Kombinatorisk Spelteori

Jonathan Nilsson

Linköpings Universitet

4 Maj, 2023

Vad är spelteori?

Oxford Dictionary

Spelteori är den delen av matematiken som behandlar situationer där människor tävlar mot varandra, exempelvis krig eller affärer

Vad är spelteori?

Oxford Dictionary

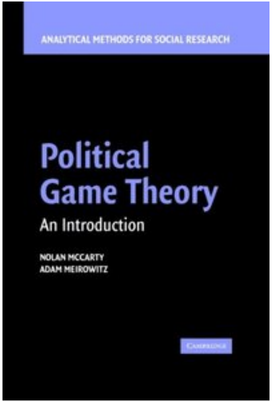
Spelteori är den delen av matematiken som behandlar situationer där människor tävlar mot varandra, exempelvis krig eller affärer

Wikipedia

Spelteori är studiet av matematiska modeller för strategisk interaktion mellan rationella agenter

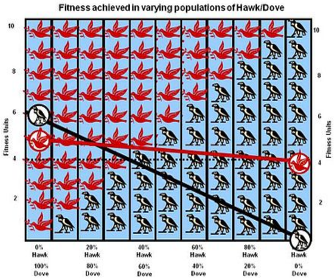
Olika brancher av spelteori

Förhandling: Geopolitik, löneförhandling, gisslandraman



Olika brancher av spelteori

Evolutionär spelteori



Olika brancher av spelteori

Bayesiansk spelteori

Prisoner B / Prisoner A	**Prisoner B stays silent (*cooperates*)**	**Prisoner B betrays (*defects*)**
Prisoner A stays silent (*cooperates*)	Each serve 2 years	Prisoner A: 10 years Prisoner B: goes free
Prisoner A betrays (*defects*)	Prisoner A: goes free Prisoner B: 10 years	Each serve 5 years

Olika brancher av spelteori

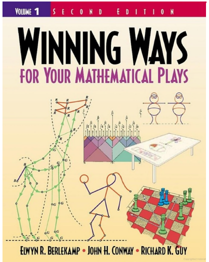
Bayesiansk spelteori

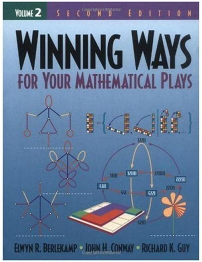
Type = "Civilian"		Sheriff's action	
		Shoot	Not
Suspect's action	Shoot	-3, -1	-1, -2
	Not	-2, -1	0, 0

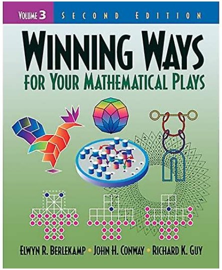
Type = "Criminal"		Sheriff's action	
		Shoot	Not
Suspect's action	Shoot	0, 0	2, -2
	Not	-2, -1	-1,1

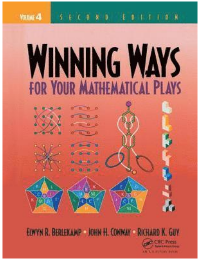
Olika brancher av spelteori

Kombinatorisk spelteori





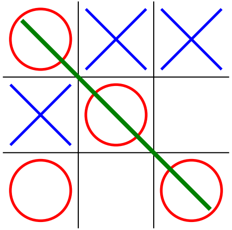




Del I

Spel och strategi

Tre i rad



Plocka stenar

Spelarna turas om att plocka $1, 2$, eller 3 stenar från högen. Spelaren som tar den sista stenen vinner.

Vad är en vinnande strategi?

Plocka stenar

Spelarna turas om att plocka $1, 2,$ eller 3 stenar från högen. Spelaren som tar den sista stenen vinner.

Vad är en vinnande strategi?

Plocka stenar

Spelarna turas om att plocka $1, 2$, eller 3 stenar från högen. Spelaren som tar den sista stenen vinner.

Vad är en vinnande strategi?

Plocka stenar

Spelarna turas om att plocka $1, 2$, eller 3 stenar från högen. Spelaren som tar den sista stenen vinner.

Vad är en vinnande strategi?

Plocka stenar

Spelarna turas om att plocka $1, 2$, eller 3 stenar från högen. Spelaren som tar den sista stenen vinner.

Vad är en vinnande strategi?

Plocka stenar

Spelarna turas om att plocka $1, 2$, eller 3 stenar från högen. Spelaren som tar den sista stenen vinner.

Vad är en vinnande strategi?

Plocka stenar

Spelarna turas om att plocka $1, 2,$ eller 3 stenar från högen. Spelaren som tar den sista stenen vinner.

Vad är en vinnande strategi?

Plocka stenar

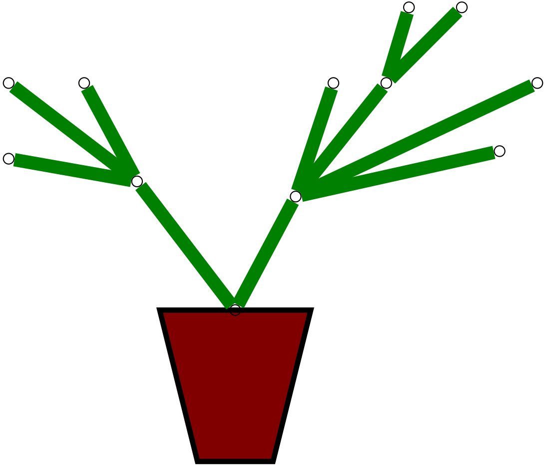
Spelarna turas om att plocka $1, 2,$ eller 3 stenar från högen. Spelaren som tar den sista stenen vinner.

Vad är en vinnande strategi?

Den första spelaren vinner genom att alltid lämna en multipel av 4 stenar

Grön Hackenbush

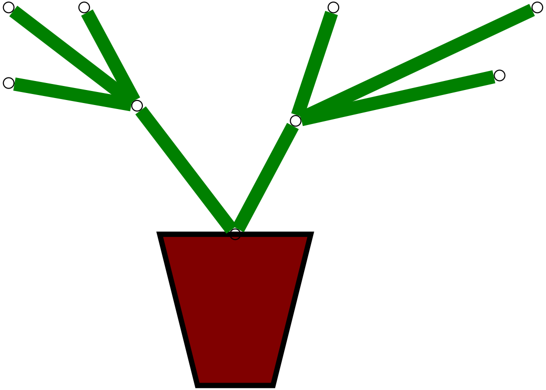
Spelarna turas om att hugga av grenar. Allt som inte är kopplat till marken faller bort. Den som hugger sista grenen vinner.



