Några berömda 1900-talsmatematiker

Hans Lundmark, MAI

TATA40 Matematiska utblickar

(april 2022)

Några viktiga årtal under 1900-talet

- Första världskriget 1914–1918.
- Ryska revolutionen 1917. Sovjetunionen 1922.
- Hitler rikskansler i Tyskland januari 1933.
- Andra världskriget 1939–1945.

David Hilbert (1862–1943)

- Född i Königsberg. Fadern domare.
- Började på univ. i Königsberg 1880.
- Doktorsavhandling 1885 (**invariantteori**).
- Studieresa 1885–86, bl.a. Paris.
- *Habilitation* i Königsberg. Arbete som *Privat-dozent*, senare *Extraordinarius* (≈ bitr. prof.).
- Professor i **Göttingen** från 1895 till sin död.
- Välkänd redan på 1890-talet. Mycket berömt föredrag på den andra internationella matematikerkongressen i Paris år 1900 (”Hilberts 23 problem”).
- Betraktades (och betraktas fortfarande) som den mest framstående matematikern under det tidiga 1900-talet, särskilt efter att **Henri Poincaré** (1854–1912) dött.

(Alla foton är hämtade från Wikimedia Commons.)

- Studiekamrat på universitetet, och vän för livet, med **Hermann Minkowski** (1864–1909).

  Främst **talteoretiker**. Vann Franska vetenskaps-akademins *Grand Prix des Sciences Mathematiques* vid 18 års ålder 1883.

  Även känd för **Minkowskirummet**, geometrin hos rumtiden i Einsteins speciella relativitetsteori.

  (Einstein hade f.ö. haft Minkowski som lärare i matematik vid tekniska högskolan i Zürich.)

  Professor i Göttingen 1902. Dog tragiskt av brusten blindtarm vid 44 års ålder.

- Varje eftermiddag kl. 17 gick Hilbert, Minkowski och deras lärare **Adolf Hurwitz** (1859–1919) på promenad ”till äppelträdet” och pratade matematik.

Hilbert var en matematisk ”periodare”:

- **Invariantteori** (1884–93)

  Doktorsavhandlingen. Gordans problem & Hilberts bassats. (”Das ist nicht Mathematik. Das ist Theologie.”) Hilberts nollställessats.

- **Förenklade bevis för att e och π är transcendenta** (1893)

- **Algebraisk talteori** (1893–98)

  Die Theorie der algebraischen Zahlkörper (1897). Klasskroppsteori.

- **Geometrins axiomatiska grundvalar** (1898–99)

  Grundlagen der Geometrie (1899).

- **Dirichlets princip** (1899)

  Variationskalkyl. ”Lösningen till Laplaces ekvation med givna randvärden är den funktion som minimerar energin.”

- **Integralekvationer** (1900–)

  Inspirerat av arbeten av **Ivar Fredholm** (1866–1927). Hilbertrum.

- **Matematisk fysik** (1912–)

  Relativitetsteori. Kvantmekanik. *Methoden der mathematischen Physik* (1924), välkänd bok ihop med **Richard Courant** (1888–1972).

- **Metamatematik & matematisk logik** (ICM 1904; 1917–)

  Hilberts program: konstruera en motsägelsefri och fullständig logisk axiomatisering av hela matematiken. (Ett slags **formalism**, vill reducera matematiken till ”meningslös” stränghantering.)

  På kollisonskurs med holländaren **L. E. J. Brouwer** (1881–1966), vars filosofi kallas **intuitionism**.

Geometrins grundvalar

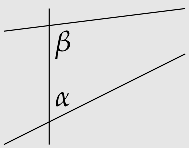
- Euklides' *Elementa* från 300-talet f.Kr. har använts som lärobok i skolan långt in på 1900-talet.

  Stilbildande! Bygger upp teorin från definitioner och axiom. Dock ej helt perfekt; resonemangen använder t.ex. en del saker som aldrig formuleras som axiom.

- Fyra enkla axiom för plan geometri.

  Man kan bilda ett linjesegment från en punkt till en annan punkt. Man kan förlänga ett linjesegment hur långt som helst. Man kan bilda en cirkel med given mittpunkt och radie. Alla räta vinklar är lika.

- Och ett komplicerat femte axiom, **parallellaxiomet**.

  Om en rät linje korsar två andra räta linjer så att de inre vinklarna på ena sidan är mindre än två räta vinklar (dvs. $\alpha + \beta < \pi$), så måste de två räta linjerna, om förlängda i all oändlighet, mötas på på denna sida.

- Ekvivalent formulering (**Playfairs axiom**):

  Givet en linje L och en punkt $P \notin L$ finns det exakt en linje som går genom P och aldrig skär L.

- Många har genom historien försökt att bevisa att parallellaxiomet följer från de fyra första axiomen.

- Men det gör det inte!

  På 1800-talet upptäcktes nämligen **icke-euklidiska geometrier** som uppfyller de fyra första axiomen men **inte** parallellaxiomet.

  (Bolyai och Lobatjevskij, och även Gauss som dock ej publicerade resultaten.)

- Hilberts bok *Grundlagen der Geometrie* (1899) handlar om geometrins axiom och relationerna mellan dem.

  Uppdaterad axiomatisk version av Euklides geometri, med nutida krav på stringens.

- Euklides börjar med ”En punkt är det som inte har några delar” och andra liknande definitioner. Men Hilbert försöker aldrig tala om vad **punkter**, **linjer** och **plan** egentligen *är*, utan de definieras *enbart* utifrån de *relationer* som de uppfyller enligt axiomen.

Hilberts 23 problem

- Hilbert bjöds in att tala vid den andra **internationella matematiker-kongressen** i Paris år 1900.

  (Den första var 1897 i Zürich. Hålls vart fjärde år fortfarande.)

- Föredragets titel (efter förslag från Minkowski):

  Mathematische Probleme

  En lista på 10 stycken olösta problem presenterades i Paris.

  Utökad till 23 problem i den senare publicerade versionen.

- Den tyske läkaren Emil du Bois-Reymond hade hävdat att vissa ”transcendenta” problem, t.ex. materiens och krafternas innersta väsen, låg bortom människans vetande:

  ”Ignoramus et ignorabimus.”

  (”Vi vet inte, och vi kommer inte att få veta.”)

- Men Hilbert säger i sitt föredrag:

  ”Denna övertygelse om att varje matematiskt problem är lösbart är en kraftig sporre för oss under arbetet; vi hör inom oss den ständiga maningen: *Där är problemet, sök lösningen. Du kan finna den med rent tänkande, för i matematiken finns inget ignorabimus!*”

- Ett annat berömt Hilbertcitat, från ett radiosänt tal 1930 (står även på hans gravsten):

  ”Wir müssen wissen. Wir werden wissen.”

  (”Vi måste få veta. Vi kommer att få veta.”)

Problem 1: Cantors problem om kontinuums mäktighet

Kontinuumhypotesen (CH) säger att det inte finns någon kardinalitet mellan $\mathrm{card}(\mathbf{N}) = \aleph_0$ och $\mathrm{card}(\mathbf{R}) = \mathfrak{c}$.

Med andra ord, en överuppräknelig delmängd av **R** (de reella talen, ”kontinuum”) måste ha samma kardinalitet (”mäktighet”) som **R**.

Är detta sant eller falskt?

- Kurt Gödel (1940):

  ZFC + CH är motsägelsefritt (om ZCF är det).

- Paul Cohen (1963):

  ZFC + icke-CH är också motsägelsefritt (om ZCF är det).

Dvs. CH är *oavgörbar* utifrån ZFC-axiomen!

ZF = Zermelo–Fraenkel, ett axiomsystem för mängdlära.

AC = urvalsaxiomet, *Axiom of Choice*.

ZFC = ZF + AC.

Problem 2: De aritmetiska axiomens motsägelsefrihet

Hilbert hade visat att hans geometriska axiom är motsägelsefria ifall de reella talen är motsägelsefria. Men hur är det med grundvalarna för aritmetiken egentligen?

- Kurt Gödel (1931):

  Det går inte att bevisa Peanoaritmetikens motsägelsefrihet inom Peanoaritmetiken själv.

- Gerhard Gentzen (1936):

  Men Peanoaritmetikens motsägelsefrihet kan bevisas om ”transfinit induktion upp till ordinaltalet ϵ_0” tillåts.

Problem 3: Volymlikheten hos två tetraedrar med samma basyta och höjd

Sats (Wallace–Bolyai–Gerwien):

> Ifall två **polygoner i planet** har **samma area**, så kan detta alltid visas genom ”pussling”, dvs. det går att klippa upp den ena i ändligt många delpolygoner som kan sättas ihop till den andra.

Gäller motsvarande även för **polyedrar i rummet** med **samma volym**?

