Talsystem, del 1

Reella tal (med mera)

Hans Lundmark, MAI

TATA40 Matematiska utblickar

(feb 2020)

Vad är ett tal?

- Olika sorters tal: **naturliga tal**, **reella tal**, **komplexa tal**, ...
- Men ska t.ex. **kvaternioner** $q = a + bi + cj + dk$ räknas som "tal"?

  ($i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, och koefficienterna a, b, c, d är reella tal.)

  Kanske, kanske inte.

  De uppfyller t.ex. inte den kommutativa lagen $q_1 q_2 = q_2 q_1$.
- Begreppet "tal" är alltså lite oprecist. Och vad man har räknat som "tal" har även varierat genom historien.

Det är inte lätt att föreställa sig hur man tänkte för länge sedan. Många saker är helt självklara för oss, men var inte alls det förut:

- Notation: decimaltal, algebra, etc.
- Talet noll. Negativa tal. Irrationella tal.
- Tolkning av reella tal som punkter på en tallinje.
- Tolkning av komplexa tal som punkter i ett talplan.
- Koordinatsystem. Grafen för en funktion.
- Och så vidare…

Kort historik

- **De positiva heltalen**

$$\mathbf{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

har varit kända av mänskligheten sedan urminnes tider.

Man kan addera och multiplicera dem, samt subtrahera (men bara större minus mindre) och dividera (men bara om det går jämnt ut).

Men idén att samla allihop i en mängd och betrakta denna som ett matematiskt objekt är från sent 1800-tal, och var från början **väldigt** kontroversiell!

- Bland **de naturliga talen** brukar man oftast inkludera även **noll**:

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Att betrakta noll som ett tal, och införa en siffra för detta, är dock ett ganska stort begreppsmässigt steg, så det finns olika åsikter om hur ”naturligt” talet noll är.

Somliga definierar $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ istället, och skriver t.ex. $\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ om nollan ska vara med.

- **Heltalen** innefattar även **negativa tal**:

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, 1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

  Beteckningen **Z** kommer från tyskans *Zahlen* = ”tal” (plural).

- Med dessa tal är det åtminstone inte längre något problem att beräkna $a - b$ där $a < b$ är positiva tal.

- Men negativa tal ansågs länge som **ytterst suspekta**!

  Finns negativa tal **egentligen**?! Och vad betyder det att utföra operationer med de negativa talen själva? Vilka räknelagar gäller egentligen? Vad får man när man multiplicerar två negativa tal? Kan man dividera med noll? Osv.

- Här i Europa accepterades de negativa talen (och noll) ungefär **samtidigt som de komplexa talen** (under 1500- och 1600-talen).

  Kineserna var *långt* före (2000 år eller så), men européerna hade ingen kontakt med dem.

  Även indierna var tidigt ute (600–800-talet) med noll och negativa tal. Lite oklart hur mycket utbyte de hade med antikens babylonier och greker. Deras idéer kom till medeltidens Europa via araberna.

  T.ex. sifforna och decimaltalen, i boken *Liber abaci* (1202) av Fibonacci, som dock talar om **talen** $1, 2, \ldots, 9$ men **tecknet** 0.

- **Positiva rationella tal**, dvs. bråk a/b där a och b är positiva heltal, var mycket lättare att acceptera än noll och negativa tal.

- Tidiga kulturer (t.ex. Babylonien, Egypten, Grekland) räknade med bråk, om än inte alltid på det smidigaste sättet.

- Grekerna betonade geometri snarare än tal.

  Bråk fås när två sträckor är **kommensurabla** (”sam-mätbara”), dvs. om det finns en gemensam måttstock som ger den ena sträckan längden a enheter och den andra b enheter, där a och b är positiva heltal. Då står sträckorna i förhållandet $a : b$ till varandra.

- Grekerna upptäckte att diagonalen och sidan i en kvadrat **inte** är kommensurabla.

  Med nutida språkbruk: $\sqrt{2}$ är ett **irrationellt tal**. Men för grekerna fanns inget ”tal” som kunde representera detta längdförhållande! Det kanske var därför som de litade mer på geometrin? **Eudoxos** utvecklade en raffinerad teori för att hantera inkommensurabla geometriska storheter.

  Irrationella tal har en snårig historia, och definierades inte ordentligt förrän mot slutet av 1800-talet (se nedan).

Mysteriet med negativa/komplexa tal och tredjegradare

- Algebran utvecklades medan man fortfarande ogillade negativa tal.
- Bokstäver fick alltså bara stå för positiva tal.
- Besvärligt! *Olika* lösningsformler för $x^2 + ax = b$, $x^2 = ax + b$, osv.
- Negativa lösningar förkastades som ”absurda”:

$$x + 7 = 3 \qquad \text{saknar lösning}$$

$$x^2 + x = 6 \quad \Longleftrightarrow \quad (x-2)(x+3) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 2$$

(Därmed var såklart inte komplexa lösningar aktuella heller.)

- Man tvingades dock (motvilligt) acceptera negativa och komplexa tal pga. **lösningsformeln för tredjegradsekvationer**. (Nästa sida.)

(Obs! Komplexa tal infördes alltså **inte** för att man kände något behov av att **kunna lösa alla andragradsekvationer**, vilket man ibland kan luras att tro om man läser nutida skolböcker.)