Kan du hitta en vinnande strategi?

Grön Hackenbush

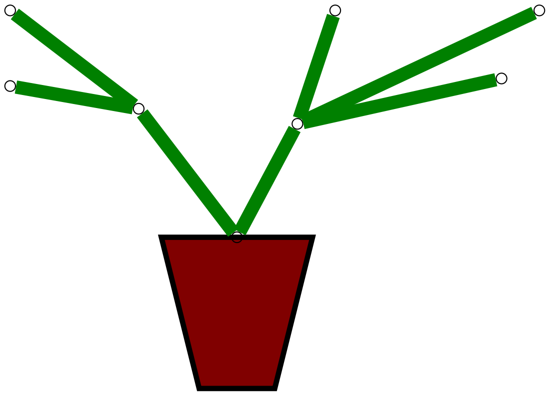
Spelarna turas om att hugga av grenar. Allt som inte är kopplat till marken faller bort. Den som hugger sista grenen vinner.



Kan du hitta en vinnande strategi?

Grön Hackenbush

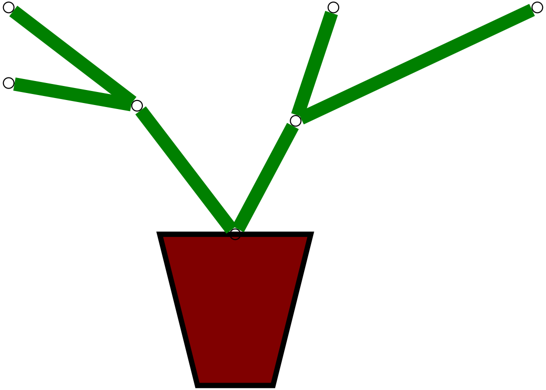
Spelarna turas om att hugga av grenar. Allt som inte är kopplat till marken faller bort. Den som hugger sista grenen vinner.



Kan du hitta en vinnande strategi?

Grön Hackenbush

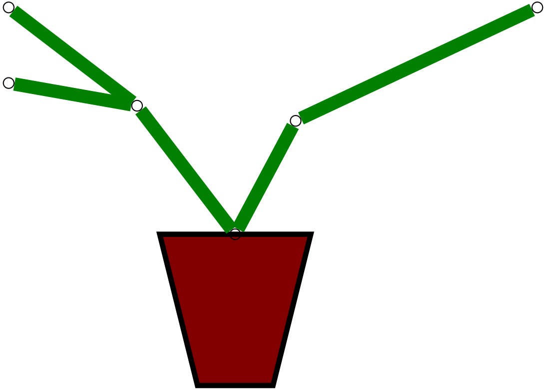
Spelarna turas om att hugga av grenar. Allt som inte är kopplat till marken faller bort. Den som hugger sista grenen vinner.



Kan du hitta en vinnande strategi?

Grön Hackenbush

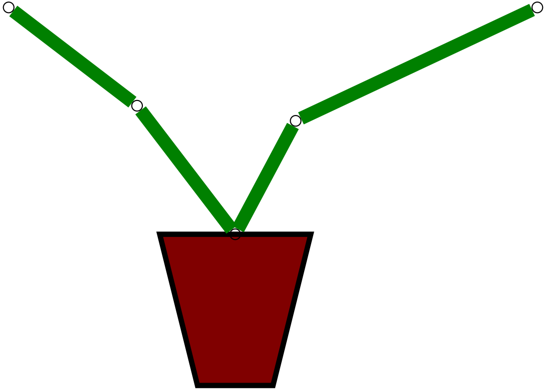
Spelarna turas om att hugga av grenar. Allt som inte är kopplat till marken faller bort. Den som hugger sista grenen vinner.



Kan du hitta en vinnande strategi?

Grön Hackenbush

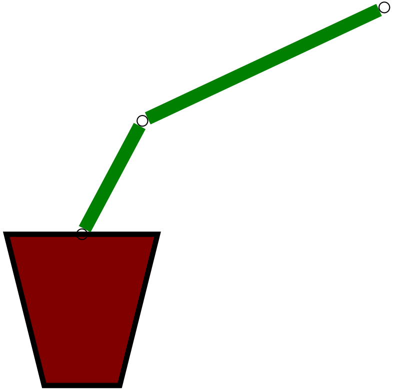
Spelarna turas om att hugga av grenar. Allt som inte är kopplat till marken faller bort. Den som hugger sista grenen vinner.



Kan du hitta en vinnande strategi?

Grön Hackenbush

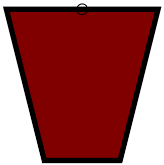
Spelarna turas om att hugga av grenar. Allt som inte är kopplat till marken faller bort. Den som hugger sista grenen vinner.



Kan du hitta en vinnande strategi?

Grön Hackenbush

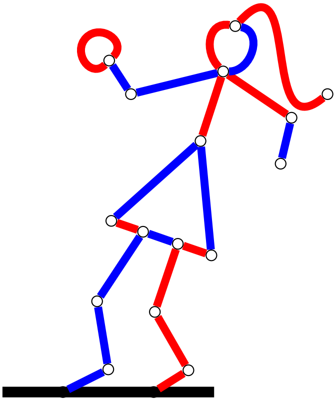
Spelarna turas om att hugga av grenar. Allt som inte är kopplat till marken faller bort. Den som hugger sista grenen vinner.



Kan du hitta en vinnande strategi?

Blåröd Hackenbush

I den här versionen kan spelare 1 bara klippa blå grenar och spelare 2 kan bara klippa röda.



Summa 15

$\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{6}\ \boxed{7}\ \boxed{8}\ \boxed{9}$

Spelarna turas om att plocka brikor med talen $1-9$. Första spelaren som samlat ihop tre siffror vars summa är 15 vinner.

