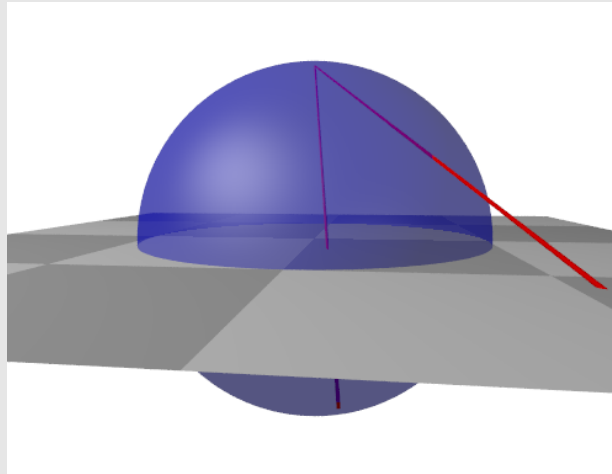
$$f(z) = 1/z^3$$



Det finns dock en symmetri mellan 0 och ∞ som gör det naturligt att betrakta poler och nollställen som likartade fenomen (och man vill då att den släktskapen ska synas i bilden).

Se nästa sida!

I komplex analys använder man en abstrakt oändlighetspunkt $z = \infty$, som motsvarar nordpolen vid **stereografisk projektion** av det komplexa talplanet på **Riemannsfären**:

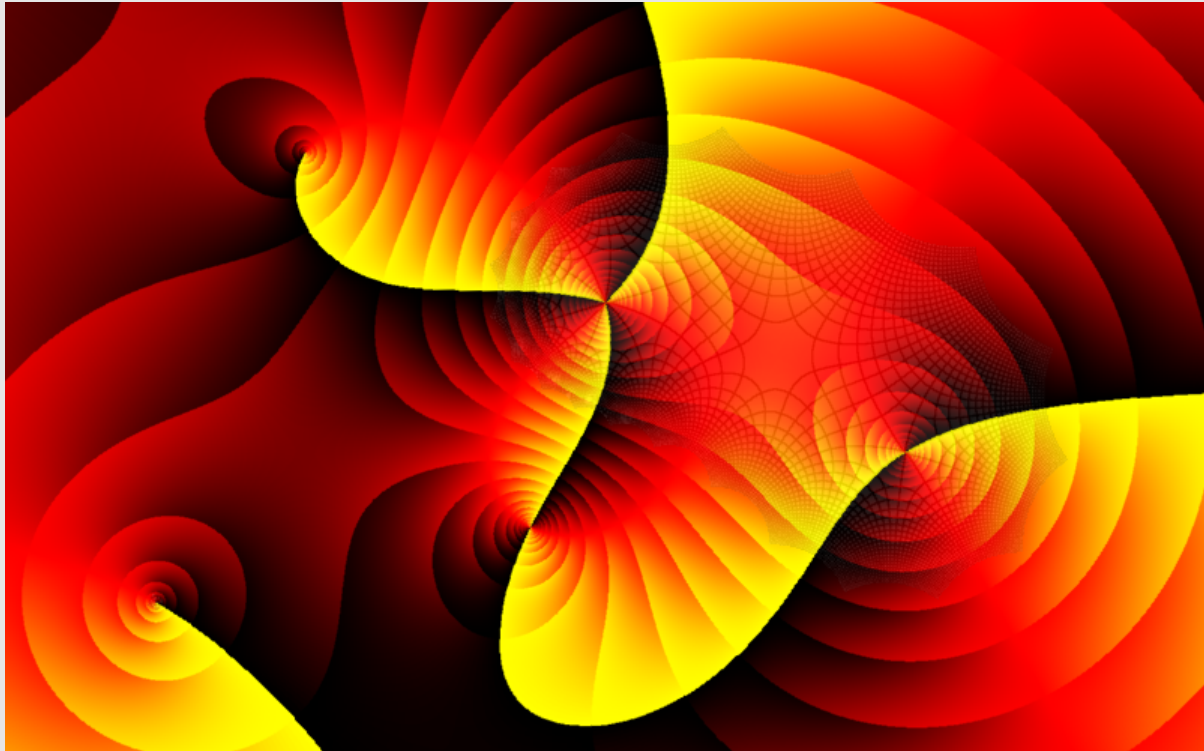


Sydpolen motsvarar $z = 0$. Ekvatorn motsvarar enhetscirkeln.

Avbildningen $z \mapsto 1/z$ motsvarar att rotera Riemannsfären ett halvt varv kring reella axeln i z -planet. Nordpolen och sydpolen byter då plats, så det är naturligt att låta $1/\infty = 0$ och $1/0 = \infty$ i detta sammanhang.

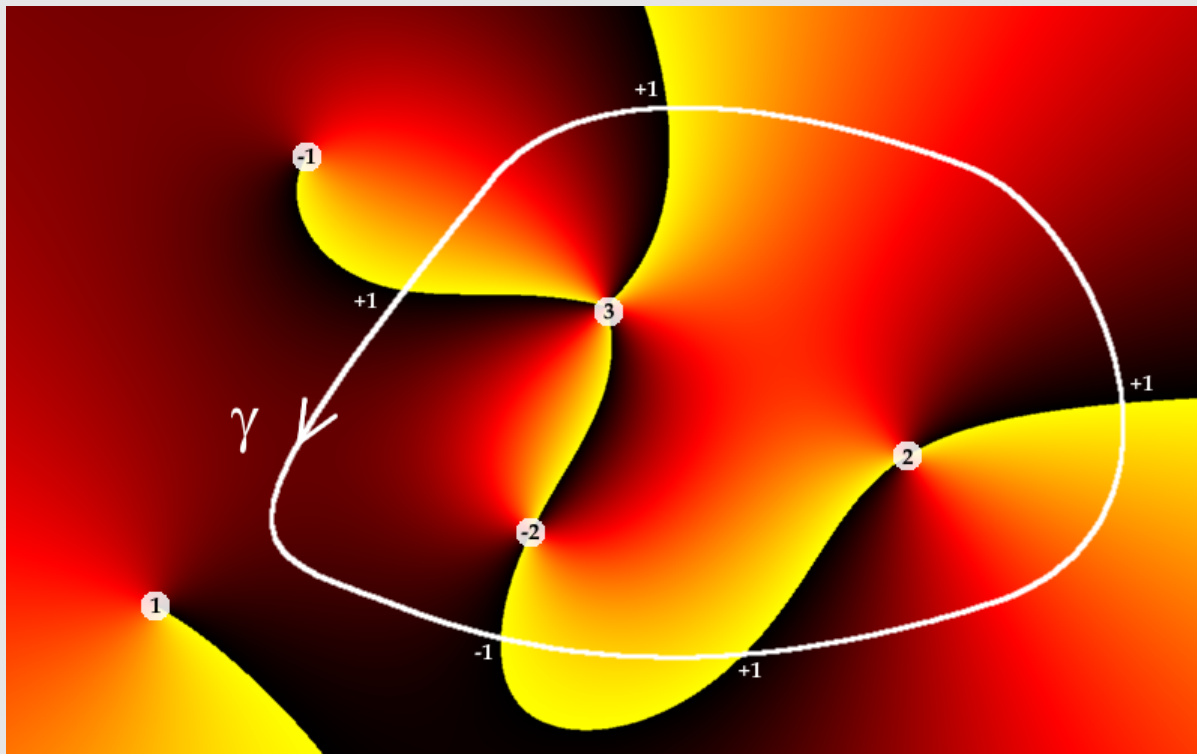
$$f(z) = \frac{(z + 6 + 3i)(z - 4 + i)^2(z - i)^3}{(z + 4 - 3i)(z + 1 + 2i)^2}$$