- Max Dehn (1900): **Nej, det gäller inte.**

  T.ex. kan en regelbunden tetraeder **inte** delas i ändligt många delpolyedrar som går att pussla ihop till en kub.

(Även något så till synes enkelt som att härleda formeln för **volymen hos en pyramid** kräver alltså **uttömningsmetoden** eller **integration** eller någon motsvarande typ av gränsvärdesresonemang.)

Problem 8: Primtalsproblem

- **Riemannhypotesen**: Alla icketriviala komplexa nollställen till Riemanns ζ-funktion har realdel $\frac{1}{2}$.
- **Goldbachs förmodan**: Varje jämnt heltal ≥ 4 är summan av två primtal.
- Det finns oändligt många **primtalstvillingar**: $(3, 5)$, $(5, 7)$, $(11, 13)$, $(17, 19)$, $(29, 31)$, $(41, 43)$, $(59, 61)$, $(71, 73)$, $\ldots$

Är dessa påståenden sanna eller falska? Ännu okänt!

Vissa framsteg har dock gjorts nyligen angående primtalstvillingar:

- **Yitang Zhang** visade 2013 att det finns något (minsta) $k \leq 70\,000\,000$ sådant att det finns oändligt många primtal som skiljer sig med exakt k.
- Det internetbaserade samarbetsprojektet **Polymath8** (under ledning av **Terry Tao**) förbättrade detta till $k \leq 246$ året därpå.

  (Målet är förstås att komma ner till $k = 2$.)

Problem 10: Avgörande av lösbarheten hos en diofantisk ekvation

Mål: Hitta en procedur som avgör i ändligt många steg om ekvationen

$$p(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

där p är ett polynom vars koefficienter är heltal, har några lösningar som är heltal.

Flera decenniers samlade ansträngningar (Martin Davis, Julia Robinson, Hilary Putnam, Yuri Matiyasevich, m.fl.) utmynnade 1970 i ett bevis för att det **inte finns** någon sådan algoritm.

Mer om sådana **oberäkningsbara** problem i avsnittet om **Alan Turing** nedan.

(Constance Reid, syster till Julia Robinson, har f.ö. skrivit välkända biografier över David Hilbert, Richard Courant & Julia Robinson.)

Metamatematik

- **Hilberts program** var ett projekt för att bygga upp matematiken från grunden via axiom.
- Speciellt ville han via ”finitistiska” (okontroversiella) resonemang rättfärdiga även de av somliga kritiserade sätten att resonera om ”oändliga” eller ”transcendenta” objekt.
- Motivation: svårigheter inom bl.a. mängdlära.

  Russells paradox (1901) visade att man inte kan ta vilken egenskap som helst och bilda ”mängden av alla x som har denna egenskap”: ifall $M = \{x : x \notin x\}$ så gäller ju $M \in M$ om och endast om $M \notin M$, en motsägelse.
- Målet var en axiomatisk teori för hela matematiken, **motsägelsefri** och **fullständig** (dvs. varje påstående kan bevisas eller motbevisas).

Göttingen

- Hilbert fick en professur i Göttingen 1895.
- Hilbert och **Felix Klein** (1849–1925) gjorde Göttingen till ett ledande centrum för matematik, i klass med Paris och Berlin, med en otrolig massa kända matematiker.

  Hermann Minkowski, Richard Courant, Emmy Noether, Hermann Weyl, John von Neumann, Edmund Landau, Paul Bernays, Ernst Zermelo, Alonzo Church, Hugo Steinhaus, Carl Runge, Emanuel Lasker, m.fl.
- Göttingen var f.ö. även mycket framstående inom teoretisk fysik.

  Ludwig Prandtl, Peter Debye, Max Born, Werner Heisenberg, Wolfgang Pauli, Eugene Wigner, Pascual Jordan, Paul Ehrenfest, Edward Teller, Robert Oppenheimer, m.fl.
- Allt förstördes fullständigt 1933, då nazisterna avskedade alla judar. Många av forskarna flydde landet, ofta till USA eller Kanada.
- Hilbert blev kvar, och dog obemärkt 1943 under andra världskriget. Omvärlden fick kännedom om detta först flera månader efteråt.

Emmy Noether (1882–1935)

- Dotter till Max Noether, matematiker i Erlangen. Judisk familj.
- Tre yngre bröder med tragiska öden.

  (Mellanbrodern Fritz, också matematiker, flydde från nazisterna till Sovjetunionen 1937, men blev avrättad för ”antisovjetisk verksamhet” 1941.)
- Kvinnor hade ”inofficiellt” rätt att läsa på universitetet, om professorn för kursen gav sitt tillstånd. Läste matematik i Erlangen, och även en termin i Göttingen.
- Doktorerade 1907 för Gordan i Erlangen inom invariantteori av ”gammaldags” slag.

  (Gigantiska uträkningar av invarianter för ”ternära kvartiska former”, homogena polynom av grad 4 i 3 variabler.)

- *Habilitation* tilläts inte för kvinnor, så hon stannade i Erlangen och hjälpte sin far. Publicerade uppmärksammade matematiska arbeten.
- Kom till Göttingen 1915 (under första världskriget) för att hjälpa Hilbert med vissa invariantteoretiska frågor i speciella relativitetsteorin.
- Bevisade **Noethers sats** om sambandet mellan **rörelsekonstanter** och **symmetrier** i teoretisk mekanik.

  (Translationsinvariant system $\implies$ rörelsemängden bevaras, osv.)
- *Habilitation* 1919 och jobb som *Privatdozent*, efter lång kamp från Klein och Hilbert. Innan dess hade Hilbert låtit henne få föreläsa genom att annonsera hennes kurser under sitt eget namn.
- Gavs aldrig någon riktig tjänst vid universitetet. Fick hanka sig fram ända till 1933, då hon flyttade till USA.
- Jobb på Bryn Mawr College, ett college för kvinnor i Pennsylvania. Föreläste på Institute of Advanced Study i Princeton.
- Avled oväntat 1935 av komplikationer efter en tumöroperation.

- Emmy Noether var en pionjär inom modern **abstrakt algebra**, bl.a. **ringteori**.

- En **ring** är en algebraisk struktur där man kan addera, subtrahera och multiplicera, men inte nödvändigtvis dividera.

  T.ex. $\mathbf{Z}$ (ringen av heltal) eller $\mathbf{R}[x]$ (ringen av polynom i variabeln x, med reella koefficienter).

- Viktigt begrepp i ringteori: **ideal**.

  (Den moderna versionen av de ”ideala tal” som hade introducerats i talteori för att studera faktoriseringsproblem.)

- En **noethersk ring** är en ring där alla ideal är ”ändligt genererade”.

  Sådana ringar spelar en särskilt viktig roll.

- Den moderna versionen av **Hilberts bassats**:

  ”Om A är en noethersk ring så är polynomringen $A[x]$ det också.”

Kurt Gödel (1906–1978)

- Tidernas mest framstående logiker.
- Född i Brünn, Österrike–Ungern.

  Nuvarande Brno, Tjeckien.
- Hade bemästrat universitetsmatematiken redan när han gick ut gymnasiet.

  Det ryktades även att han inte hade gjort ett enda grammatikfel på latin under hela skoltiden!
- Började på universitetet i Wien 1923.
- Mest känd för:
  - **Gödels fullständighetssats** (doktorsavhandlingen 1930).
  - **Gödels ofullständighetssats** (1931, ibland uppdelad i ”första” och ”andra” ofullständighetssatsen).

  Mycket förvirrande, eftersom ordet ”fullständighet” här syftar på två helt olika saker!

- Flyttade till USA 1940 (Institute of Advanced Study, Princeton).
- Sägs ha varit en mycket märklig person, och svår att umgås med. Men han var bästis med Albert Einstein i Princeton!
- Led av hypokondri och (med åren tilltagande) paranoia.

  Trodde att någon ville förgifta honom, och litade bara på mat som hustrun lagat eller provsmakat. När hon hamnade på sjukhus vägrade han äta, och dog av undernäring. Vägde vid sin död 30 kg.

Matematisk logik (klassisk predikatlogik)

Formel = sträng av symboler, formad enligt vissa precisa **syntaxregler**.

Denna rappakalja-sträng är inte en formel:

$$x')\forall\neg f\exists\exists\vee y \qquad (\text{"syntax error"})$$

Men den här är okej:

$$\forall x\, \exists y\, (x + 5 < y)$$

De strängar som syntaxreglerna tillåter är precis ”sådana som är **tänkta att tolkas** som matematiska sant/falskt-påståenden”.

Men det man vill är att reducera matematiska resonemang till ren stränghantering, som ska kunna utföras av en ”ointelligent” maskin, som inte har någon kännedom om vad symbolerna ”betyder”.