- På 1500-talet upptäcktes att tredjegradsekvationen $x^3 = 3ax + 2b$ satisfieras av

$$x = \sqrt[3]{b + \sqrt{b^2 - a^3}} + \sqrt[3]{b - \sqrt{b^2 - a^3}}$$

- T.ex. med $a = 5$ och $b = 2$:

$$x^3 = 15x + 4$$

Vi vill gärna hitta den **positiva** lösningen $x = 4$. Formeln ger

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = ?!?$$

Vad sjutton? Men $2 + \sqrt{-1}$ verkar ju vara kubikrot till $2 + \sqrt{-121}$ om man bara räknar på:

$$\begin{aligned}\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 &= 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{-1} + 3 \cdot 2 \cdot \left(\sqrt{-1}\right)^2 + \left(\sqrt{-1}\right)^3 \\ &= 8 + 12\sqrt{-1} + 6 \cdot (-1) + (-1)\sqrt{-1} \\ &= 2 + 11\sqrt{-1} = 2 + \sqrt{-121}\end{aligned}$$

Likaså $\left(2 - \sqrt{-1}\right)^3 = 2 - \sqrt{-121}$, så

$$x = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4 \qquad (!)$$

- ”Avmystifieringen” av de komplexa talen dröjde sedan rätt länge.
- Tolkning via komplexa talplanet:
  Wessel 1799, Argand 1806, Gauss 1831.
- Reella talpar (a,b) som **definition** av komplexa tal $a+bi$:
  Hamilton 1834.

$$\begin{aligned} (a,b)+(c,d) &= (a+c,b+d) \\ -(a,b) &= (-a,-b) \\ (a,b)(c,d) &= (ac-bd,ad+bc) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \overline{(a,b)} &= (a,-b) \\ |(a,b)| &= \sqrt{a^2+b^2} \end{aligned}$$

- Med denna definition av **C** gäller **inte** mängdinklusionen $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.

  (Mängden **R** har **enstaka tal** som element, medan **C** har **talpar** som element.)

  Däremot finns det en **perfekt kopia** av mängden **R** (inklusive dess räkneoperationer) inuti mängden **C**, nämligen mängden av alla talpar av formen $(a,0)$.

  Man brukar **identifiera** de reella talen med denna kopia av **R** inuti **C**, så att kan man tillåta sig att skriva $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ och $x = x+0i$ (för $x \in \mathbf{R}$).

Ett annat mysterium: Infinitesimaler

- När differential- och integralkalkylen utvecklades (1600- och 1700-talen) resonerade man i termer av **infinitesimaler**, ett slags oändligt små tal. En positiv infinitesimal är mindre än varje positivt reellt tal, men ändå större än noll.
- Integral $\int y\,dx$, en "summa" $\int$ av oändligt många infinitesimaler $y\,dx$.
- Derivata dy/dx, förhållandet mellan två infinitesimaler dy och dx.
- Men **finns** det sådana tal? Matematikerna hade stora svårigheter att förklara vad man egentligen gjorde.

  T.ex. om $y = x^3$ så är

  $$dy = (x + dx)^3 - x^3 = 3x^2\,dx + 3x\,(dx)^2 + (dx)^3$$

  där kan vi dividera med dx eftersom dx inte är noll, men sedan försummar vi dx och $(dx)^2$ som om de vore noll:

  $$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + \cancel{3x\,dx} + \cancel{(dx)^2} = 3x^2 \qquad (?!?)$$

Den irländske biskopen och filosofen George Berkeley gav år 1734 ut skriften

THE

ANALYST;

OR, A

DISCOURSE

Addressed to an

Infidel MATHEMATICIAN.

WHEREIN

It is examined whether the Object, Principles, and Inferences of the modern Analysis are more distinctly conceived, or more evidently deduced, than Religious Mysteries and Points of Faith.

Berkeley kritiserar infinitesimaler som omöjliga att föreställa sig.

Berömt citat:

> And what are these Fluxions? The Velocities of evanescent Increments? And what are these same evanescent Increments? They are neither finite Quantities nor Quantities infinitely small, nor yet nothing. May we not call them the ghosts of departed quantities?

(I Newtons terminologi är *fluxionen* $\dot{x}$ hastigheten hos en *fluent* x som rör sig med tiden.)

Arbete med de logiska grunderna (1800-talet)

- Upptäckten av **icke-euklidisk geometri** (framför allt **hyperbolisk geometri**) i början av 1800-talet bidrog till skepsis mot att basera matematiken på geometriska argument, och ett ökat intresse för tal och räkning (aritmetik) istället.

  Vad är tal? Hur kan man ge aritmetiken en logiskt solid grund?

- Analysen omformulerades gradvis till att baseras på begreppet **gränsvärde** (definierat med ε och δ), för att undvika infinitesimaler.

  (T.ex. Cauchy & Bolzano under tidigt 1800-tal, men främst Weierstrass under andra hälften av 1800-talet.)

- **Mängdläran** (Cantor, 1870- och 80-talen) ansågs från början mycket kontroversiell, men kom så småningom (under 1900-talet) att ses som fundamental. Man börjar med axiom för mängder och bygger sedan upp matematiken (inklusive talsystemen) därifrån.

  Cantor införde två nya typer av ”tal” för att beskriva storleken hos oändliga mängder: **kardinaltal** och **ordinaltal**.

Arbetet med talbegreppets fundament fortskred ”uppifrån och ned”:

- Konstruktion av **C** från **R**.
  (Hamilton 1834)

- Konstruktion av **R** från **Q**.
  (Dedekind 1858, Weierstrass 1865, Méray 1869, Cantor 1872)

- Axiomatisk beskrivning av de naturliga talen **N**.
  (Peano 1889)

  (Föregångare: Grassmann, *Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten* 1861, m.fl.)

- Rigorös konstruktion av **Z** och **Q** från **N**.

  (Vem var först? Grassmann? Peano? Tannery gav 1894 en ”modern” konstruktion av **Q** med ekvivalensklasser av talpar.)