Summa 15

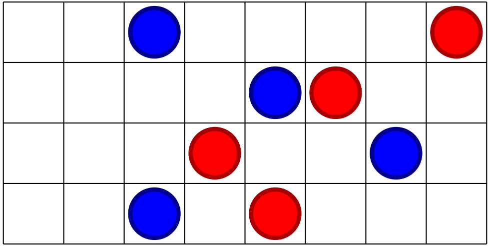
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Spelarna turas om att plocka brikor med talen $1 - 9$. Första spelaren som samlat ihop tre siffror vars summa är 15 vinner.

Om första spelaren plockar 5 och röd sedan plockar 7, vad är en vinnande strategi för spelare 1?

Northcotts spel

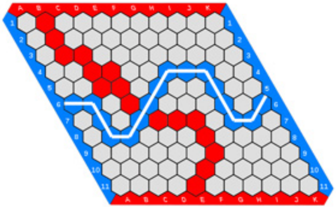
Markörerna kan flyttas ett antal steg vågrätt så länge man inte passerar en annan markör. En spelare kan enbart flytta markörer av sin egen färg.



Blå börjar, kan du hitta det vinnande draget?

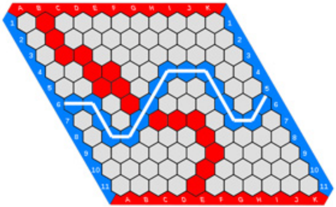
Hex

Blå försöker koppla ihop vänster sida med höger, och röd försöker koppla ihop toppen med botten.



Hex

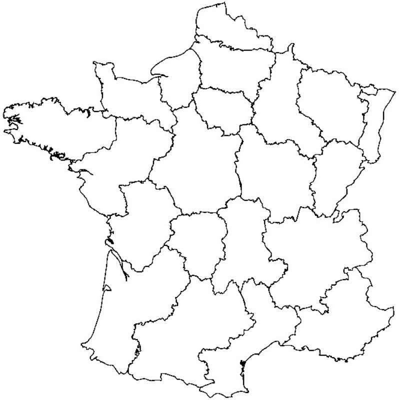
Blå försöker koppla ihop vänster sida med höger, och röd försöker koppla ihop toppen med botten.



Finns det alltid en vinnare?

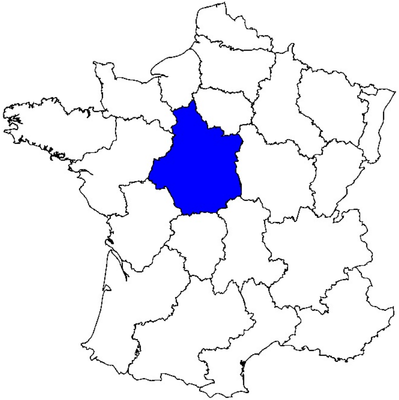
Col

Blå och röd turas om att färga en karta. Angränsande områden får inte ha samma färg. Den som inte kan göra ett giltigt drag förlorar.



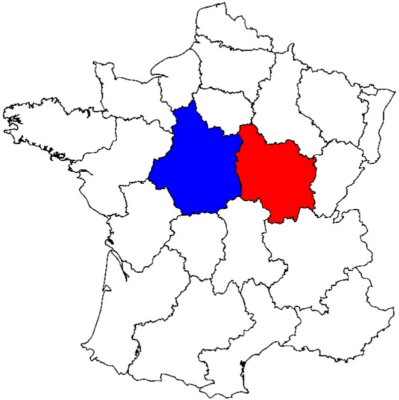
Col

Blå och röd turas om att färga en karta. Angränsande områden får inte ha samma färg. Den som inte kan göra ett giltigt drag förlorar.



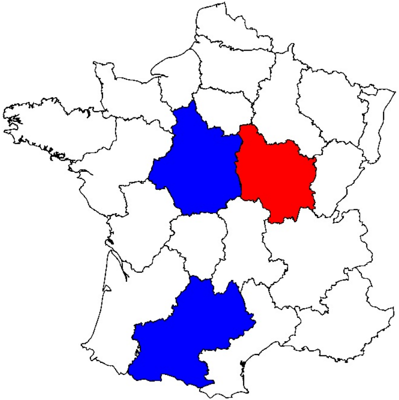
Col

Blå och röd turas om att färga en karta. Angränsande områden får inte ha samma färg. Den som inte kan göra ett giltigt drag förlorar.



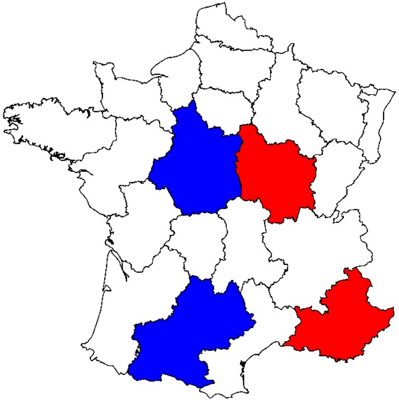
Col

Blå och röd turas om att färga en karta. Angränsande områden får inte ha samma färg. Den som inte kan göra ett giltigt drag förlorar.



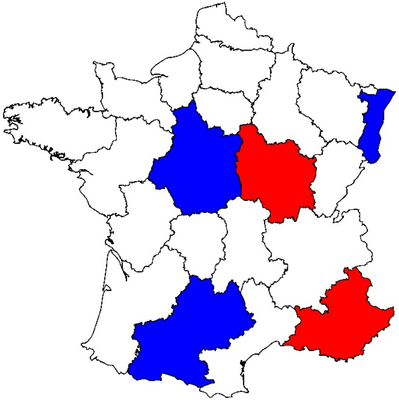
Col

Blå och röd turas om att färga en karta. Angränsande områden får inte ha samma färg. Den som inte kan göra ett giltigt drag förlorar.



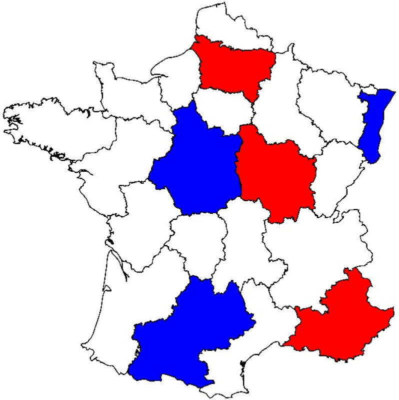
Col

Blå och röd turas om att färga en karta. Angränsande områden får inte ha samma färg. Den som inte kan göra ett giltigt drag förlorar.