Tolkning = specifikation av vad man menar med alla symboler.

Logiksymbolerna tolkas alltid på samma sätt:

$\wedge$	och	$\to$	medför
$\vee$	eller	$\leftrightarrow$	om och endast om
$\neg$	icke	$=$	är lika med

Vad gäller $\forall$ och $\exists$ måste man tala om vilken mängd M som åsyftas:

$\forall x$	"för alla $x \in M$ gäller ..."
$\exists y$	"för något $y \in M$ gäller ..."

Och man måste även ge mening åt övriga symboler:

- Vilket element i M syftar symbolen "5" på?
- Vilken funktion $M^2 \to M$ syftar symbolen "+" på?
- Vilken relation i M syftar symbolen "<" på, dvs. för vilka element a och b i M är predikatet "$a < b$" sant resp. falskt?

Givet en tolkning kommer varje formel att tilldelas ett sanningsvärde, **sant** (T) eller **falskt** (F).

Vår formel

$$\forall x \, \exists y \, (x + 5 < y)$$

gör en **sann** utsaga om vi exempelvis tolkar den som att den handlar om heltal (dvs. $M = \mathbf{Z}$) och låter symbolerna 5, +, < betyda det som de brukar betyda för heltal:

> ”För varje heltal x finns något heltal y sådant att x plus fem är mindre än y.”

Men den blir **falsk** ifall vi istället låter ”$a < b$” betyda att $a = b^2$:

> ”För varje heltal x finns något heltal y sådant att x plus fem är lika med y i kvadrat.”

En logisk **teori** fås genom att specificera vilka icke-logiska symboler som man tillåter i formlerna, samt tala om vilka formler som tas som **axiom**.

Man anger också vilka **slutledningssteg** som är tillåtna.

Varje sådant steg är en ren stränghanteringsoperation. Formlerna betraktas bara som strängar av symboler, och man opererar på dem enligt vissa strikt specifierade spelregler, utan att bry sig om symbolernas eventuella mening.

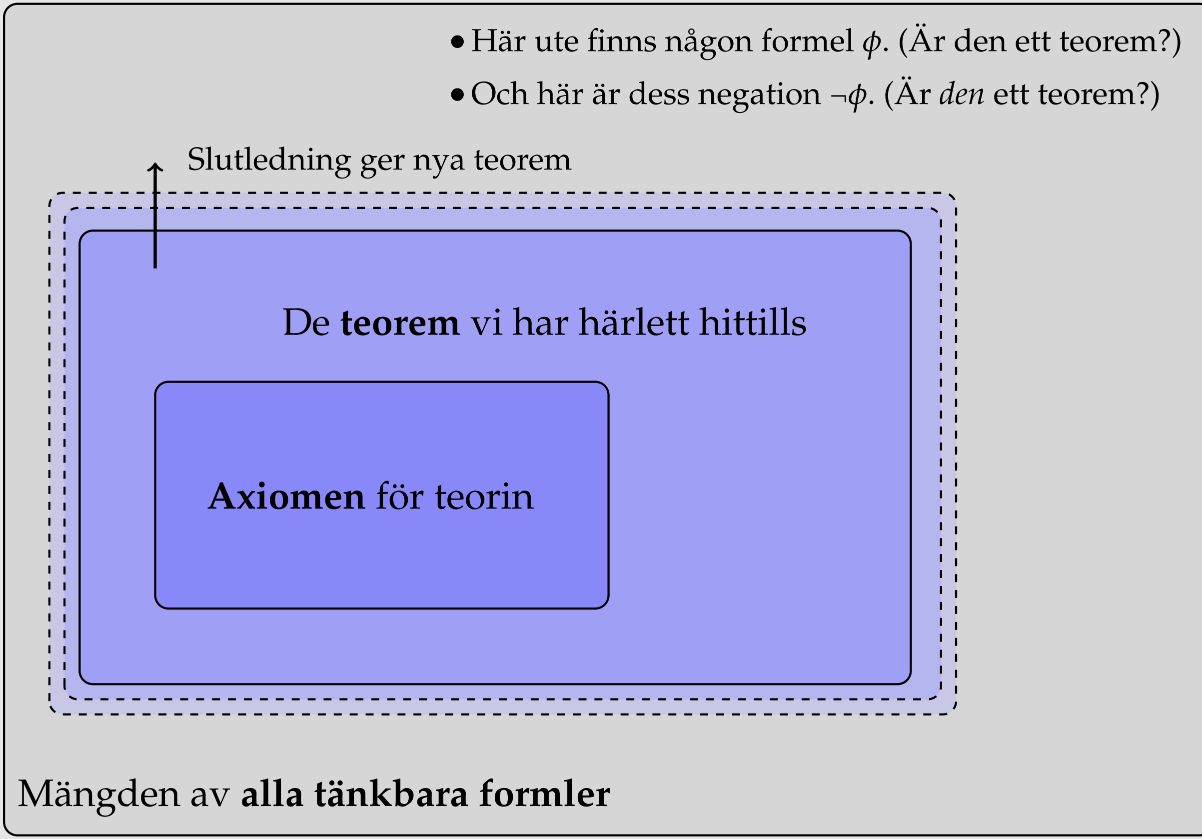
Ett **teorem** i en sådan teori är en formel som antingen själv är ett axiom, eller kan **härledas** från axiomen via ändligt många slutledningssteg.

Ett exempel på en tillåten slutledningsregel (som kallas **modus ponens**) är att om vi vet sedan tidigare att en viss formel med strukturen

$$[\text{någon formel } \phi] \to [\text{någon formel } \psi]$$

är ett teorem, och vi även känner till att formeln ϕ är ett teorem, så kan vi ur detta dra slutsatsen att även formeln ψ är ett teorem.

(”Från $\phi \to \psi$ och ϕ, härled ψ.”)


• Här ute finns någon formel ϕ. (Är den ett teorem?)
• Och här är dess negation $\neg\phi$. (Är *den* ett teorem?)
Slutledning ger nya teorem
De **teorem** vi har härlett hittills
Axiomen för teorin
Mängden av **alla tänkbara formler**

Slutledningsreglerna är konstruerade för att vara **logiskt sunda**, dvs. ”bevara sanning”:

> Om man gör en tolkning sådan att alla axiomen får sanningsvärdet **sant**, så kommer också alla härledda teorem i teorin att få sanningsvärdet **sant** i denna tolkning.

Gödels fullständighetssats handlar om ”semantisk fullständighet”.

Den säger att den klassiska predikatlogikens slutledningsregler även uppfyller omvändningen:

> Om en formel är en **semantisk konsekvens** av axiomen, dvs. om den är sann i varje tolkning som gör axiomen sanna, så är den också en **syntaktisk konsekvens** av axiomen, dvs. den går att härleda från dem via ändligt många slutledningssteg.

Gödels ofullständighetssats(er) handlar om ”negationsfullständighet”.

- En logisk teori kallas **(negations)fullständig** om det för varje formel ϕ går att härleda antingen ϕ eller dess negation $\neg\phi$. (Eller båda!)
- En logisk teori kallas **motsägelsefull** ifall det finns en formel ϕ sådan att både ϕ och dess negation $\neg\phi$ kan härledas.

  Ur motsägelsen $\phi \wedge \neg\phi$ kan man sedan härleda *vad som helst*, dvs. i en motsägelsefull teori blir *alla* formler teorem.

  (*Ex falso quodlibet*, ”från det falska (följer) vad som behagas”.)
- En **motsägelsefri** teori är (såklart) en teori som inte är motsägelsefull.

Kom ihåg Hilberts dröm: en logisk teori för hela matematiken, som kan bevisas vara motsägelsefri och negationsfullständig!

Första ofullständighetssatsen:

> En logisk teori som är ”tillräcklig för talteori” kan **inte** samtidigt vara både motsägelsefri och negationsfullständig.

En sådan teori, om den är motsägelsefri, måste alltså ha **oavgörbara** formler, dvs. formler ϕ sådana att **varken** ϕ eller $\neg\phi$ är teorem i denna teori.

(Det finns då någon tolkning sådan att axiomen och ϕ är sanna, och någon annan tolkning sådan att axiomen och $\neg\phi$ är sanna.)

Andra ofullständighetssatsen:

> Sådana teorier kan inte bevisa sin egen motsägelsefrihet.

Gödels ursprungliga bevis, som konstrerar en matematisk version av **lögnarparadoxen ”jag ljuger”**, är inte helt lättgenomträngligt!