- Enkel mängdteoretisk konstruktion av **N** (och även av ordinaltalen).
  (von Neumann 1923)

Peanos axiom för de naturliga talen (1889)

1. 0 är ett naturligt tal.
2. Varje naturligt tal x har en efterföljare (eller **successor**), $\mathrm{succ}(x)$.
3. 0 är inte successor till något naturligt tal.
4. Om $\mathrm{succ}(x) = \mathrm{succ}(y)$ så är $x = y$.
5. (Induktionsaxiomet.) Om $P(0)$ är sant, och $P(x) \implies P(\mathrm{succ}(x))$, så är påståendet $P(x)$ sant för alla naturliga tal x.

För att talen ska kunna skrivas bekvämt införs såklart de vanliga beteckningarna:

$$1 = \mathrm{succ}(0), \quad 2 = \mathrm{succ}(1), \quad 3 = \mathrm{succ}(2), \quad \ldots$$

Obs. att axiomen inte nämner addition och multiplikation! Dessa räkneoperationer tas alltså inte som ”gudagivna” här, utan måste definieras och studeras enbart utifrån axiomen.

- Rekursiv definition av **addition**:

$$x + 0 = x, \qquad x + \operatorname{succ}(y) = \operatorname{succ}(x + y)$$

- Rekursiv definition av **multiplikation**:

$$x \cdot 0 = 0, \qquad x \cdot \operatorname{succ}(y) = x \cdot y + x$$

- Eftersom symbolen 1 betecknar talet succ(0), så gäller t.ex.

$$x + 1 = x + \operatorname{succ}(0) = \operatorname{succ}(x + 0) = \operatorname{succ}(x)$$

  för alla naturliga tal x.

- Från axiomen **bevisar** man att räknelagarna

$$\begin{aligned} (x + y) + z &= x + (y + z) \\ x + y &= y + x \\ (xy)z &= x(yz) \\ xy &= yx \\ x(y + z) &= xy + xz \end{aligned}$$

  gäller för alla naturliga tal.

von Neumanns konstruktion av N via mängdlära (1923)

1. I ren mängdlära är allting mängder av mängder av mängder osv., och det hela börjar med ett enda matematiskt objekt:

   $$\textbf{tomma mängden} \qquad \varnothing = \{\ \}$$

   Kalla den a för läsbarhetens skull.

2. När vi har ett objekt a kan vi bilda **mängden som innehåller detta objekt** (som sitt enda element):

   $$b = \{a\}$$

3. Nu har vi två olika objekt tillgängliga: a och b. Med dessa kan man bilda mängderna $\{a, b\}$, $\{a\}$, $\{b\}$ och $\varnothing$, varav två stycken är nya:

   $$c = \{a, b\}, \qquad d = \{b\}$$

4. Med fyra olika objekt tillgängliga kan vi bilda $2^4 = 16$ mängder, varav vi redan hade 4. Alltså 12 nya: $e = \{a, b, c, d\}$, $f = \{a, b, c\}$, osv.

5. Bland alla dessa mängder som kan bildas, plocka ut följande:

$$
\begin{aligned}
a &= \varnothing \\
b &= \{a\} \\
c &= \{a, b\} \\
f &= \{a, b, c\} \\
q &= \{a, b, c, f\} \\
&\ \vdots
\end{aligned}
$$

Döp dessa till 0, 1, 2, 3, 4, ..., alltså

$$0 = \varnothing, \quad 1 = \{0\}, \quad 2 = \{0, 1\}, \quad 3 = \{0, 1, 2\}, \quad 4 = \{0, 1, 2, 3\}, \quad \ldots$$

6. Allmänt: låt $\mathrm{succ}(x) = x \cup \{x\}$.

   (Dvs. betrakta mängden x som ett nytt objekt och lägg till det till mängden.)

7. När vi nu har dessa tal (= mängder av ovanstående typ) kan vi samla dem alla i en mängd, dvs. bilda **mängden av naturliga tal**:

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Kardinaltal

- Mängderna **N** och **Q** har **samma kardinalitet**.

  Med detta menas att det finns en 1-1-korrespondens mellan dem.

  Det går alltså att **räkna upp** de rationella talen i en oändlig lista, där varje tal kommer med exakt en gång.

- **Kardinaltalen** mäter kardinalitet.

- Kardinaliteten för en ändlig mängd är helt enkelt antalet element, dvs. ett vanligt naturligt tal.

- Kardinaliteten hos **N** och **Q** (och alla andra **uppräkneliga** mängder) ges av det minsta oändliga kardinaltalet, som heter $\aleph_0$ (alef-noll).

- Kardinaliteten hos **R** (*kontinuum*) ges av ett större kardinaltal, $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$.

  (**R** är en **överuppräknelig** mängd, enligt Cantors diagonalbevis.)

Ordinaltal

- Det går **inte** att räkna upp de rationella talen **i storleksordning**!

  Det finns alltså ingen *ordningsbevarande* 1-1-korrespondens mellan de ordnade mängderna **N** och **Q**.

  Man säger då att de har **olika ordningstyp**.

- Cantors ursprungliga definition av ordinaltal:
  ”ett ordinaltal är ordningstypen för en välordnad mängd”.

  (*Välordnad* = innehåller inte någon strängt avtagande oändlig följd.)

- Ordningstypen för **N** är ett ordinaltal som heter ω.

  Ordningstypen för **Q** är inte ett ordinaltal, ty **Q** är ej välordnad.