(Hörn i $\pm 8 \pm 5i$)



Enkel-, dubbel-, och trippelnollställe. Enkel- och dubbelpol.

Argumentprincipen: $\frac{[\arg f(z)]_\gamma}{2\pi} = N(\gamma) - P(\gamma)$



Färgerna ($\leftrightarrow \arg f(z)$) gör 3 cykler då z genomlöper kurvan γ .
 Antal nollställen och poler innanför γ är $N(\gamma) = 5$ resp. $P(\gamma) = 2$.

Analytiska funktioner

En funktion som ges av en konvergent potensserie sägs vara **analytisk**, och i en sådan funktion kan man utan vidare ge variabeln komplexa värden.

Om z är **reellt** vet man t.ex. från reell analys att följande Maclaurin-utvecklingar gäller:

$$\begin{aligned} e^z &= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots && \left(\text{dvs. } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \right) \\ \sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots && \left(= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right) \\ \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots && \left(= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right) \end{aligned}$$

Vi tar nu dessa formler som **definitioner** av vad e^z , $\sin z$ och $\cos z$ ska betyda när z är **komplext**.

(Man kan visa ganska enkelt att dessa tre serier konvergerar för varje $z \in \mathbf{C}$.)

Den komplexa exponentialfunktionen

Med potensserieräkning utgående från definitionen

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

kan man visa att den välbekanta räknelagen

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$$

gäller för alla komplexa z_1 och z_2 . Speciellt (om $x, y \in \mathbf{R}$):

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y),$$

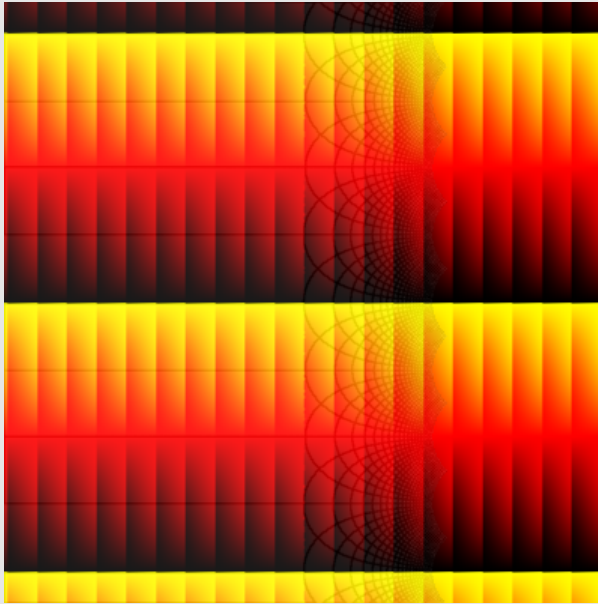
så e^{x+iy} är det komplexa tal som har beloppet e^x och argumentet y .

Detta medför att exponentialfunktionen är **periodisk**, med perioden $2\pi i$.

Notera även att den **saknar nollställen**. (Faktorn e^x är ju aldrig noll, och den andra faktorn $\cos y + i \sin y$ kan inte heller bli noll, eftersom $\cos y$ och $\sin y$ inte kan vara noll samtidigt.)

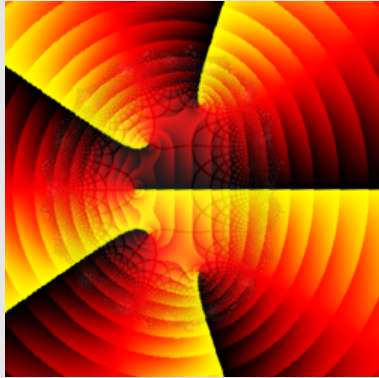
$$f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

(Hörn i $\pm 7 \pm 7i$)

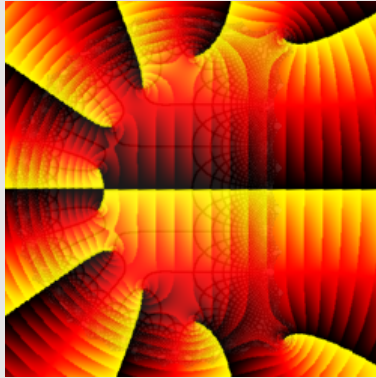


En liten gåta: Maclaurinpolynomen $p_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$ konvergerar mot e^z då $n \rightarrow \infty$, och därför borde $e^z \approx p_n(z)$ om n är stort. Men p_n har många nollställen (n stycken), och e^z har inga. Hur går det ihop?