Såhär beskrivs det av den svenske logikern **Torkel Franzén** (1950–2006) i boken *Gödel's Theorem. An Incomplete Guide to Its Use and Abuse*:

Gödel established the existence of such fixpoints by translating a statement that “says of itself that it has property P” into arithmetic. For this, he used a construction which in ordinary (or not so ordinary) language can be formulated as

> The result of substituting the quotation of “The result of substituting the quotation of x for ‘x’ in x has property P.” for ‘x’ in “The result of substituting the quotation of x for ‘x’ in x has property P.” has property P.

Senare har man hittat enklare argument via teorin för **beräkningsbarhet**. (T.ex. kan man använda lösningen av Hilberts tionde problem för att bevisa ofullständighetssatsen.)

Gödels arbete om ofullständighet har titeln *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme,* dvs. ”Om formellt oavgörbara satser i Principia Mathematica och besläktade system”.

Principia Mathematica är ett mastodontverk i tre volymer av **Bertrand Russell** (1872–1970) och **Alfred North Whitehead** (1861–1947) med syftet att lägga en axiomatisk grund för hela matematiken.

Ökänt för snårig notation! Efter c:a 360 sidor i volym 1 kommer följande passage:

$*54{\cdot}43$. $\vdash :. \alpha, \beta \in 1 . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$$\vdash . *54{\cdot}26 . \supset \vdash :. \alpha = \iota\text{‘}x . \beta = \iota\text{‘}y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . x \neq y .$$

$$[*51{\cdot}231] \qquad \equiv . \iota\text{‘}x \cap \iota\text{‘}y = \Lambda .$$

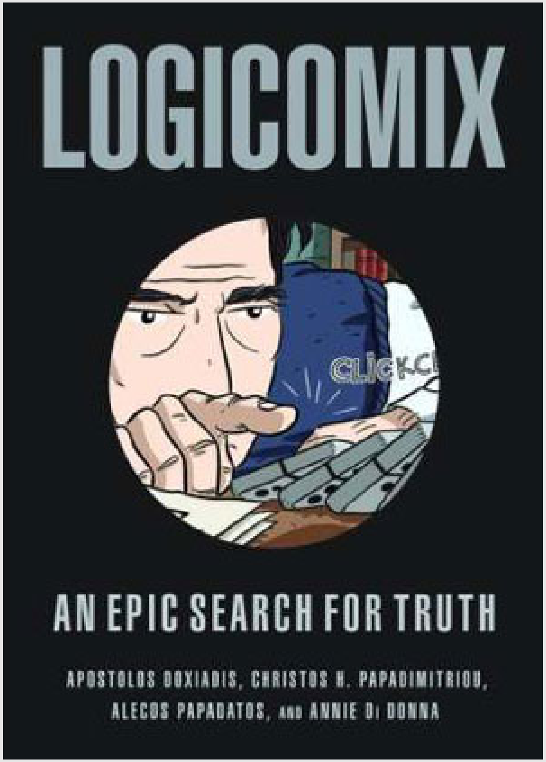
$$[*13{\cdot}12] \qquad \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (1)$$

$$\vdash . (1) . *11{\cdot}11{\cdot}35 . \supset$$

$$\vdash :. (\exists x, y) . \alpha = \iota\text{‘}x . \beta = \iota\text{‘}y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (2)$$

$$\vdash . (2) . *11{\cdot}54 . *52{\cdot}1 . \supset \vdash . \text{Prop}$$

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$.



I seriealbumet **Logicomix** (2008) kan man läsa mer om detta.

Bertrand Russell är huvudperson. Många andra filosofer och matematiker figurerar också.

(Historien har dock ”förbättrats” lite, t.ex. genom att låta vissa personer träffas i boken fastän de aldrig gjorde det i verkligheten. Och förklaringen av Gödels ofullständighetssats i appendix är helt fel.)

Alan Turing (1912–1954)

- Från London. Pionjär i teoretisk datavetenskap.
- Student och senare *fellow* vid King's College, Cambridge.
- Epokgörande arbete 1936 om Turingmaskiner.

  (”On Computable Numbers, with an Application to the *Entscheidungsproblem*”)
- Jobbade i Bletchley Park under andra världskriget och spelade en viktig roll i knäckandet av tyskarnas *Enigma*-krypto.

  Spelas av Benedict Cumberbatch i filmen *The Imitation Game* (2014).
- Dömdes 1951 för ”gross indecency” (homosexuella relationer) till kemisk kastrering.
- Död 1954 i hemmet av cyanidförgiftning (självmord?).
- Offentlig ursäkt från brittiska regeringen 2009.

  ”Alan Turing-lagen” från 2017 benådar retroaktivt alla sådana ”brott”.

Beräkningsbarhet

- Vad innebär det att kunna **beräkna** något?
- Vi räknar för hand genom att skriva och radera symboler på ett (rutat) papper. För teoretiska syften antar vi att vi har tillgång till obegränsat mycket papper och blyerts!
- En **Turingmaskin** är en teoretisk idealisering av sådan handräkning.

  En tänkt maskin som har en endimensionell rutad pappersremsa (av obegränsad längd) istället för ett tvådimensionellt pappersark.

  Maskinen kan läsa och skriva symboler på denna remsa, och gör detta enligt en förprogrammerad ändlig lista av instruktioner i stil med

  > ”om symbolen i nuvarande ruta är en trea, byt ut den mot en femma, flytta läshuvudet till nästa ruta till höger, och hoppa till instruktion nummer 15”.

- Det är allmänt accepterat (**Churchs tes**) att de (heltals)funktioner som kan anses ”möjliga att beräkna” är precis de som man kan programmera en Turingmaskin att räkna ut.

En modell som påminner mer om en vanlig dator, och som leder till samma klass av beräkningsbara funktioner som Turingmaskinen, är **registermaskinen**.

- En registermaskin har ett uppräkneligt antal register (minnesceller) $X_1, X_2, \ldots$ som vart och ett kan lagra ett naturligt tal.
- Ett program består av en ändlig följd av instruktioner av följande fyra typer:

  1. Nollställ X_k.
  2. Öka X_k med 1.
  3. Kopiera X_j till X_k.
  4. Om $X_i = X_j$, hoppa till instruktion nummer k i programmet.
     (Ta $i = j$ för att göra ett ovillkorligt hopp.)

  Förutom vid explicita hopp fortsätter man till nästa instruktion. Programmet terminerar om det inte finns någon mer instruktion (eller om man försöker hoppa till en instruktion som inte finns).
- Indata till programmet är det initiala innehållet i registren.
- Utdata är registrerinnehållet när programmet terminerar. (*Om* det terminerar!)

Givet ett program och ett heltal $n \geq 1$, definieras en funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ på följande sätt:

- För att få reda på vilket utdatavärde $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{N}$ som motsvarar vissa indata $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{N}^n$, sätt registren till $(x_1, \ldots, x_n, 0, 0, 0, \ldots)$ och kör programmet.
- Ifall programmet terminerar, tag det tal som då är i register X_1 och låt $f(x_1, \ldots, x_n)$ få detta värde.
- Ifall programmet **inte** terminerar, låt $f(x_1, \ldots, x_n)$ vara **odefinierat**.
- Definitionsmängden $D_f \subseteq \mathbf{N}^n$ består alltså av exakt de indata som gör att programmet terminerar.

Definition: En funktion

$$f\colon D_f \to \mathbf{N}, \qquad D_f \subseteq \mathbf{N}^n$$

kallas **beräkningsbar** om den ges av något registermaskinprogram på ovanstående sätt.

- Ett givet program definierar en viss funktion av n variabler för varje $n \geq 1$. Men flera olika program kan naturligtvis beräkna samma funktion.

- Hur som helst är antalet program uppräkneligt, och därmed är också antalet beräkningsbara funktioner uppräkneligt.

- Däremot är redan antalet funktioner $f \colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ överuppräkneligt, enligt Cantors diagonalargument, så ”de flesta” funktioner är **inte** beräkningsbara.

  (Givet en lista av funktioner $(f_0, f_1, \ldots)$ så kommer $g(k) = f_k(k) + 1$ att definiera en funktion g som inte är med på listan, eftersom den skiljer sig från varje f_k på minst ett ställe.)

- Jaha, det finns alltså massor av funktioner som inte går att beräkna. Kan man hitta något **explicit exempel**?

- Ja, Turing gav ett sådant exempel (se nästa sida), med en intressant teoretisk konsekvens.

  Säg att man sitter och väntar på ett program som man har kört igång. Då kan man (i allmänhet) inte veta ifall det kommer att bli färdigt snart, eller om 10^{100} år, eller aldrig.

  Tänk vad praktiskt om man kunde skriva ett program som kan analysera andra program och *i förväg* avgöra om de kommer att terminera eller gå in i en evig loop.

  Vad Turing visade var att detta är omöjligt!