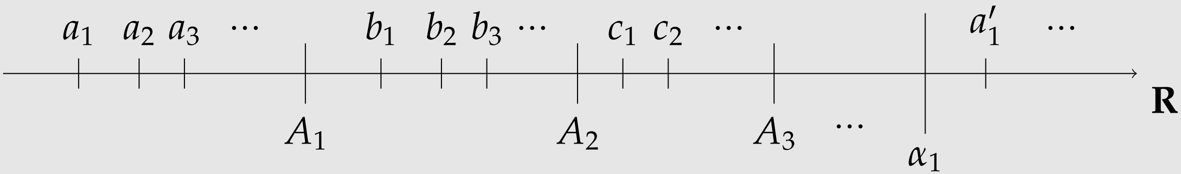
- Ordningstypen för en *ändlig* ordnad mängd ges av *antalet element*.

  (Samma som kardinaliteten. Man kan säga att kardinaltalen ”ett”, ”två”, osv. motsvarar ordinaltalen ”första”, ”andra”, osv.)

- Cantors definition ovan är ganska abstrakt.
- Vad John von Neumann visade 1923 var hur ordinaltalen istället kan definieras konkret som **mängder av en viss typ**. Konstruktionen av de naturliga talen ovan är bara början i denna konstruktion.

Exempel på hur man kan räkna med ordinaltal

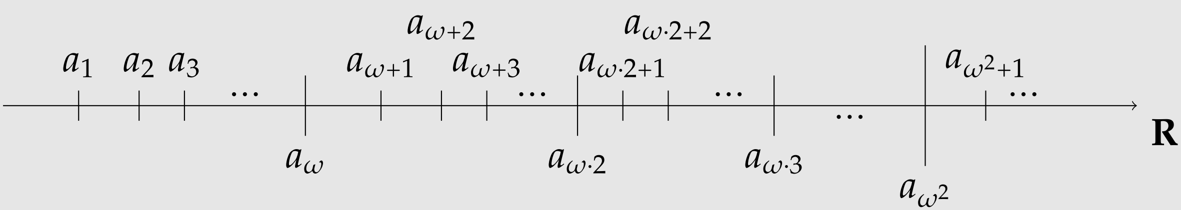
Betrakta **en följd av följder av följder** (etc.) av reella tal, strängt växande och uppåt begränsade så att de har gränsvärden:



$$A_1 = \lim_{n\to\infty} a_n \qquad A_2 = \lim_{n\to\infty} b_n \qquad A_3 = \lim_{n\to\infty} c_n \qquad \text{(etc.)} \qquad \alpha_1 = \lim_{n\to\infty} A_n$$

Om vi ska hålla på såhär länge till kommer det att bli bokstavsbrist!

Istället kan man skriva alla dessa tal som **en enda följd** $(a_n)_{n\geq 1}$ genom att låta **indexet** n vara ett **ordinaltal**:



von Neumanns konstruktion av ordinaltalen

Cantor: ”Ordinaltalet ω är **ordningstypen** för mängden **N**.”

von Neumann: ”Säg att ordinaltalet ω **är** mängden **N**, och fortsätt sedan med konstruktionen $\mathrm{succ}(x) = x \cup \{x\}$.”

- Mängden $\omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ är det minsta oändliga ordinaltalet.
- Det ordinaltal som kommer direkt efter ω är mängden

$$\omega + 1 = \mathrm{succ}(\omega) = \omega \cup \{\omega\} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, \omega\}$$

- Därefter kommer

$$\omega + 2 = \mathrm{succ}(\omega + 1) = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, \omega, \omega + 1\}$$

- Och så vidare! När vi har alla $\omega + k$ kan vi bilda

$$\omega + \omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots\} = \omega \cdot 2$$

- Sedan $\omega \cdot 2 + 1 = \mathrm{succ}(\omega \cdot 2)$, etc.

Ordinalaritmetik

Man definierar $x + y$ och $x \cdot y$ för ordinaltal med samma rekursiva formler som för naturliga tal, plus särskilda formler för **limesordinaltal** α, dvs. ordinaltal ($\neq 0$) som inte har någon omedelbar föregångare.

(Exempel på limesordinaltal: mängderna ω och $\omega + \omega$ ovan.)

$$\begin{aligned} x + 0 &= x \\ x + \operatorname{succ}(y) &= \operatorname{succ}(x + y) \\ x + \alpha &= (\text{det minsta tal som är större än } x + y \text{ för alla } y < \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \cdot 0 &= 0 \\ x \cdot \operatorname{succ}(y) &= x \cdot y + x \\ x \cdot \alpha &= (\text{det minsta tal som är större än } x \cdot y \text{ för alla } y < \alpha) \end{aligned}$$

(Även potenser x^y kan definieras för godtyckliga ordinaltal x och y.)

Addition av ordinaltal är **inte kommutativ**!

Exempelvis är

$$\begin{aligned}3+\omega &= (\text{det minsta tal som är större än } 3+k \text{ för alla } k<\omega)\\ &= (\text{det minsta tal som är större än } 3,4,5,6,\dots)\\ &= \omega\end{aligned}$$

vilket ju inte är samma sak som $\omega+3$. Intuitiv förklaring:

- $\omega+3$ motsvarar att ”räkna till ω och därefter till 3”:

$$1,2,3,4,5,\dots;1,2,3$$

- Men $3+\omega$ motsvarar att ”räkna till 3 och därefter till ω”, vilket i princip är samma sak som att räkna till ω:

$$1,2,3,1,2,3,4,5,\dots$$

(Finare uttryckt: Det finns en ordningsbevarande 1-1-korrespondens mellan ω och den ordnade mängden $\{1_a<2_a<3_a<1_b<2_b<3_b<4_b<5_b<\dots\}$.)