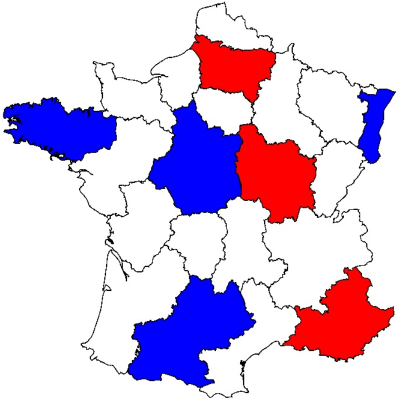
Col

Blå och röd turas om att färga en karta. Angränsande områden får inte ha samma färg. Den som inte kan göra ett giltigt drag förlorar.



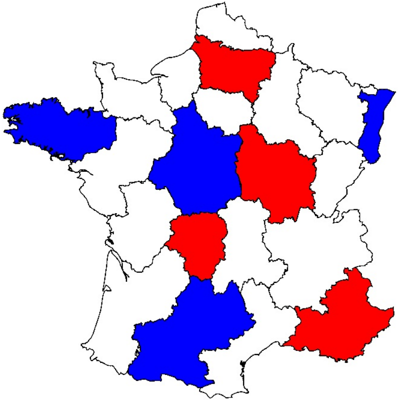
Col

Blå och röd turas om att färga en karta. Angränsande områden får inte ha samma färg. Den som inte kan göra ett giltigt drag förlorar.



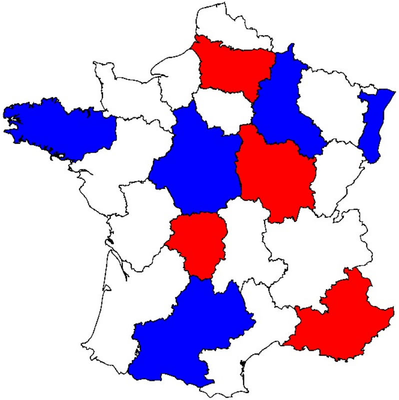
Col

Blå och röd turas om att färga en karta. Angränsande områden får inte ha samma färg. Den som inte kan göra ett giltigt drag förlorar.



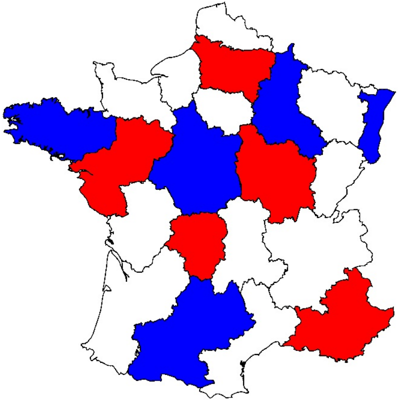
Col

Blå och röd turas om att färga en karta. Angränsande områden får inte ha samma färg. Den som inte kan göra ett giltigt drag förlorar.



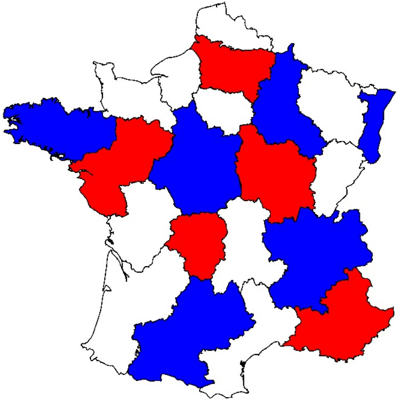
Col

Blå och röd turas om att färga en karta. Angränsande områden får inte ha samma färg. Den som inte kan göra ett giltigt drag förlorar.



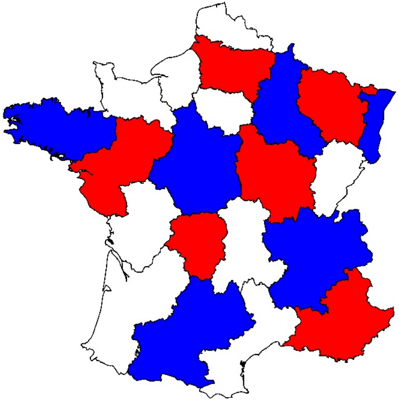
Col

Blå och röd turas om att färga en karta. Angränsande områden får inte ha samma färg. Den som inte kan göra ett giltigt drag förlorar.



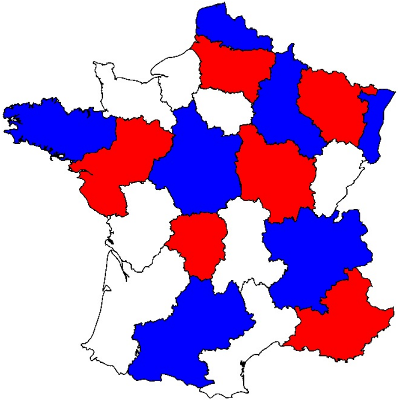
Col

Blå och röd turas om att färga en karta. Angränsande områden får inte ha samma färg. Den som inte kan göra ett giltigt drag förlorar.



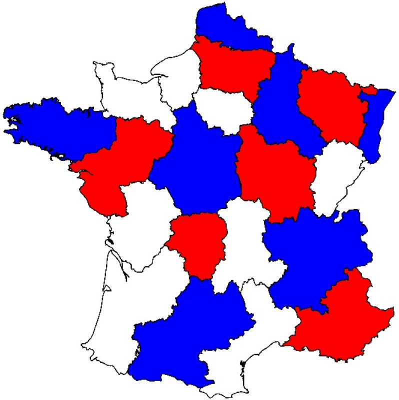
Col

Blå och röd turas om att färga en karta. Angränsande områden får inte ha samma färg. Den som inte kan göra ett giltigt drag förlorar.



Col

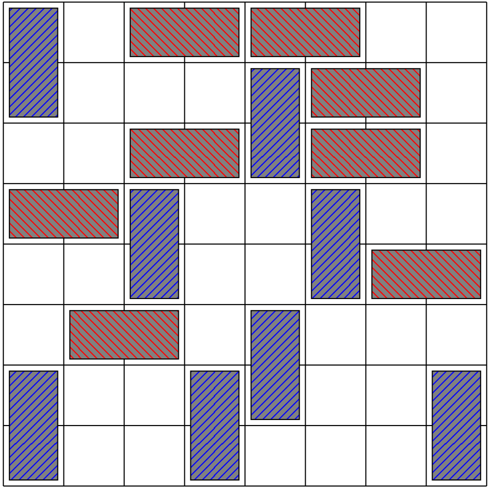
Blå och röd turas om att färga en karta. Angränsande områden får inte ha samma färg. Den som inte kan göra ett giltigt drag förlorar.