- Ett **predikat** $P(x_1, \ldots, x_n)$ är en funktion som bara kan anta värdena **falskt** eller **sant** (dvs. talen 0 resp. 1), och som är definierad för alla indata.

- Eftersom antalet program är uppräkneligt kan vi ge varje program ett nummer, och sedan definiera följande predikat:

  $\textsc{halt}(x,y)$ = program nummer x terminerar när det körs med indata y.

- **Sats (Turing):** Predikatet $\textsc{halt}$ är **inte** en beräkningsbar funktion.

  Bevis: Låt $P(x,y)$ vara ett godtyckligt **beräkningsbart** predikat, och sätt

  $$g_P(x) = \begin{cases} 0, & \text{om } P(x,x) \text{ är falskt,} \\ \text{odef. (dvs. evig loop),} & \text{om } P(x,x) \text{ är sant.} \end{cases}$$

  Denna funktion är beräkningsbar; vi kan lätt skriva ett program för g_P givet ett program som beräknar P. Säg att detta program för g_P har nummer M_P i vår uppräkning av alla program. Definitionen av $g_P(x)$ med $x = M_P$ insatt säger att om $P(M_P, M_P)$ är falskt så kommer program nummer M_P att terminera när det körs med indata M_P, och om $P(M_P, M_P)$ är sant så kommer det inte att terminera. Med andra ord: $P(M_P, M_P)$ är sant om och endast om $\textsc{halt}(M_P, M_P)$ är falskt, så $\textsc{halt} \neq P$. Eftersom $\textsc{halt}$ är skilt från varje beräkningsbart predikat måste det vara oberäkningsbart.

  (Cantors diagonalargument igen!)

- Turing var även intresserad av matematisk biologi mot slutet av sitt liv.

- Han upptäckte fenomenet **diffusiv instabilitet** (även kallat **Turing-instabilitet**). Har bl.a. använts för att ge en (spekulativ) förklaring av varför prickiga djur ofta har randiga svansar, men nästan aldrig tvärtom!

Diffusion är en effekt som vanligen **stabiliserar**, dvs. utjämnar koncentrationsskillnader på olika ställen i rummet, men ifall man har två olika substanser som reagerar med varandra, och de har olika diffusionshastighet, så kan närvaron av diffusion (under vissa förutsättningar) faktiskt bidra till att **instabilisera** en situation som vore stabil i frånvaron av diffusion; störningar av viss våglängd förstärks istället för att släckas ut.

Om det är så att pälsens pigmentfärg avgörs av koncentrationen hos någon (hypotetisk) kemikalie under fosterstadiet, så kan diffusiv instabilitet göra att koncentrationen av denna kemikalie inte är jämn, utan ”går i vågor”.

Och på en stor kroppsyta finns det plats för vågor att gå både i x-led och i y-led, vilket ger ett prickigt interferensmönster, men i en smal svans har vågorna bara plats att gå längs med, så då blir det randigt!

Ramanujan (1887–1920)

- Låt oss backa lite i tiden, till den kanske märkligaste matematikern någonsin!

- Uppvuxen i vad som nu är delstaten Tamil Nadu i sydöstra Indien.

- Hans namn är rätt och slätt Ramanujan, ”lillebror till guden Rama”.

  För att skilja från andra med samma namn brukade man ange faderns initial: ”S. Ramanujan” från faderns namn ”Srinivasa”.

  Ibland anges även Iyengar, som är en kastbeteckning: ”Srinivasa Ramanujan Iyengar”.

- Huvudsakligen självlärd, från *A Synopsis of Elementary Results in Pure and Applied Mathematics* (1880) av G. S. Carr, en gigantisk formelsamling som han fått tag i på biblioteket.

- Kuggade i allt utom matematik i college, och kom därför inte in på universitetet.
- Försörjde sig med att jobba med bokföring, och arbetade med sin matematik på fritiden.
- Försökte kontakta några engelska matematiker, men fick inget napp förrän han 1913 skrev till **G. H. Hardy** (1877–1947), analytiker och talteoretiker i Cambridge, och bifogade några sidor med smakprov på de resultat han funnit (utan några bevis).
- Hardy beskriver det hela i en minnesartikel publicerad 1937 i *The American Mathematical Monthly*:

  Ramanujan's letters to me, which are reprinted in full in the *Papers*, contain the bare statements of about 120 theorems, mostly formal identities extracted from his note-books. I quote fifteen which are fairly representative. [...]

$$(1)\qquad 1-\frac{3!}{(1!2!)^3}x^2+\frac{6!}{(2!4!)^3}x^4-\cdots$$
$$=\left(1+\frac{x}{(1!)^3}+\frac{x^2}{(2!)^3}+\cdots\right)\left(1-\frac{x}{(1!)^3}+\frac{x^2}{(2!)^3}-\cdots\right)$$

(7) If $\alpha\beta = \pi^2$, then

$$\alpha^{-1/4}\left(1 + 4\alpha \int_0^\infty \frac{x\, e^{-\alpha x^2}}{e^{2\pi x} - 1}\, dx\right) = \beta^{-1/4}\left(1 + 4\beta \int_0^\infty \frac{x\, e^{-\beta x^2}}{e^{2\pi x} - 1}\, dx\right)$$

(12)
$$\frac{1}{1 + \cfrac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1 + \cfrac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{1 + \cdots}}} = \left(\frac{\sqrt{5}}{1 + \sqrt[5]{5^{3/4}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5/2} - 1}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) e^{2\pi/\sqrt{5}}$$

I should like you to begin by trying to reconstruct the immediate reactions of an ordinary professional mathematician who receives a letter like this from an unknown Hindu clerk.

The first question was whether I could recognize anything. I had proved things rather like (7) myself. [...]

The series formulas (1)–(4) [...] are much harder than they look. [...]

[...] but (10)–(12) defeated me completely; I had never seen anything in the least like them before. A single look at them is enough to show that they could only be written down by a mathematician of the highest class. They must be true because, if they were not true, no one would have had the imagination to invent them.

- Hardy lyckades, med hjälp av sin kollega **E. H. Neville** (1889–1961) som 1914 var i Madras och föreläste, övertala Ramanujan att komma till Cambridge.

  (Att åka utomlands var ”förorenande” och Ramanujan riskerade att bli betraktad som kastlös vid hemkomsten.)

- Ramanujan arbetade där ihop med Hardy och dennes parhäst **John Edensor Littlewood** (1885–1977).

  Det var inte helt enkelt för dem att förstå hur han tänkte. . . Enligt Ramanujan kom gudinnan Namagiri till honom i drömmen och gav honom formlerna!

  As Littlewood says “the clear-cut idea of what is *meant* by a proof, nowadays so familiar as to be taken for granted, he perhaps did not possess at all; if a significant piece of reasoning occurred somewhere, and the total mixture of evidence and intuition gave him certainty, he looked no further”.

- Notis i Svenska Dagbladet 1 maj 1914:

  Ett matematiskt geni. Vid Cambridges universitet väcker för närvarande en ung hindu Ramanujan stort uppseende, då han utan någon högre utbildning kan lämna prof på djupa insikter i matematiken. Han härstammar från Madras och är 26 år gammal. Den unge mannen har endast fått den i Indien vanliga skolutbildningen och har aldrig studerat vid universitetet i Madras. Ända till för ett par år sedan innehade han en anspråkslös kontorsplats.

  För ett och ett halft år sedan skref Ramanujan till en professor i Cambridge, omtalade sina matematiska studier och sände honom en del lösningar af problem, som särskildt berörde talteorien och de elliptiska funktionerna. Många af lösningarna voro alldeles nya, andra voro redan funna, utan att den unge hinduen kände till det. Han har endast mycket ringa kunskap om den moderna matematiken och om de senaste trettio årens arbeten på detta område, men har på egen hand uppnått resultat, som de stora matematikerna under de senaste århundradena uppnått.

  Nu har Ramanujan kommit till England för att bringa sin genialiska begåfning till full utveckling genom systematiska studier. Medan han redan sysselsatt sig med de högsta problemen och funnit egna lösningar, står han i elementerna tillbaka för de yngsta studenterna. När han afslutat sina studier, tror man sig kunna vänta stora ting af honom.

- Ramanujan hade haft hälsoproblem redan i Indien, och blev sjuk igen 1917. Förvärrat av vitaminbrist, eftersom det var svårt att få tag i bra vegetarisk mat i krigstidens Cambridge.

  He was an orthodox high-caste Hindu, and always adhered (indeed with a severity most unusual in Indian residents in England) to all the observances of his caste. He had promised his parents to do so, and he kept his promises to the letter. He was a vegetarian in the strictest sense – this proved a terrible difficulty later when he fell ill – and all the time he was in Cambridge he cooked all his food himself, and never cooked it without first changing into pyjamas.