Inte heller multiplikationen är kommutativ, t.ex. är $\omega \cdot 2 \neq 2 \cdot \omega$.

- Definitionerna ger

$$\begin{aligned}
\omega \cdot 2 = \omega \cdot \mathrm{succ}(1) = \omega \cdot 1 + \omega &= \omega \cdot \mathrm{succ}(0) + \omega \\
&= (\omega \cdot 0 + \omega) + \omega = (0 + \omega) + \omega \\
&= (\text{det minsta tal som är större än } 0 + k \text{ för alla } k < \omega) + \omega \\
&= \omega + \omega
\end{aligned}$$

  respektive

$$\begin{aligned}
2 \cdot \omega &= (\text{det minsta tal som är större än } 2 \cdot k \text{ för alla } k < \omega) \\
&= (\text{det minsta tal som är större än } 2, 4, 6, 8, \ldots) = \omega
\end{aligned}$$

- Ordinaltalet $\omega \cdot 2 = \omega + \omega$ motsvarar att ”räkna till ω, två gånger”:

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots ; 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

- Men $2 \cdot \omega = \omega$ motsvarar att ”räkna till 2, omega gånger”, vilket är exakt lika mycket jobb som att räkna till ω:

$$1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots$$

Åter till negativa tal: konstruktion av $\mathbf{Z}$ från $\mathbf{Z}^+$

- Nu vet vi vad positiva heltal är och hur man adderar och multiplicerar dem. (Vi kan låtsas att vi är medeltidsmänniskor som inte är bekväma med talet noll ännu.)
- Nu ska vi försöka införa noll och negativa heltal, och tala om hur man räknar med dem.
- De negativa talen ska på något vis representera det som man får som resultat när man försöker utföra en ”absurd” subtraktion. T.ex. ska -3 vara resultatet av $1-4$, men också av $2-5$, $3-6$, $4-7$, osv.
- Idé: säg att talet -3 **är** mängden av alla dessa subtraktioner $a-b$!

  Eller bättre, eftersom vi inte kan utföra subtraktionerna innan vi har definierat negativa tal, säg att -3 är mängden av de motsvarande **talparen** (a,b):

  $$N_3 = \{(1,4),(2,5),(3,6),(4,7),\dots\}$$

  (N_3 är en tillfällig beteckning som står för ”det tredje negativa talet i $\mathbf{Z}$”.)

På förra sidan hade vi ”det tredje negativa talet i $\mathbf{Z}$”:

$$N_3 = \{(1,4),(2,5),(3,6),(4,7),\dots\}$$

De positiva heltalen har vi ju redan från början, men för att få en enhetlig beskrivning både positiva och negativa tal inför vi även mängder som ska stå för resultaten av vanliga subtraktioner, som

$$4-1=5-2=6-3=7-4=\cdots=3$$

T.ex. definierar vi ”det tredje positiva talet i $\mathbf{Z}$” som följande mängd:

$$P_3 = \{(4,1),(5,2),(6,3),(7,4),\dots\}$$

Och mängden

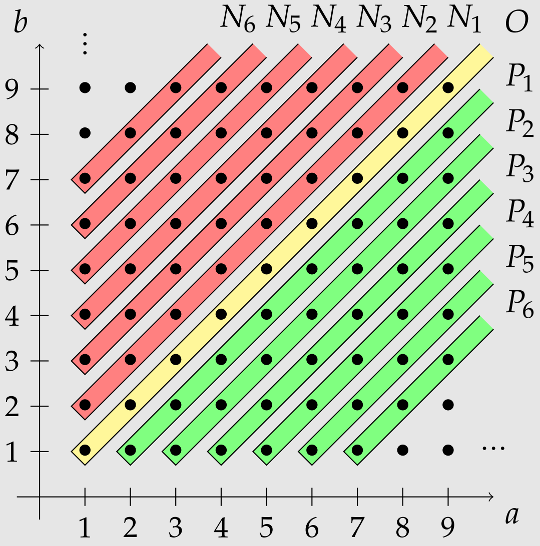
$$O = \{(1,1),(2,2),(3,3),\dots\}$$

kommer förstås att bli ”talet noll i $\mathbf{Z}$”.

Vi tar alltså alla talpar (a, b) där a och b är positiva heltal, och delar in dem i **ekvivalensklasser** "diagonalt", en klass för varje (tilltänkt) värde på $a - b$.

Paren (a, b) och (c, d) ska tillhöra samma klass om de tilltänkta värdena $a - b$ och $c - d$ är lika, men vi kan inte säga $a - b = c - d$ ännu, så vi uttrycker det med enbart plus istället, såhär:

$$(a, b) \sim (c, d) \quad \Longleftrightarrow \quad a + d = b + c$$



Definition: Låt $\mathbf{Z} = \{\dots, N_3, N_2, N_1, O, P_1, P_2, P_3, \dots\}$.

Räkneoperationer på Z

Nu har vi sagt vad **elementen** i mängden **Z** ska vara:

$$\mathbf{Z} = \{\underbrace{\ldots, N_3, N_2, N_1}_{\text{"negativa tal"}}, \underbrace{O}_{\text{"noll"}}, \underbrace{P_1, P_2, P_3, \ldots}_{\text{"positiva tal"}}\}$$

Varje element i **Z** är alltså en ekvivalensklass av talpar.
Nästa steg är att **definiera räkneoperationer** på dessa klasser.

- Hur adderar man två ekvivalensklasser X och Y?
- Idé: Om $(a, b) \in X$ och $(c, d) \in Y$ så är klasserna X och Y tänkta att motsvara talen $a - b$ och $c - d$.