Blå vinner!

Domineering

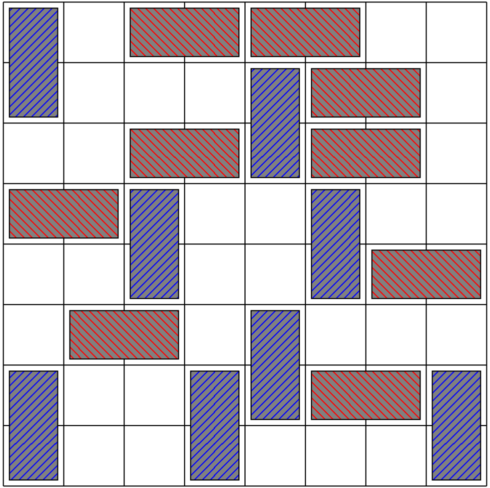
Blå spelar dominobrickor lodrätt, röd spelar vågrätt. Den som inte kan göra ett drag förlorar.



Det är röds tur. Hur bör man spela?

Domineering

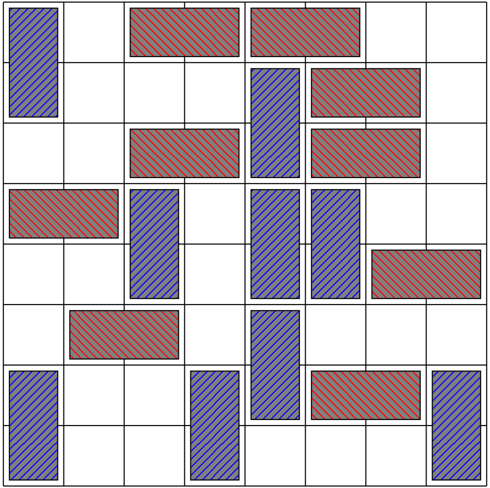
Blå spelar dominobrickor lodrätt, röd spelar vågrätt. Den som inte kan göra ett drag förlorar.



Det är röds tur. Hur bör man spela?

Domineering

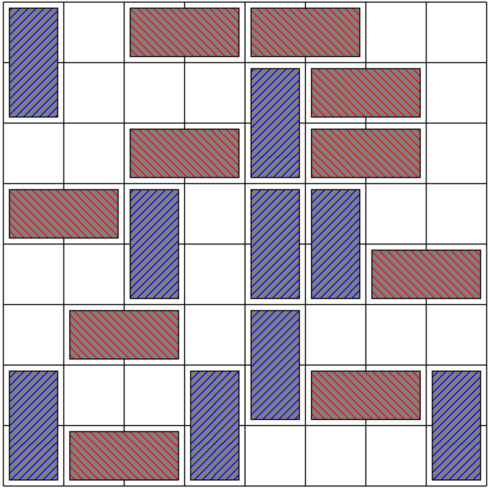
Blå spelar dominobrickor lodrätt, röd spelar vågrätt. Den som inte kan göra ett drag förlorar.



Det är röds tur. Hur bör man spela?

Domineering

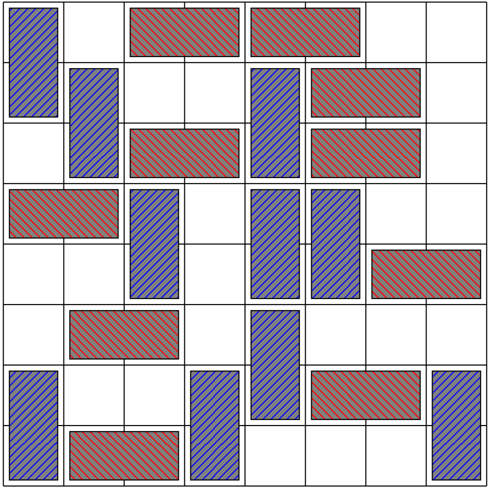
Blå spelar dominobrickor lodrätt, röd spelar vågrätt. Den som inte kan göra ett drag förlorar.



Det är röds tur. Hur bör man spela?

Domineering

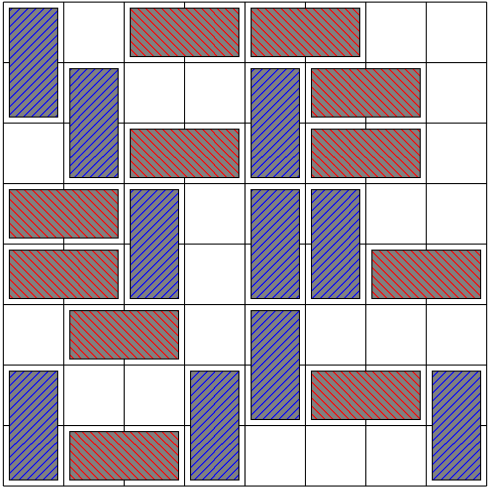
Blå spelar dominobrickor lodrätt, röd spelar vågrätt. Den som inte kan göra ett drag förlorar.



Det är röds tur. Hur bör man spela?

Domineering

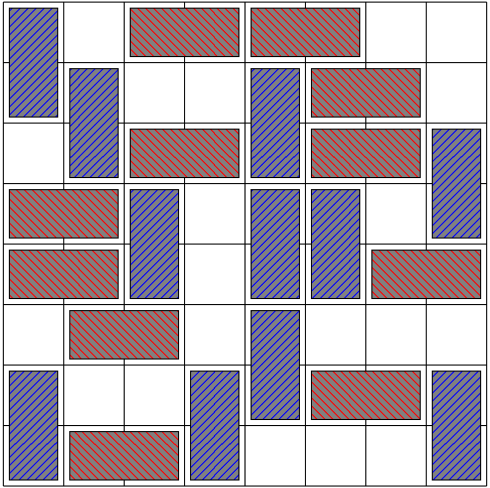
Blå spelar dominobrickor lodrätt, röd spelar vågrätt. Den som inte kan göra ett drag förlorar.



Det är röds tur. Hur bör man spela?