- Invaldes 1918 som *fellow* både i Royal Society och Trinity College.
- Tillbringade flera år på olika sjukhem i England. Återvände till Indien i mars 1919, och avled i april 1920.

- Ramanujan publicerade en hel del, men efterlämnade också mycket opublicerat material som senare matematiker har analyserat.

  Ramanujan's Notebooks, 5 volymer (1985–98).

  Ramanujan's Lost Notebook, 4 volymer (2005–13).

  (Redigerade av Bruce C. Berndt, en amerikansk analytisk talteoretiker.)

- En stor del av hans formler är återupptäckter av tidigare resultat (okända för honom pga. bristande utbildning), medan annat är fullständigt originellt och unikt.

  En del är också fel, särskilt inom talteori, där man lätt kan bli lurad av exempel. (Det minsta motexemplet kan vara astronomiskt stort.)

- I filmen *The Man Who Knew Infinity* (2015) spelas Ramanujan av Dev Patel och G. H. Hardy av Jeremy Irons.

Paul Erdős (1913–1996)

Paul Erdős med en tioårig **Terence Tao** (f. 1975) från Australien (”matematikens Mozart”, Fieldsmedaljen 2006).

- Mycket produktiv och excentrisk ungersk matematiker.
- Publicerade över 1500 artiklar, med över 500 medförfattare, som sägs ha **Erdőstal 1** (eller ibland $\frac{1}{n}$ om de har n gemensamma artiklar med Erdős); deras medförfattare har sedan **Erdőstal 2**, osv.
- Mest aktiv inom diskret matematik (kombinatorik, grafteori, talteori, diskret sannolikhetslära).

  Älskade att lösa problem och formulera hypoteser. Samt utlysa penningbelöningar för lösningar!

- Utbildad i Ungern. Postdoc i Cambridge 1934.
- Flydde till USA 1938 (han var av judisk familj).
- Diverse tillfälliga jobb. Nekades återinträde till USA 1954 efter en konferensresa till Europa.
- Inledde då en kringresande livsstil utan fast hem, som fortsatte resten av hans liv.
- Knackade på hos matematiker som han kände, och förkunnade:

  –My brain is open!

  Jobbade med dem så länge de stod ut med att han bodde där, och reste sedan vidare till någon annan.

  –Another roof, another proof!

- Kunde jobba långa perioder i sträck, med hjälp av stora doser starkt kaffe och *Benzedrine* (amfetamin!).
- Följande aforism av kollegan **Alfréd Rényi** (1921–1970) tillskrivs ofta felaktigt Erdős:

> A mathematician is a machine for turning coffee into theorems.

- Erdős: Amerikanskt blaskigt kaffe duger dock bara till lemman!
- Och här är ett annat berömt skämt, den kategoriteoretiskt duala versionen:

> A comathematician is a machine for turning co-theorems into ffee.

- Erdős var prestigelös för det mesta.

  Dock inblandad in en berömd kontrovers med norrmannen **Atle Selberg** (1917–2007) angående upptäckten 1949 av ett elementärt bevis (dvs. utan komplex analys) av **primtalssatsen**:

  Antalet primtal $\leq n$ är ungefär $n/\ln n$.

  (Kvoten mellan de båda storheterna går mot 1 då $n \to \infty$.)

Liten ordlista över ”erdősiska”

epsilon	barn
noise	musik
poison	alkohol
get captured	gifta sig
bosses	hustrur
slaves	makar
trivial beings	icke-matematiker
dead	har slutat med matematik
preach	föreläsa
Sam & Joe	USA (onkel Sam) & Sovjetunionen (Josef Stalin)
on the long wavelength	kommunist (dvs. röd)
study Jordan's theorem	sitta i fängelse
SF (the Supreme Fascist)	Gud
The Book	Guds bok med de optimala bevisen

(”You don't have to believe in God, but you should believe in The Book.”)

”Nicolas Bourbaki”

- Pseudonym för en grupp franska matematiker:

  André Weil (1906–1998)
  Jean Dieudonné (1906–1992)
  Henri Cartan (1904–2008)
  m.fl.

- Grundades 1934 i Paris.

- Producerade bokserien *Éléments de mathématique*, med målet att täcka alla huvudområden i modern matematik på ett grundligt, axiomatiskt och abstrakt sätt.

  (Efter ett långt uppehåll återupptogs aktiviteten, och den senast utgivna boken kom 2019.)

- Inflytelserika vad gäller notation och terminologi.

Alexander Grothendieck (1928–2014)

- Legendarisk matematiker i den abstrakta Bourbaki-traditionen, något av en Messias-gestalt i vissa kretsar.
- Född i Berlin. Föräldrarna anarkister som flydde från nazisterna till Paris 1933.
- Lämades hos en bekant i Hamburg, kom till Paris 1938.
- Fadern (jude) utlämnades av Vichy-regimen till tyskarna och dog i Auschwitz. Även Alexander och hans mor satt i diverse fångläger.
- Studier på olika franska universitet efter kriget. En period i USA.
- 1958 jobb på IHÉS (Institut des hautes études scientifiques), nyligen grundat forskningsinstitut söder om Paris.

  Intensiv seminarieverksamhet med många hängivna ”lärjungar”.

- Verksam inom algebraisk geometri, talteori, m.m.

  I algebraisk geometri spelar **polynomringar** en viktig roll, och i algebraisk talteori studerar man **talringar**.

  Grothendiecks teori för **scheman** förenar dessa ämnen på ett sätt som gör att man kan föra geometriska resonemang i talteori, och har revolutionerat grundvalarna för den algebraiska geometrin.

  (Och detta är bara en av hans otroligt många nyskapande idéer.)

- Extremt abstakt, men också extremt vackert, säger de som förstår!

  Enligt **Pierre Deligne**, känd belgisk matematiker, består ett typiskt Grothendieck-bevis av en lång serie triviala steg där inget verkar hända, men där det ändå på slutet uppstår ett djupt icke-trivialt resultat.

  Grothendieck har själv liknat sitt angreppssätt vid att knäcka en nöt genom att låta den ligga i blöt i vatten tills tiden är mogen och man kan skala den som en avokado.

- Legenden om ”Grothendieck-primtalet”

  Någon bad honom en gång att exemplifiera ett abstrakt påstående genom att förklara vad det ville säga för något konkret primtal.

  Grothendieck: ”Nåväl, ta t.ex. 57…”

- Politisk aktivist (pacifist).
- Fieldsmedaljen 1966. Accepterade utnämningen, men vägrade åka till matematikerkongressen i Moskva för att ta emot medaljen.
- Föreläste i Hanoi mitt under USA:s bombningar 1967, i protest mot Vietnamkriget.
- Sade upp sig från IHÉS c:a 1970.

  (Protesterade mot finansiering från militären. Kanske utarbetad också?)
- Återvände som professor i Montpellier efter några år, men publicerade inte så mycket konventionell matematik därefter.

  (Självbiografi, programförklaringar, mysticism, ...)
- Flyttade 1991 till hemlig ort i Pyrenéerna i södra Frankrike, där han bodde till sin död 2014, nästan helt utan kontakt med omvärlden.

John Horton Conway (1937–2020)

- Brittisk matematiker, i Cambridge till 1987, därefter Princeton (USA).
- Ägnade en stor del av sin karriär åt att sitta i allrummet på jobbet och spela spel…

  Med fullständigt häpnadsväckande resultat!

- Biografi *Genius at Play* (2015) av Siobhan Roberts.

  "An unabashed original, John Horton Conway is Archimedes, Mick Jagger, Salvador Dalí, and Richard Feynman all rolled into one – a singular mathematician with a rock star's charisma, a sly sense of humor, a polymath's promiscuous curiosity, and a burning desire to explain everything about the world to everyone in it."

Några av Conways påhitt

- **Game of Life**, en s.k. *cellulär automat*.

  (Blev en stor fluga pga. Martin Gardner, *Scientific American*, okt 1970.)

  Äger rum på ett oändligt stort kvadratiskt rutnät, där varje ruta (cell) kan vara antingen ”levande” eller ”död”. Vid varje tidssteg händer följande:

  - Levande cell överlever omm den har exakt 2 eller 3 levande grannar (av 8).
  - Död cell blir levande omm den har exakt 3 levande grannar.

  Ange en startkonfiguration, sätt igång, och se vad som händer! [copy.sh/life]

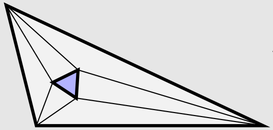
  (Game of Life är **Turingfullständigt**, dvs. kan beräkna allt som en Turingmaskin kan beräkna!)

- Det **surrella talsystemet** (via **kombinatorisk spelteori**).
- **Conwaygrupperna**, några av de ”sporadiska” exemplen i klassifikationen av **enkla ändliga grupper**.