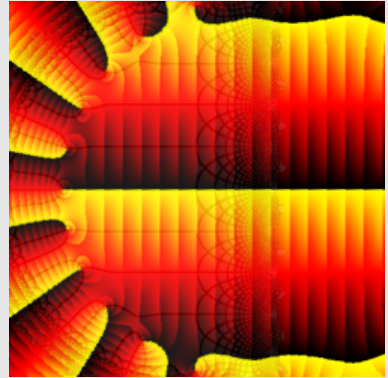
$p_5(z)$



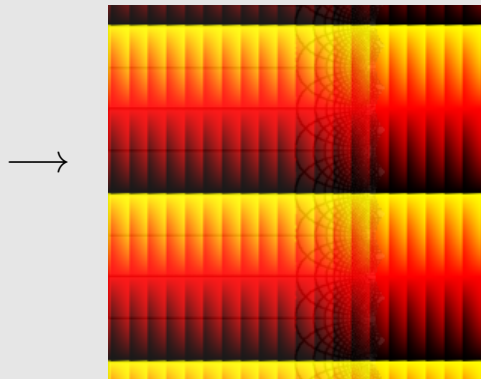
$p_{10}(z)$



$p_{15}(z)$ (Hörn i $\pm 7 \pm 7i$)



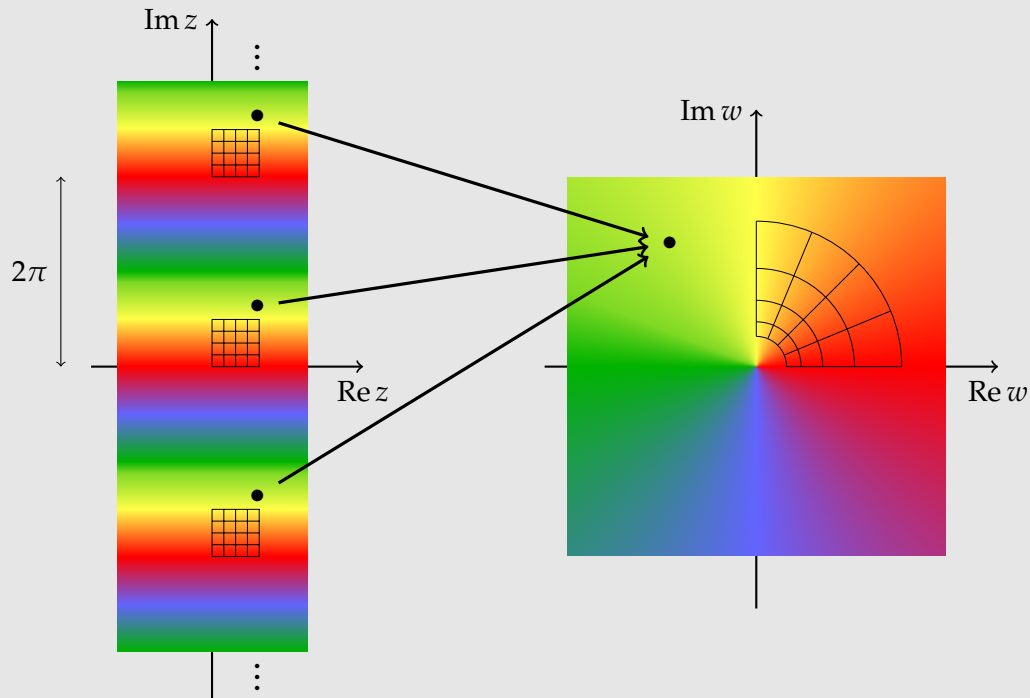
$$f(z) = e^z$$



då $n \rightarrow \infty$

Logaritmer

Den $2\pi i$ -periodiska avbildningen $w = e^z$ ger samma värde på w för oändligt många värden på z :



När man ska definiera **logaritmen** av ett (nollskilt) komplext tal, alltså den omvända avbildningen

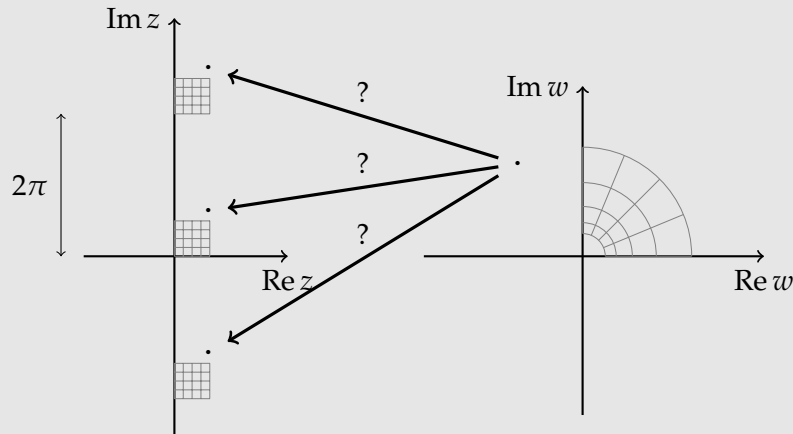
$$z = \log w,$$

har man därmed **oändligt många värden** att välja mellan:

$$w = e^z = e^x e^{iy} \iff \begin{cases} x = \ln |w| & \text{(vanlig reell logaritm)} \\ y = \text{arg } w & \text{(ej entydigt bestämt!)} \end{cases}$$

$$\iff z = \log w = \ln |w| + i \text{arg } w$$

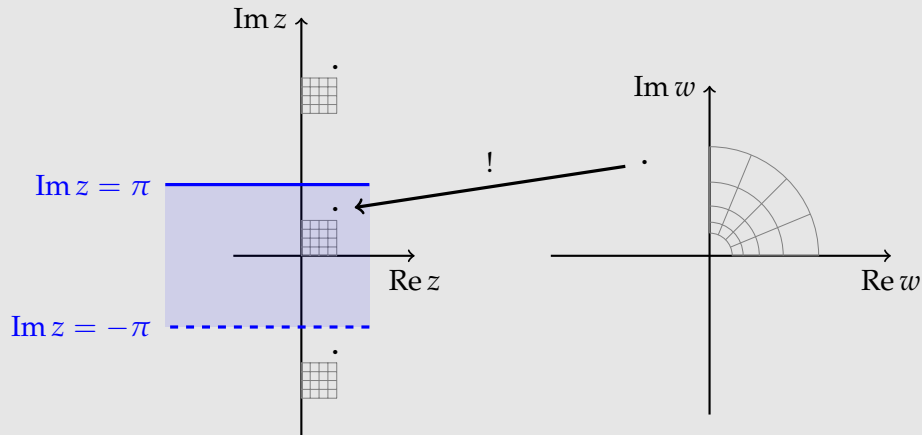
Vilken av alla tänkbara logaritmer ska man ta?