Domineering

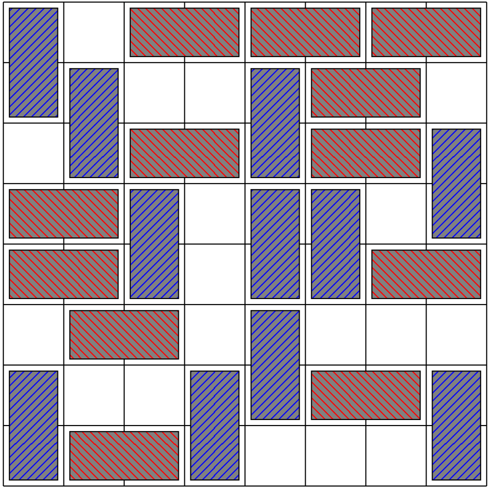
Blå spelar dominobrickor lodrätt, röd spelar vågrätt. Den som inte kan göra ett drag förlorar.



Det är röds tur. Hur bör man spela?

Domineering

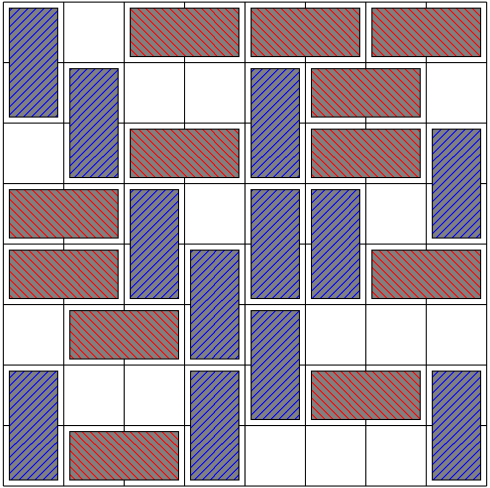
Blå spelar dominobrickor lodrätt, röd spelar vågrätt. Den som inte kan göra ett drag förlorar.



Det är röds tur. Hur bör man spela?

Domineering

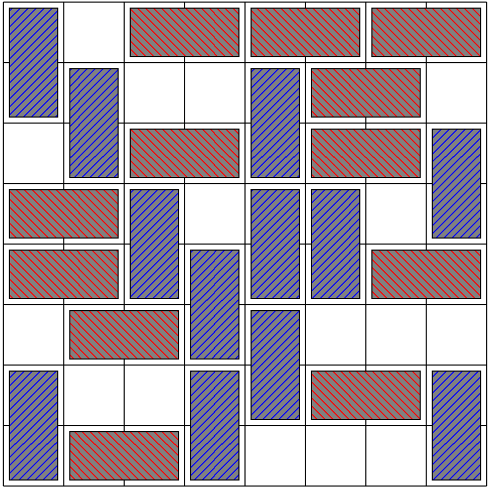
Blå spelar dominobrickor lodrätt, röd spelar vågrätt. Den som inte kan göra ett drag förlorar.



Det är röds tur. Hur bör man spela?

Domineering

Blå spelar dominobrickor lodrätt, röd spelar vågrätt. Den som inte kan göra ett drag förlorar.



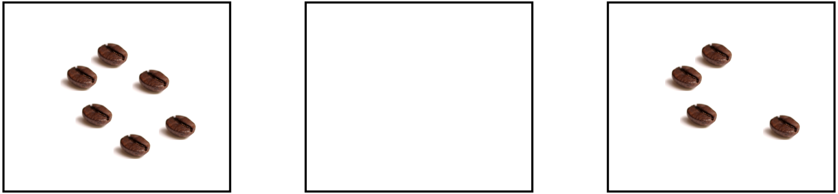
Det är röds tur. Hur bör man spela? Röd vinner!

Nim

Spelarna turas om att plocka bönor, man får ta hur många bönor man vill, men bara ur en av högarna.

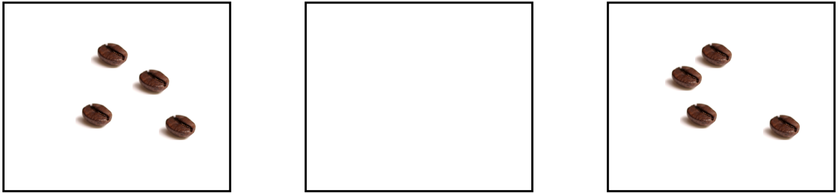
Nim

Spelarna turas om att plocka bönor, man får ta hur många bönor man vill, men bara ur en av högarna.



Nim

Spelarna turas om att plocka bönor, man får ta hur många bönor man vill, men bara ur en av högarna.



Härifrån vinner den andra spelaren genom att spegla motståndarens drag.

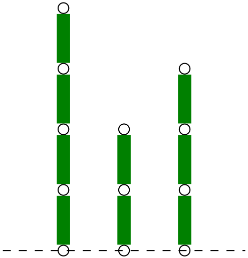
Samma eller olika spel?

Även om två spel kan se olika ut kan de vara ”samma spel” från ett matematiskt perspektiv.

Samma eller olika spel?

Även om två spel kan se olika ut kan de vara ”samma spel” från ett matematiskt perspektiv.

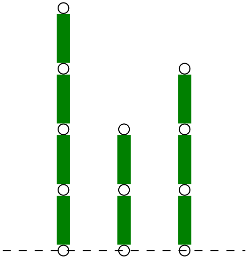
Exempelvis är Nim bara ett specialfall av grön Hackenbush med tre stjälkar:



Samma eller olika spel?

Även om två spel kan se olika ut kan de vara ”samma spel” från ett matematiskt perspektiv.

Exempelvis är Nim bara ett specialfall av grön Hackenbush med tre stjälkar:



2	7	6
9	5	1
4	3	8

Och summa 15 är bara tre i rad.

Kombinatoriska spel

Definition

I ett **Kombinatoriskt spel** gäller

- Det finns två spelare (Blå, Röd) som turas om att göra drag
- Den första spelaren som inte kan göra ett giltigt drag förlorar
- Spelarna har full information om spelet
- Inga slumpmoment är inblandade
- Ett spel kan sluta på två sätt (Blå vinst/Röd vinst)

För det mesta kräver vi också att

- Varje position har ändligt många möjliga drag
- Spelet kan inte hålla på för evigt, varje spel slutar

Kombinatoriska spel

Definition

I ett **Kombinatoriskt spel** gäller

- Det finns två spelare (Blå, Röd) som turas om att göra drag
- Den första spelaren som inte kan göra ett giltigt drag förlorar
- Spelarna har full information om spelet
- Inga slumpmoment är inblandade
- Ett spel kan sluta på två sätt (Blå vinst/Röd vinst)

För det mesta kräver vi också att

- Varje position har ändligt många möjliga drag
- Spelet kan inte hålla på för evigt, varje spel slutar

Man behöver inte skilja på ”spel” och ”position”, varje position kan ses som startposition för ett nytt spel.