  Summan $X + Y$ bör då motsvara $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$.
- **Def. av addition:** Låt $X + Y$ vara den klass som innehåller talparet

  $$(a + c, b + d)$$

  där (a, b) och (c, d) är representanter för klasserna X resp. Y.

  (Man kan lätt visa att resultatet inte beror på *vilka* representanter man väljer!)

Låt oss testa! Vad är $P_3 + N_5$?

- Välj en representant för klassen P_3, t.ex. $(a, b) = (10, 7)$.
- Välj en representant för klassen N_5, t.ex. $(c, d) = (3, 8)$.
- Då är $(a + c, b + d) = (10 + 3, 7 + 8) = (13, 15)$.
  Detta talpar tillhör klassen N_2.

Alltså är $P_3 + N_5 = N_2$.

(Vilket såklart bara är ett tillfälligt skrivsätt för $3 + (-5) = -2$.)

Idéer för def. av negation och multiplikation:

$$-(a-b) = b-a \qquad (a-b)(c-d) = (ac+bd)-(ad+bc)$$

- **Def. av negation:** Låt $-X$ vara klassen som innehåller (b,a).
- **Def. av subtraktion:** Låt $X-Y = X+(-Y)$.
- **Def. av mult.:** Låt XY vara klassen som innehåller $(ac+bd, ad+bc)$.

Utifrån dessa definitioner visar man alla de vanliga räknereglerna för heltal (t.ex. att ”minus gånger minus blir plus”).

Notera att definitionerna är helt enhetliga; det behövs ingen falluppdelning där positiva tal, negativa tal och noll behandlas var för sig.

De positiva talen $\{1, 2, 3, \dots\}$ som vi började med är **inte** element i vår mängd

$$\mathbf{Z} = \{\dots, N_3, N_2, N_1, O, P_1, P_2, P_3, \dots\}.$$

Men i $\mathbf{Z}$ finns delmängden

$$\{P_1, P_2, P_3, \dots\}$$

som är en **perfekt kopia** av mängden av positiva heltal (inklusive dess räkneoperationer).

Vi kan därför ta oss friheten att **identifiera** de gamla positiva heltalen med de nya, och skriva "k" istället för "P_k".

Eftersom $-P_k = N_k$ kan vi då även skriva "$-k$" istället för "N_k", och vi inför såklart också symbolen "0" istället för "O".

- Nu har vi sett hur man kan konstruera heltalen **Z** och deras räkneoperationer (plus, negation, gånger) från de positiva heltalen $\mathbf{Z}^+$ och deras räkneoperationer (plus, gånger).

- Exakt samma konstruktion kan också användas för att definiera **Q** från $\mathbf{Q}^+$, eller **R** från $\mathbf{R}^+$.

- De positiva rationella talen $\mathbf{Q}^+$ kan i sin tur konstrueras från $\mathbf{Z}^+$ via en liknande konstruktion med ekvivalensklasser av talpar.

  T.ex. kan bråket ”en halv” representeras av klassen

$$\{(1,2),(2,4),(3,6),(4,8),\dots\}$$

  och allmänt ska paren (a,b) och (c,d) tillhöra samma klass om de är tänkta att representera samma bråk, dvs. $a/b = c/d$, men eftersom vi inte får säga så ännu uttrycker vi det enbart med gånger:

$$(a,b) \sim (c,d) \qquad \Longleftrightarrow \qquad ad = bc$$

  Definition av addition och multiplikation av ekvivalensklasser:

$$\begin{cases}(a,b) \in X \\ (c,d) \in Y\end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases}(ad+bc,bd) \in X+Y \\ (ac,bd) \in XY\end{cases}$$

Konstruktion av de reella talen

Det som återstår nu är att konstruera $\mathbf{R}$ från $\mathbf{Q}$.

(Eller $\mathbf{R}^+$ från $\mathbf{Q}^+$ om man tycker att det blir enklare.)

Det finns många sätt. De två mest kända är:

- Dedekindsnitt.

  Dedekind 1858 (publicerat 1872).

- Ekvivalensklasser av Cauchyföljder.

  Cantor 1872 (förenkling av konstruktion som Weierstrass föreläst om 1865).

  Méray 1869 (oberoende, men ej särskilt uppmärksammat i samtiden).

Dedekinds konstruktion av R

Die Betrachtungen, welche den Gegenstand dieser kleinen Schrift bilden, stammen aus dem Herbst des Jahres 1858. Ich befand mich damals als Professor am eidgenössischen Polytechnicum zu Zürich zum ersten Male in der Lage, die Elemente der Differentialrechnung vortragen zu müssen, und fühlte dabei empfindlicher als jemals früher den Mangel einer wirklich wissenschaftlichen Begründung der Arithmetik. Bei dem Begriffe der Annäherung einer veränderlichen Größe an einen festen Grenzwerth und namentlich bei dem Beweise des Saßes, daß jede Größe, welche beständig, aber nicht über alle Grenzen wächst, sich gewiß einem Grenzwerth nähern muß, nahm ich meine Zuflucht zu geometrischen Evidenzen.

Richard Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, 1872

Ett försök till översättning:

De betraktelser som utgör ämnet för denna lilla skrift härstammar från hösten 1858. Jag befann mig då, som professor vid federala tekniska högskolan i Zürich, för första gången i situationen att behöva föreläsa om grunderna i differentialkalkylen, och tydligare än någonsin kände jag då av bristen på ett verkligt vetenskapligt rättfärdigande av aritmetiken. Jag fick ta min tillflykt till geometriska evidens när det gällde begreppet att en föränderlig storhet närmar sig ett fast gränsvärde, och speciellt vid beviset för satsen att varje storhet som växer stadigt (men inte bortom alla gränser) säkert måste närma sig ett gränsvärde.