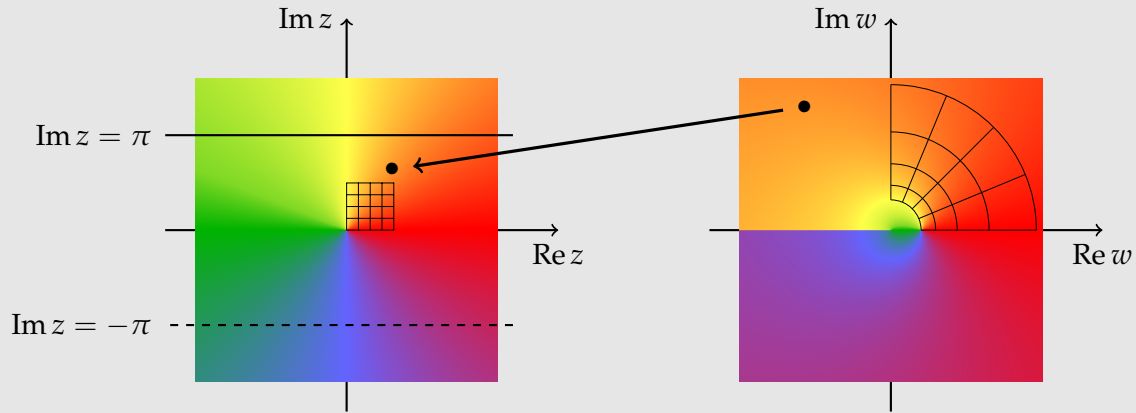
Ifall man använder "arg w " för att beteckna mängden av alla w :s tänkbara argument, så är det naturligt att låta " $\log w$ " beteckna mängden av alla w :s tänkbara logaritmer.

Men om man vill att $z = \log w$ ska vara en vanlig funktion, som bara ger *ett* värde z för varje $w \neq 0$, så måste man välja en logaritm i varje punkt (dvs. välja ett visst argument $\arg w$ för varje $w \neq 0$). Ett sådant val definierar en viss **gren** av den komplexa logaritmfunktionen.

T.ex. får man **principalgrenen** av logaritmfunktionen, som betecknas $z = \text{Log } w$, om man tar det argument som ligger i intervallet $]-\pi, \pi]$:



Tilldelning av en färg till varje z (vänstra bilden) ger i w -planet (högra bilden) en illustration av principallogaritmen $z = \text{Log } w$:



Observera att det blir en **diskontinuerlig** funktion; dess värde hoppar när w passerar negativa reella axeln. (Det går inte att konstruera någon gren av logaritmfunktionen som är kontinuerlig i hela $\mathbf{C} \setminus \{0\}$.)

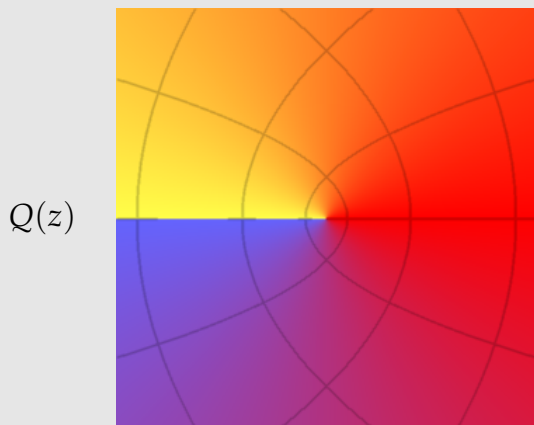
(Det är för att se diskontinuiteter tydligare som vi tillfälligt har bytt till en färläggning där färgen varierar mjukt från punkt till punkt; de färgsprång man ser i bilden betyder då att det är själva funktionsvärdena som förändras abrupt.)

Kvadratrötter

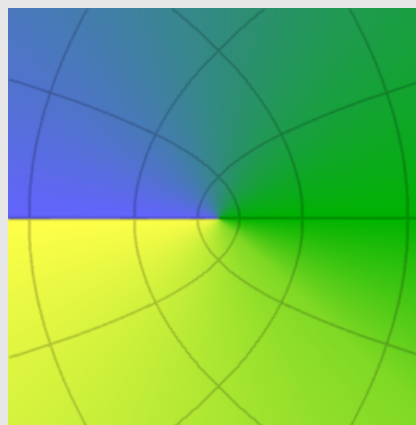
Liknande problem med val och diskontinuiteter uppstår även med t.ex. **kvadratrötter**.

Talet noll har bara en kvadratrots, nämligen noll. Alla andra komplexa tal z har **två** tänkbara kvadratrötter, eftersom ekvationen $q^2 = z$ har två olika lösningar ifall $z \neq 0$:

- Exakt en av lösningarna, kalla den $q = Q(z)$, ligger i högra halvplanet eller på positiva imaginära axeln. Detta tal är z 's **principalkvadratrot**. (Låt $Q(0) = 0$.)
- Den andra lösningen är då $q = -Q(z)$; den ligger i vänstra halvplanet eller på negativa imaginära axeln.



$Q(z)$



$-Q(z)$

(Hörn i $\pm 10 \pm 10i$)

Vad betyder skrivsättet $f(z) = \sqrt{g(z)}$ egentligen?

- Ibland avses en "flervärd funktion" där

$$f(z) = \{Q(g(z)), -Q(g(z))\}$$

är **mängden** av möjliga kvadratrötter till talet $g(z)$.

- Men oftare menar man en **gren** av denna funktion som fås genom att för varje z välja antingen $f(z) = Q(g(z))$ eller $f(z) = -Q(g(z))$ (enligt någon regel), för att funktionen f ska få önskade kontinuitets-egenskaper.
- (Kan också betyda en funktion definierad på lämplig **Riemannyta**.)

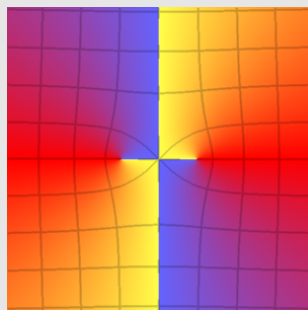
Att använda symbolen $\sqrt{\quad}$ i samband med komplexa tal är alltså lite vanskligt. Om man gör det måste man varje gång vara noga med att tala om exakt vad man menar i sammanhanget!

(Det är inte så enkelt som att $\sqrt{\quad}$ alltid betyder principalkvadratrotten.)