  Namngav även den allra största sporadiska gruppen, **The Monster Group**, med 808 017 424 794 512 875 886 459 904 961 710 757 005 754 368 000 000 000 element. (Symmetrigruppen för den 196884-dimensionella Griess-algebran.)

  Upptäckaren Robert Griess hade kallat gruppen för **The Friendly Giant**, men Conways namnförslag hade bättre genomslagskraft!

- Smart **notation** för diverse saker.
  - De 17 symmetrigrupperna i planet, som beskriver ”möjliga typer av tapetmönster”, samt motsvarande grupper i sfärisk och hyperbolisk geometri.
    (Föreläste om detta vid LiU 1995, sal C1, på föreläsningsturné i KVA:s regi.)
  - Knutar och ”trassel” (*tangles*).
  - Polyedrar.
  - Gigantiska heltal (Conways pilnotation).
- Beviset från *The Book* för **”Morleys mirakel”**.



Där trisektriserna i en triangel möts bildas en **liksidig** triangel.

- **FRACTRAN**, ännu ett Turingfullständigt programmeringsspråk.

  Conway: ”Man kan lära sig hela dess syntax på 10 sekunder.”

  – Ett FRACTRAN-program består av en ändlig lista av positiva bråk.
  – Indata: ett positivt heltal n.
  – Ett programsteg består i att uppdatera n, genom att ta det första bråket Q i listan för vilket nQ är ett heltal, och byta ut n mot detta heltal.
    (Programmet terminerar ifall det inte finns något sådant bråk Q.)

  Exempel: Om man kör programmet

$$\left(\frac{17}{91}, \frac{78}{85}, \frac{19}{51}, \frac{23}{38}, \frac{29}{33}, \frac{77}{29}, \frac{95}{23}, \frac{77}{19}, \frac{1}{17}, \frac{11}{13}, \frac{13}{11}, \frac{15}{2}, \frac{1}{7}, \frac{55}{1}\right)$$

  med startvärdet $n = 2$ så får man successivt

$$n = 15, 825, 725, 1925, 2275, 425, 390, 330, 290, 770, \ldots,$$

  och om man från denna följd sållar bort alla tal som inte är tvåpotenser får man kvar (i tur och ordning) tvåpotenserna

$$2^2, 2^3, 2^5, 2^7, 2^{11}, 2^{13}, 2^{17}, 2^{19}, 2^{23}, \ldots$$

  Primtalen!

- **Conways domedagsalgoritm** ger veckodagen för ett givet datum.

  Domedagen för ett givet år är **sista februari**. Följande datum detta år infaller på **samma veckodag som domedagen**:

  $$^{4}/_{4} \quad ^{6}/_{6} \quad ^{8}/_{8} \quad ^{10}/_{10} \quad ^{12}/_{12} \qquad \underbrace{^{9}/_{5} \quad ^{5}/_{9} \qquad ^{7}/_{11} \quad ^{11}/_{7}}_{\text{"Jobba 9 till 5 på 7-Eleven."}}$$

  Sista januari är också samma veckodag, eftersom februari är exakt fyra veckor, utom vid skottår. Och **första mars** är en dag efter.

  Domedagen för år **1900** var en **onsdag** ("we-in-this-day").

  Domedagen för år **2000** var en **tisdag** ("two's-day").

  Vart år avancerar domedagen **ett steg**, plus **ett extra steg** vart fjärde år pga. skottår (förutom att årtal delbara med 100 inte är skottår, förutom att de *är* det ifall de är delbara med 400).

  På fyra år blir det $1 + 1 + 1 + 2 =$ **fem steg framåt** (= **två steg bakåt**).

  Och på tolv år blir det $3 \cdot 5 = 14 + 1$ steg, alltså **ett steg framåt**.

Exempel: Min födelsedag, **15 april 1970**.

- Utgå från år 1900. Vi vet att domedagen det året var en **onsdag**.
- Ta **fem stycken 12-årsskutt** för att komma till 1960.
  Domedagen flyttas **fem steg framåt** (ett steg per skutt).
- Ta **två stycken 4-årsskutt** för att komma till 1968.
  Domedagen flyttas **fyra steg bakåt** (två steg bakåt per skutt).
- Ta **två stycken 1-årsskutt** för att komma till 1970.
  Domedagen flyttas **två steg framåt** (ett steg per skutt).
- Sammanlagt alltså **tre steg framåt** från **onsdag**, så domedagen år 1970 var en **lördag**.
- Därmed var även 4 april 1970 en **lördag**.
- Från 4 till 15 april är det $11 = 7 + 4$ dagar, alltså var 15 april 1970 en **lördag** + 4 = **onsdag**.
- Jag är alltså född på en **onsdag**.

- Hur är denna följd bildad?

$$
\begin{array}{c}
1 \\
11 \\
21 \\
1211 \\
111221 \\
312211 \\
13112221 \\
1113213211 \\
31131211131221 \\
13211311123113112211 \\
\vdots
\end{array}
$$

”The look-and-say sequence”

1	”en etta”
11	”två ettor”
21	”en tvåa & en etta”
1211	”en etta & en tvåa & två ettor”
111221	”tre ettor & två tvåor & en etta”
312211	osv.
13112221	
1113213211	
31131211131221	
13211311123113112211	
⋮	

Analyseras i Conways artikel

The Weird and Wonderful Chemistry of Audioactive Decay

publicerad 1986 i studenttidningen *Eureka* i Cambridge.

1

11

21

1211

111221

312211

13112221

1113**2**	**13211**
31131**2**	11131221
132113111**2**	3113112211
1113122113311**2**	**13211**3212221
311311222123211**2**	111312211312113211
132113213211121312211**2**	311311222113111221131221
⋮	⋮

Strängen $S = 1113213211$ består av delsträngar $L = 11132$ och $R = 13211$ vars ”avkomlingar” ej påverkar varandra i senare steg. Notation:

$$S = L.R = 11132.13211$$

Odelbara strängar kallas för **atomer**, t.ex. L och R från förra sidan:

- Hf = 11132 (hafnium, atomnummer 72).
- Sn = 13211 (tenn, atomnummer 50).

I nästa steg omvandlas dessa atomer via **audioaktivt sönderfall**:

- Hf $\longrightarrow$ Lu = 311312 (lutetium, atomnummer 71).
- Sn $\longrightarrow$ In = 11131221 (indium, atomnummer 49).

Lutetium sönderfaller sedan, i tur och ordning, till

- Yt = 1321131112 (ytterbium, atomnummer 70)
- Tm = 11131221133112 (tulium, atomnummer 69)
- Er.Ca.Co = 311311222.12.32112 som består av atomerna
  - Er = 311311222 (erbium, atomnummer 68)
  - Ca = 12 (kalcium, atomnummer 20)
  - Co = 32112 (kobolt, atomnummer 27)

Och så vidare…

Den kosmologiska satsen:

Om man börjar med vilken sträng som helst som bara innehåller siffrorna 1, 2, 3, så kommer den efter ändligt många steg enbart att innehålla atomer från det ”periodiska systemet”:

The Periodic Table. (Uranium to Silver)

abundance:-	n	E_n	E_n inside the derivate of E_{n+1} :
102.56285249	92	U	3
9883.5986392	91	Pa	13
7581.9047125	90	Th	1113
6926.9352045	89	Ac	3113
5313.7894999	88	Ra	132113
4076.3134078	87	Fr	1113122113
3127.0209328	86	Rn	311311222113
2398.7998311	85	At	Ho.1322113
1840.1669683	84	Po	1113222113
1411.6286100	83	Bi	3113322113
1082.8883285	82	Pb	Pm.123222113
830.70513293	81	Tl	111213322113
637.25039755	80	Hg	31121123222113
488.84742982	79	Au	132112211213322113
375.00456738	78	Pt	111312212221121123222113
287.67344775	77	Ir	3113112211322112211213322113
220.68001229	76	Os	1321132122211322212221121123222113
169.28801808	75	Re	111312211312113221133211322112211213322113
315.56655252	74	W	Ge.Ca.312211322212221121123222113
242.07736666	73	Ta	13112221133211322112211213322113
2669.0970363	72	Hf	11132.Pa.H.Ca.W
2047.5173200	71	Lu	311312
1570.6911808	70	Yb	1321131112
1204.9083841	69	Tm	11131221133112
1098.5955997	68	Er	311311222.Ca.Co
47987.529438	67	Ho	1321132.Pm
36812.186418	66	Dy	111312211312
28239.358949	65	Tb	3113112221131112
21662.972821	64	Gd	Ho.13221133112
20085.668709	63	Eu	1113222.Ca.Co
15408.115182	62	Sm	311332
29820.456167	61	Pm	132.Ca.Zn
22875.863883	60	Nd	111312
17548.529287	59	Pr	31131112
13461.825166	58	Ce	1321133112
10326.833312	57	La	11131.H.Ca.Co
7921.9188284	56	Ba	311311
6077.0611889	55	Cs	13211321
4661.8342720	54	Xe	11131221131211
3576.1856107	53	I	311311222113111221
2743.3629718	52	Te	Ho.1322113312211
2104.4881933	51	Sb	Eu.Ca.3112221
1614.3946687	50	Sn	Pm.13211
1238.4341972	49	In	11131221
950.02745646	48	Cd	3113112211
728.78492056	47	Ag	132113212221