Kombinatoriska spel

Definition

I ett **Kombinatoriskt spel** gäller

- Det finns två spelare (Blå, Röd) som turas om att göra drag
- Den första spelaren som inte kan göra ett giltigt drag förlorar
- Spelarna har full information om spelet
- Inga slumpmoment är inblandade
- Ett spel kan sluta på två sätt (Blå vinst/Röd vinst)

För det mesta kräver vi också att

- Varje position har ändligt många möjliga drag
- Spelet kan inte hålla på för evigt, varje spel slutar

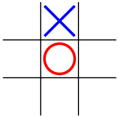
Man behöver inte skilja på ”spel” och ”position”, varje position kan ses som startposition för ett nytt spel. Hackenbush, Hex, Nim, Col, och Domineering uppfyller definitionen. Spel som tre-i-rad eller schack kan modifieras lite så att de också uppfyller definitionen.

Strategi

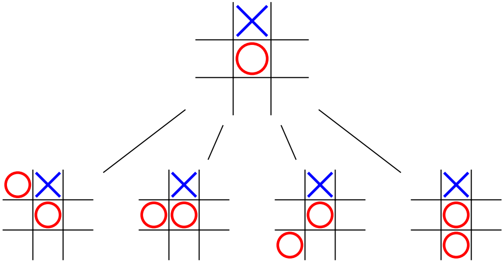
Definition

En **strategi** för en av spelarna är en fullständig beskrivning av exakt vilket drag man ska spela i varje spelposition som kan dyka upp.

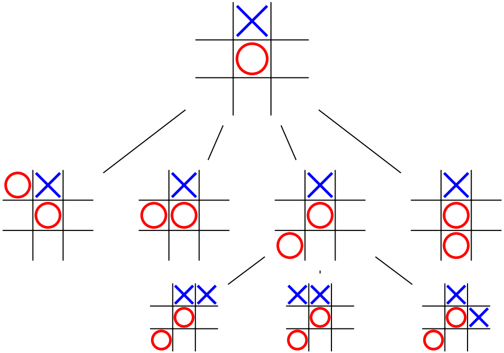
Strategi för Tre-i-rad



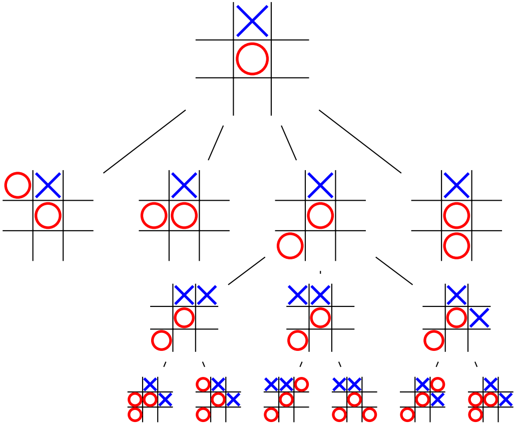
Strategi för Tre-i-rad



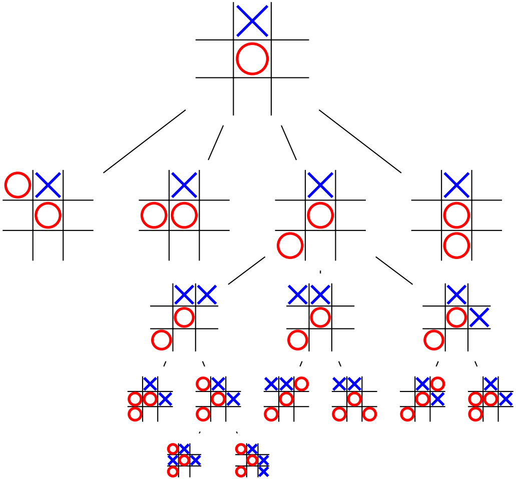
Strategi för Tre-i-rad



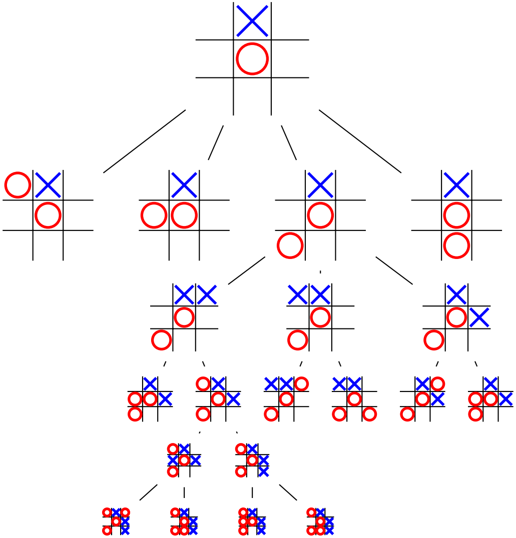
Strategi för Tre-i-rad



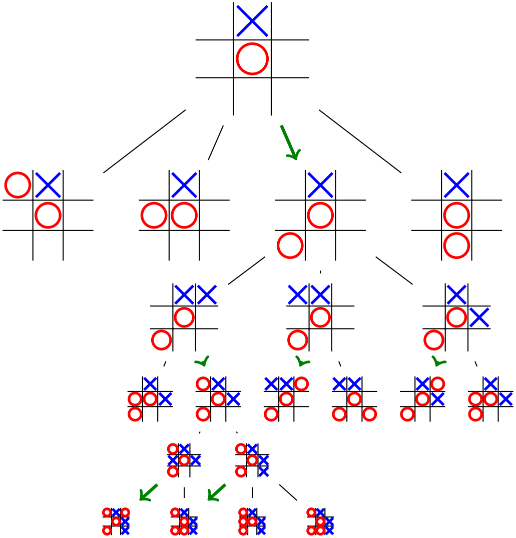
Strategi för Tre-i-rad



Strategi för Tre-i-rad



Strategi för Tre-i-rad



Vinnande strategier

Kombinatoriska spel

En **vinnande strategi** för blå spelaren är en strategi som alltid leder till att blå vinner.