Richard Dedekind, *Kontinuitet och irrationella tal*, 1872

Om man delar upp de positiva rationella talen $\mathbf{Q}^+$ i två icketomma disjunkta delmängder L (som i *left*) och R (som i *right*) sådana att

$$x < y \text{ för alla } x \in L \text{ och } y \in R$$

så kan **tre fall** inträffa:

1. L har ett största element $r \in \mathbf{Q}^+$, och R saknar minsta element:

2. L saknar största element, och R har ett minsta element $r \in \mathbf{Q}^+$:

3. L saknar största element, och R saknar minsta element:

I fall 1 & 2 delar man upp $\mathbf{Q}^+$ vid något redan existerande (dvs. rationellt) tal, men i fall 3 delar man upp $\mathbf{Q}^+$ vid en ”lucka” i mängden, alltså precis där man skulle vilja att det fanns ett irrationellt tal (som $\sqrt{2}$ i exemplet).

Dedekinds idé:

> Säg att ett irrationellt tal **är** en sådan uppdelning som i fall 3.
>
> (Och identifiera de rationella talen med uppdelningar som i fall 1 eller 2. För att få entydighet väljer vi att bara använda fall 2.)

Definition:

- Ett **Dedekindsnitt** i $\mathbf{Q}^+$ är ett mängdpar (L, R), där L och R är icketomma disjunkta delmängder av $\mathbf{Q}^+$ sådana att
  - (a) $\mathbf{Q}^+ = L \cup R$
  - (b) $x < y$ för alla $x \in L$ och $y \in R$
  - (c) L saknar största element
- Med **positivt reellt tal** menar vi ett Dedekindsnitt i $\mathbf{Q}^+$.

  Mängden av positiva reella tal betecknas $\mathbf{R}^+$.

Definition av hur man adderar och multiplicerar Dedekindsnitt:

- $(L_1, R_1) + (L_2, R_2) = (L, R)$ där

$$L = \{x_1 + x_2 : x_1 \in L_1,\ x_2 \in L_2\} \qquad \text{och} \qquad R = \mathbf{Q}^+ \setminus L$$

- $(L_1, R_1) \cdot (L_2, R_2) = (L, R)$ där

$$L = \{x_1 x_2 : x_1 \in L_1,\ x_2 \in L_2\} \qquad \text{och} \qquad R = \mathbf{Q}^+ \setminus L$$

Ordningsrelationen $x < y$ på $\mathbf{R}^+$ är också lätt att definiera:

$$(L_1, R_1) < (L_2, R_2) \quad \Longleftrightarrow \quad L_1 \subset L_2$$

Dedekind konstruerade $\mathbf{R}$ direkt från $\mathbf{Q}$, dvs. ”ett reellt tal är ett Dedekindsnitt i $\mathbf{Q}$”.

Här har jag dock valt att konstruera $\mathbf{R}^+$ från $\mathbf{Q}^+$. Detta gör att man slipper behandla positiva och negativa tal med falluppdelning vid definitionen av multiplikation.

De negativa reella talen (och noll) införs istället genom att efteråt gå från $\mathbf{R}^+$ till $\mathbf{R}$ med samma konstruktion som när vi gick från $\mathbf{Z}^+$ till $\mathbf{Z}$ ovan.

Cantors (och Mérays) konstruktion av $\mathbf{R}$

Denna idé är ganska annorlunda.

Här kan man lika gärna gå direkt från $\mathbf{Q}$ till $\mathbf{R}$.

De flesta är nog vana att tänka på reella tal som (eventuellt oändliga) decimalutvecklingar, t.ex.

$\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016887242096980785696718753769480 73\ldots$

(Och det kan man väl göra, men det är t.ex. lite besvärligt att säga exakt hur man adderar och multiplicerar sådana. Man kan ju inte "börja från höger" som man brukar annars! Så vi skulle vilja ha en definition där det är lättare att definiera räkneoperationerna.)

Vad ovanstående skrivsätt betyder är att följden

$$\left(1, \frac{14}{10}, \frac{141}{100}, \frac{1414}{1000}, \frac{14142}{10000}, \frac{141421}{100000}, \frac{1414213}{1000000}, \ldots\right)$$

(som **består enbart av rationella tal**) har gränsvärdet $\sqrt{2}$.

Idé: Kan vi säga att talet $\sqrt{2}$ **är** denna följd av rationella tal?

Njae, det finns ju även andra rationella talföljder som går mot $\sqrt{2}$.

T.ex. ger successiva trunkeringar av kedjebråksutvecklingen

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}$$

en annan sådan följd:

$$\left(1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \frac{577}{408}, \ldots\right)$$

Modifierad idé:

Säg att talet $\sqrt{2}$ är **mängden** av alla rationella talföljder som går mot $\sqrt{2}$.

Men se upp för cirkelresonemang!

Hur säger man att en följd konvergerar mot $\sqrt{2}$ **innan** man har definierat vad talet $\sqrt{2}$ **är**?

Vi måste (a) urskilja de rationella följder som "försöker konvergera" och (b) paketera alla som "försöker konvergera mot samma tal" i en och samma ekvivalensklass (som är det objekt som ska **vara** just det talet).

Definition:

- En talföljd $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ kallas för en **Cauchyföljd** om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett N sådant att $|a_m - a_n| < \varepsilon$ för alla $m, n \geq N$.
- En talföljd $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **går mot noll** om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett N sådant att $|a_n| < \varepsilon$ för alla $n \geq N$.
- Två Cauchyföljder $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ och $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ räknas som **ekvivalenta** om skillnadsföljden $(a_n - b_n)_{n=1}^{\infty}$ går mot noll.
- Med **reellt tal** menar vi en **ekvivalensklass av Cauchyföljder av rationella tal**.