The Periodic Table. (Palladium to Hydrogen)

abundance:-	n	E_n	E_n inside the derivate of E_{n+1} :
559.06537946	46	Pd	111312211312113211
428.87015041	45	Rh	311311222113111221131221
328.99480576	44	Ru	Ho.132211331222113112211
386.07704943	43	Tc	Eu.Ca.311322113212221
296.16736852	42	Mo	13211322211312113211
227.19586752	41	Nb	1113122113322113111221131221
174.28645997	40	Zr	Er.12322211331222113112211
133.69860315	39	Y	1112133.H.Ca.Tc
102.56285249	38	Sr	3112112.U
78.678000089	37	Rb	1321122112
60.355455682	36	Kr	11131221222112
46.299868152	35	Br	3113112211322112
35.517547944	34	Se	13111321222113222112
27.246216076	33	As	11131221131211322113322112
1887.4372276	32	Ge	31131122211311122113222.Na
1447.8905642	31	Ga	Ho.13221133122211331
23571.391336	30	Zn	Eu.Ca.Ac.H.Ca.312
18082.082203	29	Cu	131112
13871.124200	28	Ni	11133112
45645.877256	27	Co	Zn.32112
35015.858546	26	Fe	13122112
26861.360180	25	Mn	111311222112
20605.882611	24	Cr	31132.Si
15807.181592	23	V	13211312
12126.002783	22	Ti	11131221131112
9302.0974443	21	Sc	3113112221133112
56072.543129	20	Ca	Ho.Pa.H.12.Co
43014.360913	19	K	1112
32997.170122	18	Ar	3112
25312.784218	17	Cl	132112
19417.939250	16	S	1113122112
14895.886658	15	P	311311222112
32032.812960	14	Si	Ho.1322112
24573.006696	13	Al	1113222112
18850.441228	12	Mg	3113322112
14481.448773	11	Na	Pm.123222112
11109.006821	10	Ne	111213322112
8521.9396539	9	F	31121123222112
6537.3490750	8	O	132112211213322112
5014.9302464	7	N	111312212221121123222112
3847.0525419	6	C	3113112211322112211213322112
2951.1503716	5	B	1321132122211322212221121123222112
2263.8860325	4	Be	111312211312113221133211322112211213322112
4220.0665982	3	Li	Ge.Ca.312211322212221121123222112
3237.2968588	2	He	13112221133211322112211213322112
91790.383216	1	H	Hf.Pa.22.Ca.Li

Alla **exotiska grundämnen** som inte är med i periodiska systemet, t.ex. de sju första strängarna i standardföljden som börjar med ”1”, försvinner alltså ändligt många steg efter ”Big Bang”!

Man kan spela samma spel med strängar $n_1 n_2 \ldots n_k$ av godtyckliga positiva heltal (inte bara 1, 2, 3).

Ett tal $n \geq 4$ kan dock aldrig uppkomma spontant genom audioaktivt sönderfall, och om ett sådant tal är med i strängen från början kommer man aldrig att bli av med det.

I detta fall finns det också i det periodiska systemet två ”transuraner” som förekommer i olika ”isotoper”, en isotop för varje tal $n \geq 4$:

- ${}^{n}\mathrm{Np} = 1311222113321132211221121332211n$
  (neptunium, atomnummer 93)
- ${}^{n}\mathrm{Pt} = 312211322212221121123222 11n$
  (plutonium, atomnummer 94)

Sönderfall:

$$ {}^{n}\mathrm{Pt} \longrightarrow {}^{n}\mathrm{Np} \longrightarrow 11132.13.22.12.{}^{n}\mathrm{Pt} = \mathrm{Hf.Pa.H.Ca.}{}^{n}\mathrm{Pt} $$

Strängens längd växer exponentiellt (utom om man startar med ”22”).

Mer exakt: om s_n är strängens längd efter n steg, så är

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = \lambda$$

där **Conways konstant**

$$\lambda = 1{,}303577269034296391257099 11\ldots$$

är det enda positiva nollstället till polynomet

$$\begin{aligned}
p(x) = {} & x^{71} - x^{69} - 2x^{68} - x^{67} + 2x^{66} + 2x^{65} + x^{64} - x^{63} - x^{62} - x^{61} - x^{60} - x^{59} + 2x^{58} \\
& + 5x^{57} + 3x^{56} - 2x^{55} - 10x^{54} - 3x^{53} - 2x^{52} + 6x^{51} + 6x^{50} + x^{49} + 9x^{48} - 3x^{47} \\
& - 7x^{46} - 8x^{45} - 8x^{44} + 10x^{43} + 6x^{42} + 8x^{41} - 5x^{40} - 12x^{39} + 7x^{38} - 7x^{37} + 7x^{36} \\
& + x^{35} - 3x^{34} + 10x^{33} + x^{32} - 6x^{31} - 2x^{30} - 10x^{29} - 3x^{28} + 2x^{27} + 9x^{26} - 3x^{25} \\
& + 14x^{24} - 8x^{23} - 7x^{21} + 9x^{20} + 3x^{19} - 4x^{18} - 10x^{17} - 7x^{16} + 12x^{15} + 7x^{14} + 2x^{13} \\
& - 12x^{12} - 4x^{11} - 2x^{10} + 5x^{9} + x^{7} - 7x^{6} + 7x^{5} - 4x^{4} + 12x^{3} - 6x^{2} + 3x - 6.
\end{aligned}$$

Förklaring:

- Sönderfallet beskrivs av en ”övergångsmatris” A av storlek 92×92, som har det karaktäristiska polynomet

$$\det(A - xI) = x^{18}(x+1)(x-1)^2 p(x),$$

  där $p(x)$ är polynomet av grad 71 från förra sidan.

- Upprepat sönderfall beskrivs av potenser A^n, och efter ett tag är det bidraget λ^n från **det största egenvärdet** $\lambda = 1{,}303577269034296 39\ldots$ som dominerar.

- Motsvarande **egenvektor** ger proportionerna för hur ofta de olika grundämnena förekommer asymptotiskt då $n \to \infty$.

  (Se kolonnen ”abundance” i det periodiska systemet ovan, där proportionen anges i antal miljondelar.)

So far, I can proudly say that this magnificent theory is essentially all my own work. However, the next theorem, the finest achievement so far in Audioactive Chemistry, is the result of the combined labours of three brilliant investigators.

<u>The Cosmological Theorem.</u>

<u>Any</u> string decays into a compound of common and transuranic elements after a bounded number of derivation steps. As a consequence, <u>every</u> string other than the two boring ones increases at the magic rate λ, and the relative abundances of the atoms in its descendants approach the values we have already described.

<u>Proof</u> of the Cosmological Theorem would fill the rest of ***Eureka!*** Richard Parker and I found a proof over a period of about a month of very intensive work (or, rather, play!). We first produced a very subtle and complicated argument which (almost) reduced the problem to tracking a few hundred cases, and then handled these on dozens of sheets of paper (now lost). Mike Guy found a simpler proof that used tracking and backtracking in roughly equal proportions. Guy's proof still filled lots of pages (almost all lost), but had the advantage that it found the longest-lived of the exotic elements, namely the isotopes of **<u>Methuselum</u>** (22333222lln; see Figure 2). Can you find a proof in only a few pages? Please!

ELECTRONIC RESEARCH ANNOUNCEMENTS
OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 3, Pages 78–82 (August 21, 1997)
S 1079-6762(97)00026-7

PROOF OF CONWAY'S LOST COSMOLOGICAL THEOREM

SHALOSH B. EKHAD AND DORON ZEILBERGER

(Communicated by Ronald Graham)

Abstract. John Horton Conway's Cosmological Theorem about sequences like **1, 11, 21, 1211, 111221, 312211,** ... , for which no extant proof existed, is given a new proof, this time hopefully for good.

Datorassisterat bevis i *Maple*.

"Shalosh B. Ekhad" är ingen person, utan Doron Zeilbergers dator!

(Efter hans första dator, en AT&T 3B1 från mitten av 1980-talet.
Shalosh = 3 och ekhad = 1 på hebreiska.)