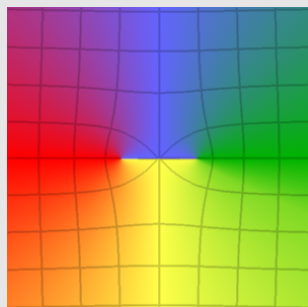
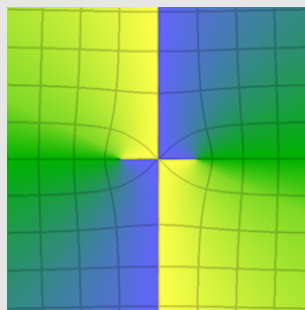
Exempel: Några olika grenar av $\sqrt{z^2 - 1}$.

(Hörn i $\pm 4 \pm 4i$)

$Q(z^2 - 1)$



$-Q(z^2 - 1)$



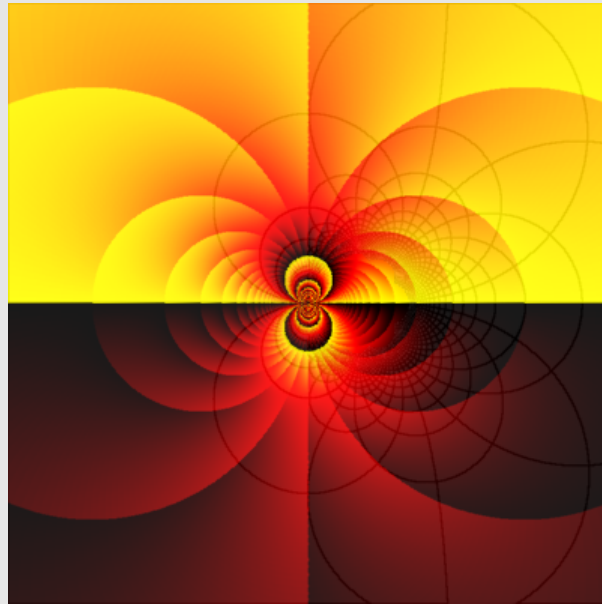
$$\begin{cases} Q(z^2 - 1), & \text{om } \operatorname{Re} z < 0 \\ -Q(z^2 - 1), & \text{om } \operatorname{Re} z \geq 0 \end{cases}$$

$$\left(= -Q(z - 1)Q(z + 1) \text{ utom i }]-1, 0[\subset \mathbf{R} \right)$$

Resten av tiden: blandade exempel.

(Med det tidigare färgschemat igen.)

Funktionen $f(z) = e^{1/z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!z^k}$ har en **väsentlig singularitet** i origo, dvs. till skillnad från när man har en pol i origo så är inte funktionen $z^n f(z)$ analytisk för något n .

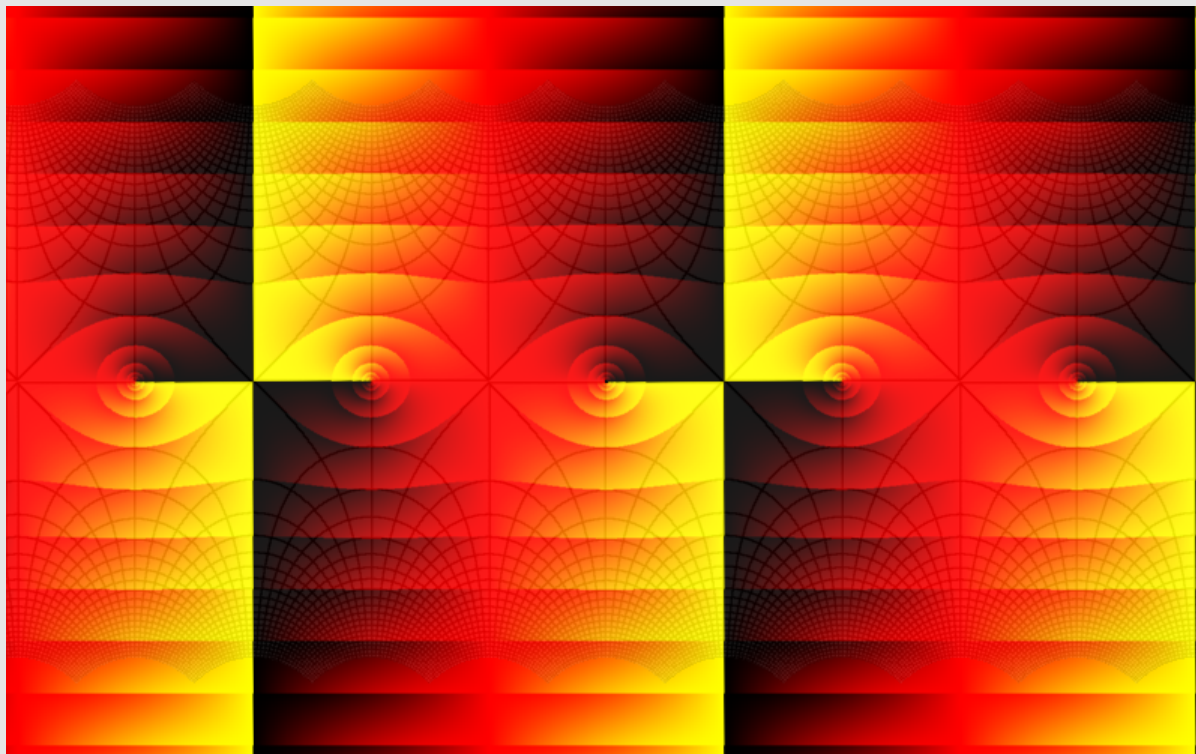


(Hörn i $\pm 1 \pm i$)

Picards stora sats: I varje omgivning till en väsentlig singularitet antar f alla komplexa värden (utom möjligen ett värde).