Exempel:

- De två följderna ovan är alltså två (av oändligt många tänkbara) representanter för den ekvivalensklass av följder som vi kallar för det reella talet $\sqrt{2}$.

- Mängden **R** av reella tal innehåller en **perfekt kopia** av mängden **Q** av rationella tal: talet $q \in \mathbf{Q}$ motsvarar den klass som innehåller den konstanta följden $(q, q, q, \dots)$.

  Så vi kan identifiera **Q** med denna delmängd av **R**.

Addition och multiplikation av reella tal definieras genom att operera **elementvis** på motsvarande Cauchyföljder.

Dvs. om X och Y är reella tal (klasser av Cauchyföljder), tag representantföljder

$$(a_n) \in X \qquad (b_n) \in Y$$

och låt $X + Y$ vara den klass som innehåller följden $(a_n + b_n)$, samt låt XY vara den klass som innehåller följden $(a_n b_n)$.

Som vanligt måste man bevisa att resultatet inte beror på valet av representanter!

Talet 0,999...

- Det reella talet 1 är ekvivalensklassen som följden

$$(1, 1, 1, 1, \dots)$$

  tillhör.

- Det reella talet 0,999 ... är ekvivalensklassen som följden

$$\left(\frac{9}{10}, \frac{99}{100}, \frac{999}{1000}, \frac{9999}{10000}, \dots\right)$$

  tillhör.

- Men detta är **samma** ekvivalensklass, eftersom skillnadsföljden

$$\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \dots\right)$$

  går mot noll! De båda följderna representerar alltså **samma tal**.

- Slutsats: i det reella talsystemet gäller 0,999 ... = 1.

  (Det är bara **två olika skrivsätt** för det reella talet ”ett”.)

Några egenskaper hos **R**

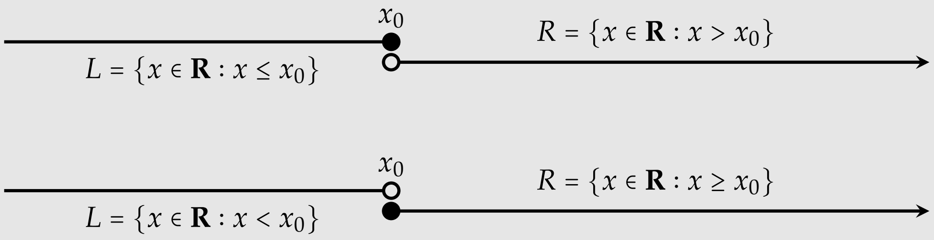
- Det reella talsystemet innehåller inga (nollskilda) **infinitesimaler**, dvs. tal x sådana att $0 < |x| < 1/n$ för alla positiva heltal n.

  Detta brukar uttryckas som den **arkimediska egenskapen**:

  > Om a och b är reella tal med $0 < a < b$ så finns det ett heltal n sådant att $na > b$.

- Det reella talsystemet är **Dedekindfullständigt**, dvs. det ”saknar luckor” – om man tar Dedekindsnitt i $\mathbf{R}$ så uppstår inga nya tal.

  Med andra ord: om man delar upp $\mathbf{R}$ i två icketomma disjunkta delmängder L och R sådana att $x < y$ för alla $x \in L$ och $y \in R$, så måste antingen L ha ett största element $x_0 \in \mathbf{R}$ eller så måste R ha ett minsta element $x_0 \in \mathbf{R}$.



- Dedekindfullständigheten uttrycks oftast i form av **supremum-axiomet**:

  Om M är en **uppåt begränsad** icketom mängd av reella tal så finns det ett reellt tal x_0 som är den **minsta** övre begränsningen för M.

  (Bevis: Varje tal $m \in M$ är ett Dedekindsnitt. Tag **unionen** av alla dessa snitts vänstermängder, så fås vänstermängden i Dedekindsnittet för x_0.)

  Denna minsta övre begränsning x_0 kallas **supremum** för mängden M.

- Supremumaxiomet implicerar bl.a. satsen som Dedekind refererade till i citatet ovan:

  En **växande** och **uppåt begränsad** följd $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ av reella tal måste ha ett reellt gränsvärde.

  (Nämligen supremum för mängden $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$.)

  Denna sats används i sin tur när man bevisar satsen om mellanliggande värde, satsen om största och minsta värde, etc.

- Varje Cauchyföljd av reella tal konvergerar mot ett reellt tal.

  Detta innebär att det reella talsystemet även är **Cauchyfullständigt**, dvs. om man bildar ekvivalensklasser av Cauchyföljder av **reella** tal (modulo ekvivalensrelationen ”skillnaden går mot noll”) så uppstår inga nya tal.

- De reella talen kan beskrivas **axiomatiskt** genom att säga att de utgör en **kropp** (dvs. de fyra räknesätten finns och uppfyller alla de vanliga räknereglerna) som är **ordnad** (dvs. har en ordningsrelation $x < y$ med de vanliga egenskaperna) och **Dedekindfullständig**.

  (Man kan förstås räkna upp exakt vilka ”vanliga” räkneregler och egenskaper som åsyftas, men de är för många för att jag ska orka göra detta här.)

  Alla kroppar med dessa egenskaper kan visas vara **isomorfa**, så det finns (upp till isomorfism) bara **en** kropp som är ”$\mathbf{R}$”.

  Både Dedekinds konstruktion och Cantors konstruktion ger en kropp med dessa egenskaper, så de är ekvivalenta.