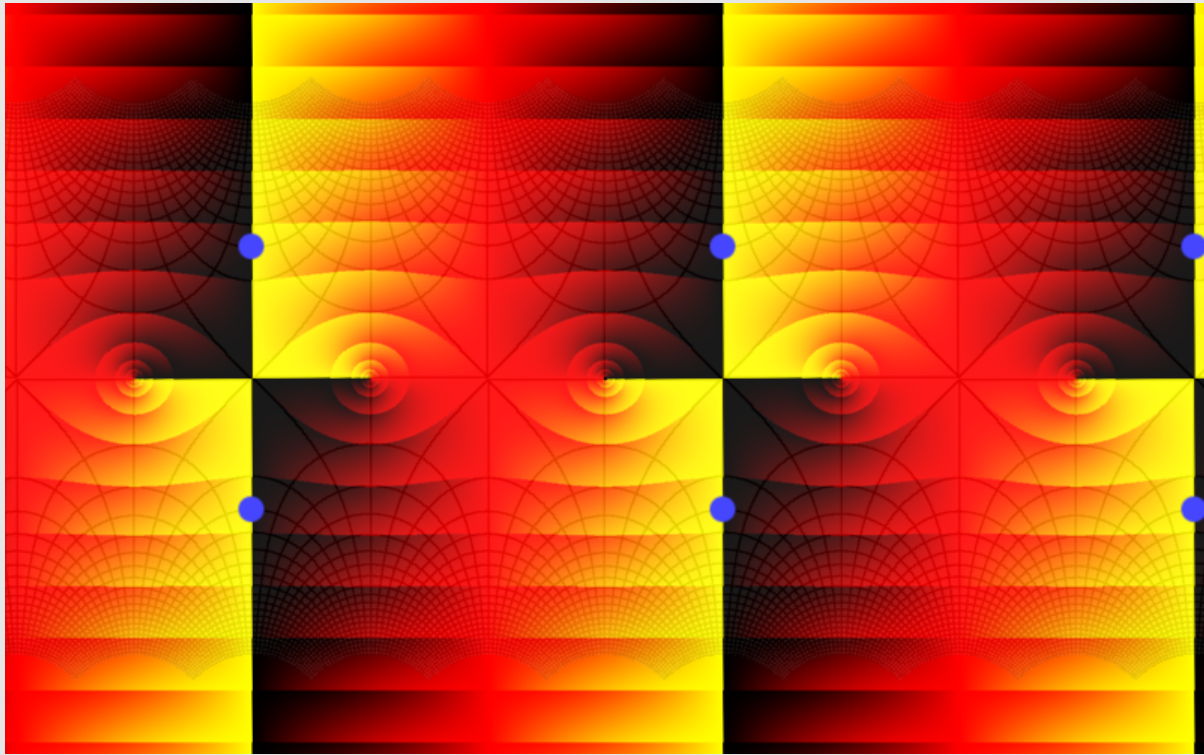
Så här ser $f(z) = \sin z$ ut:

(Hörn i $\pm 8 \pm 5i$)



Periodisk, med period 2π . Inte begränsad att bara anta värden mellan -1 och $+1$ längre! **Övning:** Lös ekvationen $\sin z = 3$ (grafiskt).

Facit:



$$\sin z = 3 \quad \xleftrightarrow{t=e^{iz}} \quad \frac{t - \frac{1}{t}}{2i} = 3 \quad \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \quad z = \frac{\pi}{2} \pm i \ln(3 + \sqrt{8}) + 2\pi n \quad (n \in \mathbf{Z})$$

Välkänt faktum: $\int_0^z \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = \arcsin z$.

Om polynomet under rottecknet istället har grad tre eller fyra fås en så kallad **elliptisk integral**, vars invers kallas för en **elliptisk funktion**.

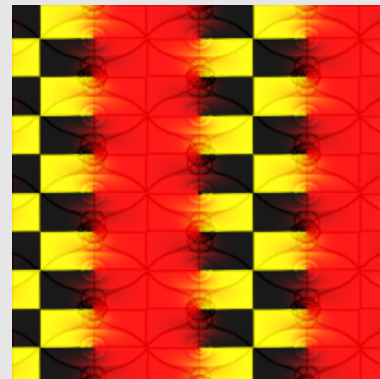
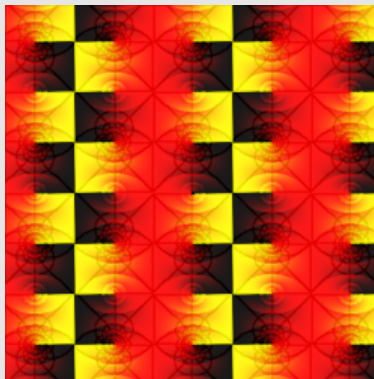
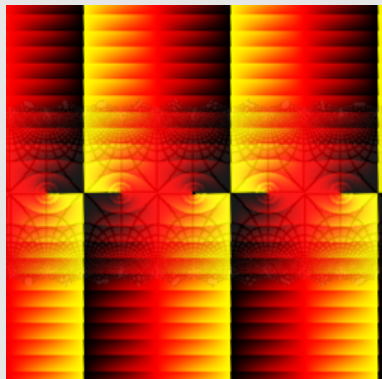
Ett exempel på detta är **sinus amplitudinis** $\operatorname{sn}(z;k)$, en "deformerad sinus" som per definition är invers till $\int_0^z \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}$.

Den är **dubbelperiodisk** i det komplexa planet (för $k \neq 0, 1$):

$$f(z) = \sin z = \operatorname{sn}(z;0)$$

$$f(z) = \operatorname{sn}(z;0.5)$$

$$f(z) = \operatorname{sn}(z;0.9)$$



Elliptiska funktioner uppträder i många tillämpningar. Exempelvis är

$$\varphi(t) = 2 \operatorname{arcsin}[k \operatorname{sn}(\omega t; k)] \quad (k = \sin \frac{1}{2} \varphi_{\max}, \omega = \sqrt{\frac{g}{L}})$$

en **exakt** lösning till pendelekvationen

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \varphi = 0.$$

Svängningens period beror på amplituden φ_{\max} och går mot oändlighet då $\varphi_{\max} \rightarrow \pi$ (vilket motsvarar att $k \rightarrow 1$).

(Vanligen antar man **små svängningar** så att $\sin \varphi \approx \varphi$, och får därmed den **approximativa** lösningen $\varphi(t) \approx \varphi_{\max} \sin \omega t$, vars period är $2\pi/\omega$ oberoende av amplituden.)

Att byta t mot it i pendelekvationen är matematiskt ekvivalent med att byta g mot $-g$, dvs. att låta tyngdkraften peka rakt uppåt istället för rakt nedåt. Pendeln skulle då svänga med en annan period, nämligen den som motsvarar amplituden $\pi - \varphi_{\max}$. Detta argument förklarar varför funktionen $\operatorname{sn}(z; k)$ bör ha både en reell och en rent imaginär period.

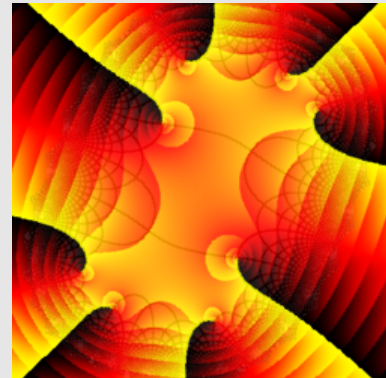
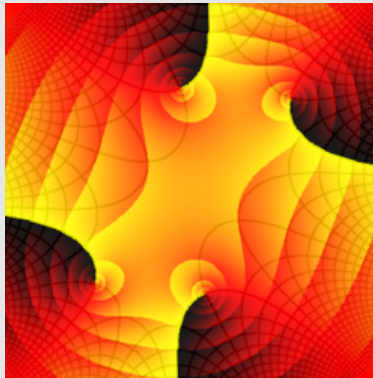
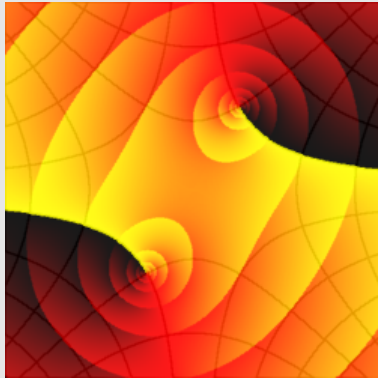
Iteration av ett andragradspolynom:

(Hörn i $\pm 1.5 \pm 1.5i$)

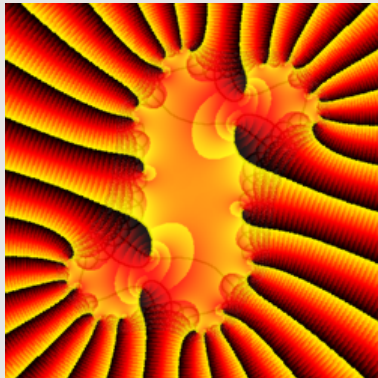
$$f(z) = z^2 + (0.3 - 0.5i)$$

$$f^{(2)}(z) = f(f(z))$$

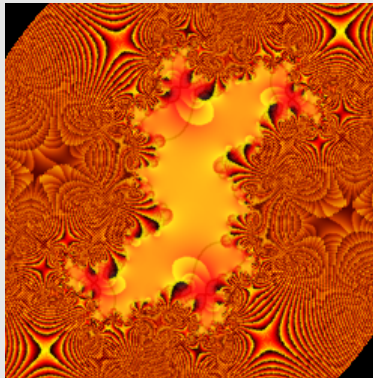
$$f^{(3)}(z) = f(f(f(z)))$$



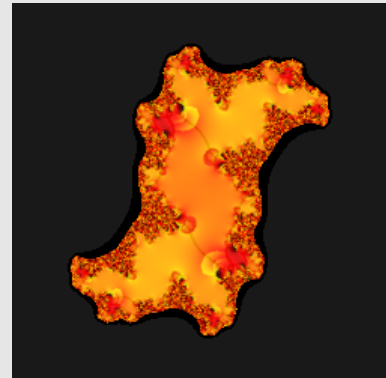
$$f^{(5)}(z)$$



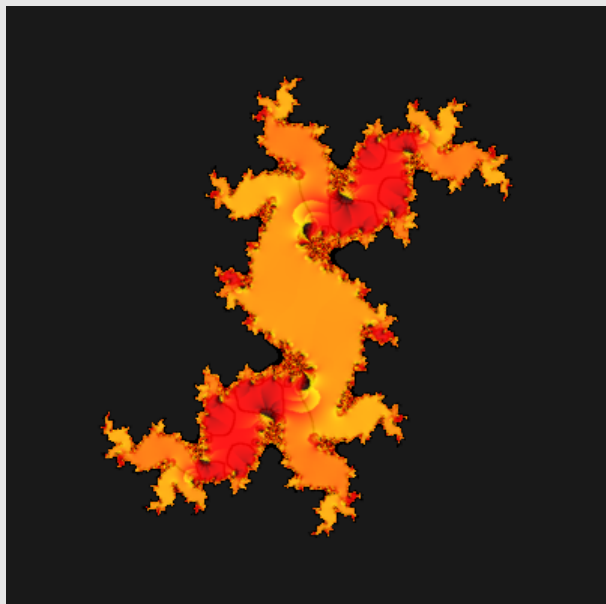
$$f^{(10)}(z)$$



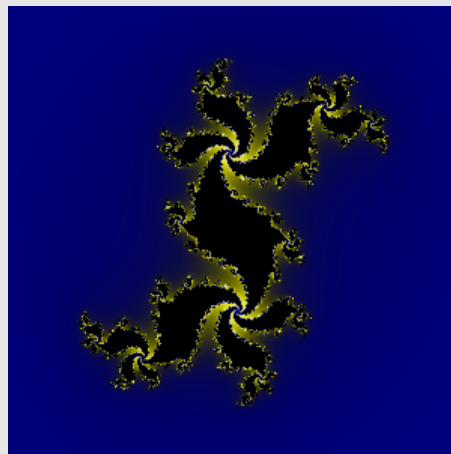
$$f^{(15)}(z) \quad (\text{svart=OVERFLOW})$$



$$f^{(25)}(z)$$



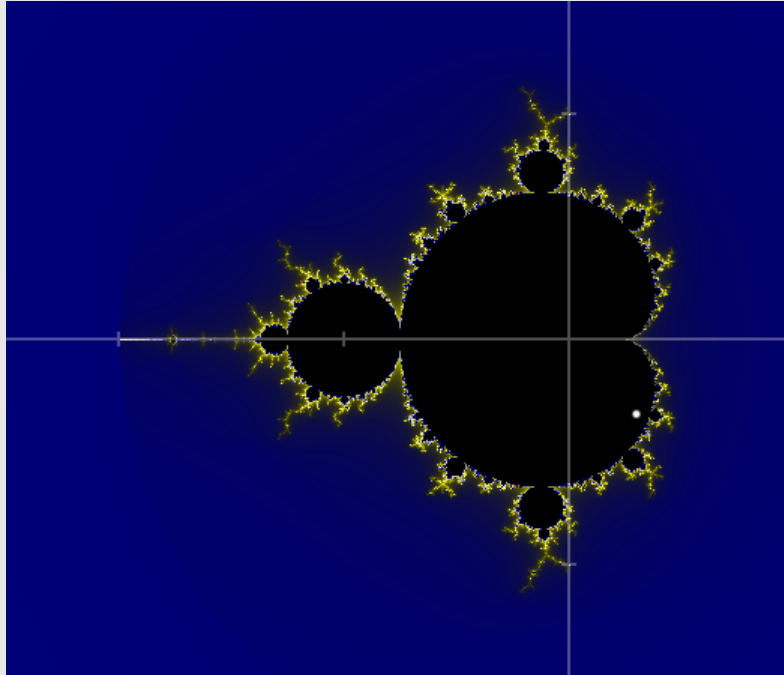
Den ifyllda Juliamängden (svart)
för $f(z) = z^2 + (0.3 - 0.5i)$



Det svarta t.v. uppstår där funktionsvärdena blir för stora för datorns flyttalsaritmetik. Eftersom $f^{(25)}(z) = z^{2^{25}} + \dots$ så vet vi ändå hur bilden egentligen ska se ut för stora z : den har $2^{25} = 33\,554\,432$ stycken "ekrar"!

Den **ifyllda Juliamängden** för en funktion f består av de z för vilka $f^{(n)}(z)$ förblir begränsad då $n \rightarrow \infty$. (Gaston Julia 1918)

Den berömda **Mandelbrotmängden** består av de $c \in \mathbf{C}$ för vilka Julia-mängden för $f_c(z) = z^2 + c$ innehåller origo.
(Pierre Fatou 1917, Benoît Mandelbrot 1980)



I vårt exempel hade vi $c = 0.3 - 0.5i$ (den vita prickens) vilket är en punkt som tillhör Mandelbrotmängden (det svarta området).

Lite mera Riemann, som avslutning:

Riemanns zeta-funktion definieras av formeln

$$\zeta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z}$$

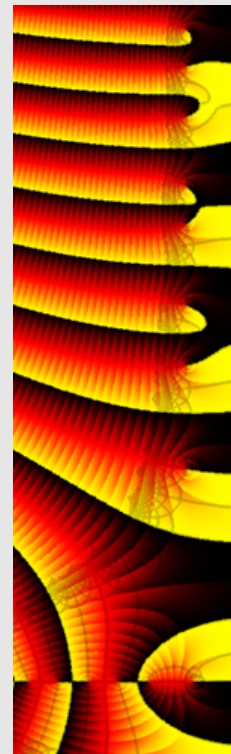
för $\operatorname{Re} z > 1$ (där serien konvergerar), och utvidgas till hela z -planet genom s.k. *analytisk fortsättning*.

Den har en pol i punkten $z = 1$, och "triviala nollställen" i $z = -2, -4, -6, -8$, osv.

Man vet att övriga nollställen (oändligt många) ligger i den **kritiska remsan** $0 < \operatorname{Re} z < 1$.

(I figuren på nästa sida är axlarna, nollställena, polen och den kritiska remsan markerade.)

(För övrigt är $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$, vilket leder till det matematiska skämtet " $1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -\frac{1}{12}$ ".)

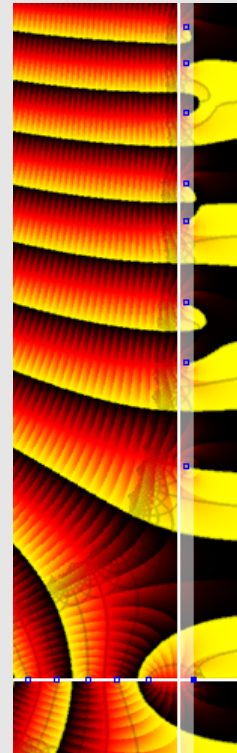


$-11 < \operatorname{Re} z < 4$
 $-5 < \operatorname{Im} z < 45$

Riemannhypotesen säger att alla icke-triviala nollställen till zeta-funktionen ligger på linjen $\text{Re } z = \frac{1}{2}$, alltså exakt mitt i den kritiska remsan.

Detta har verifierats numeriskt för de 10^{13} första nollställena i remsan, men ingen har ännu lyckats bevisa (eller motbevisa) att det gäller för alla.

Riemannhypotesen är kanske det mest berömda ännu olösta matematiska problemet. Det är ett av de sju *Millennium Prize Problems* som år 2000 valdes ut av *Clay Mathematics Institute*, så den som lyckas bringa klarhet i frågan får (förutom ära och berömmelse) en miljon dollar!



$$-11 < \text{Re } z < 4$$

$$-5 < \text{Im } z < 45$$

Riemann introducerade zeta-funktionen när han studerade primtalens fördelning. Användningen av komplex analys för att undersöka talteoretiska frågor kallas (naturligt nog) **analytisk talteori**, och Riemann var en av pionjärerna inom detta ämne.

Här är en utsaga, formulerad enbart med elementära begrepp, som är **ekvivalent med Riemannhypotesen**:

För $n \geq 1$, låt $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ och låt $\sigma(n) = \sum_{d \mid n} d$

beteckna summan av de positiva heltal som delar n . Då är

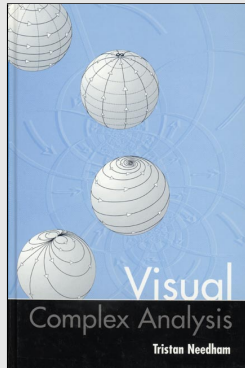
$$\sigma(n) \leq H_n + e^{H_n} \ln H_n,$$

med likhet endast för $n = 1$.

(Jeffrey C. Lagarias, *The American Mathematical Monthly*, No. 6, 2002)

Frågan är alltså: **Är denna utsaga sann eller falsk?!?**

Varmt rekommenderad litteratur

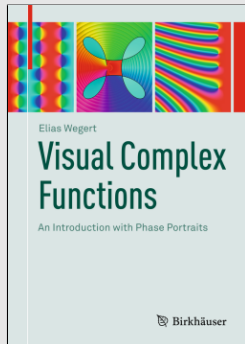


Tristan Needham

Visual Complex Analysis

Oxford University Press, 1997

Fantastisk bok, använder dock enbart traditionella visualiseringsmetoder. Omslagsbilden visar hur Riemannsfären transformeras av **Möbiusavbildningar** $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.



Elias Wegert

Visual Complex Functions: An Introduction with Phase Portraits

Birkhäuser, 2012

Den första boken som använder färgläggning som huvudsaklig visualiseringsmetod. Massor av fina bilder!