Vinnande strategier

Kombinatoriska spel

En **vinnande strategi** för blå spelaren är en strategi som alltid leder till att blå vinner.

Typer av spel

För kombinatoriska spel finns bara två möjligheter: antingen har den första spelaren en vinnande strategi, eller så har den andra spelaren en vinnande strategi.
(Förutsatt att en viss spelare alltid börjar)

Vinnande strategier

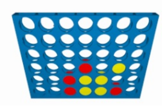
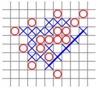
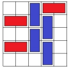
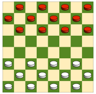
Kombinatoriska spel

En **vinnande strategi** för blå spelaren är en strategi som alltid leder till att blå vinner.

Typer av spel

För kombinatoriska spel finns bara två möjligheter: antingen har den första spelaren en vinnande strategi, eller så har den andra spelaren en vinnande strategi.
(Förutsatt att en viss spelare alltid börjar)
I spel som kan bli oavgjorda finns också möjligheten att båda spelarna kan nå oavgjort med optimalt spel.

Lösta spel

	Spel	**Löst år**	**Vinnare**	**Drag till vinst**
	Connect 4	1988	Första spelaren	41
	Luffarschack	1994	Första spelaren	$2 \cdot 23$
	5×5 Domineering	1973	Andra spelaren	≤ 12
	Dam	2007	oavgjort	
	Schack	?	?	?

Del II

Formell definition av spel

Notation

Definition

Ett **spel** G är en symbol $\{G^L | G^R\}$ där G^L och G^R själva är **mängder** av spel.

Notation

Definition

Ett **spel** G är en symbol $\{G^L|G^R\}$ där G^L och G^R själva är **mängder** av spel.

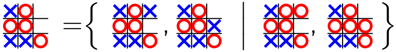
Vi tänker på G^L som mängden spel (eller positioner) som blå kan spela till från G, och G^R är positioner som röd kan spela till från G. Symbolen håller inte reda på vems tur det är.

Notation

Definition

Ett **spel** G är en symbol $\{G^L | G^R\}$ där G^L och G^R själva är **mängder** av spel.

Vi tänker på G^L som mängden spel (eller positioner) som blå kan spela till från G, och G^R är positioner som röd kan spela till från G. Symbolen håller inte reda på vems tur det är. Exempelvis har vi

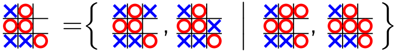


Notation

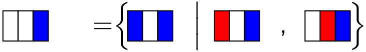
Definition

Ett **spel** G är en symbol $\{G^L | G^R\}$ där G^L och G^R själva är **mängder** av spel.

Vi tänker på G^L som mängden spel (eller positioner) som blå kan spela till från G, och G^R är positioner som röd kan spela till från G. Symbolen håller inte reda på vems tur det är. Exempelvis har vi



och



Generationer av spel

Vi kan rekursivt generera spel där vi väljer G^L och G^R bestående av tidigare genererade spel.

Generationer av spel

Vi kan rekursivt generera spel där vi väljer G^L och G^R bestående av tidigare genererade spel.

Först, enligt definitionen:

$$\{|\} \quad \text{är ett spel.}$$

Generationer av spel

Vi kan rekursivt generera spel där vi väljer G^L och G^R bestående av tidigare genererade spel.

Först, enligt definitionen:

$$\{|\} \quad \text{är ett spel.}$$

Vi kallar detta för **nollpositionen** och skriver $0 = \{|\}$. Den vars tur det är förlorar.

Generationer av spel

Vi kan rekursivt generera spel där vi väljer G^L och G^R bestående av tidigare genererade spel.

Först, enligt definitionen:

$$\{|\} \qquad \text{är ett spel.}$$

Vi kallar detta för **nollpositionen** och skriver $0 = \{|\}$. Den vars tur det är förlorar.

Vi säger att 0 är i första generationen.

Generation 2

I den andra generationen hittar vi

$$1 := \{0|\} \qquad \text{och} \qquad -1 := \{|0\}$$

I spelet 1 har blå spelaren ett övertag på ett drag, och kommer alltid att vinna oavsett vem som börjar.

Generation 2

I den andra generationen hittar vi

$$1 := \{0|\} \qquad \text{och} \qquad -1 := \{|0\}$$

I spelet 1 har blå spelaren ett övertag på ett drag, och kommer alltid att vinna oavsett vem som börjar.

Vi har också

$$* := \{0|0\}$$

I detta spelet vinner dem som *börjar*.

Generation 3

I denna generation hittar vi

$$2 := \{1|\} \qquad \text{och} \qquad -2 := \{|-1\}$$

I spelet 2 har blå spelare ett två-drags-övertag och vinner därför alltid.

Generation 3

I denna generation hittar vi

$$2 := \{1|\} \qquad \text{och} \qquad -2 := \{|-1\}$$

I spelet 2 har blå spelare ett två-drags-övertag och vinner därför alltid.

Vi har också

$$\uparrow := \{0|*\} \qquad \text{och} \qquad \downarrow := \{*|0\}$$

Generation 3

I denna generation hittar vi

$$2 := \{1|\} \qquad \text{och} \qquad -2 := \{|-1\}$$

I spelet 2 har blå spelare ett två-drags-övertag och vinner därför alltid.

Vi har också

$$\uparrow := \{0|*\} \qquad \text{och} \qquad \downarrow := \{*|0\}$$

och många fler:

$$\{*|*\} \quad \{*|1\} \quad \{*|-1\} \quad \{*|*\} \quad \{*|\} \quad \{|*\} \quad \{1|*\} \quad \{-1|*\}$$

$$\{1|0\} \quad \{1|1\} \quad \{1|-1\} \quad \{-1|0\} \quad \{-1|1\} \quad \{-1|-1\}$$

$$\{*|0,*\} \quad \{1,0,*|*,-1\} \quad \{*|*,0\} \quad \{0,1|0\} \quad \{-1,1|0,*\}$$

Generation n

Här hittar vi

$$n+1 := \{n|\} \qquad \text{och} \qquad -n-1 := \{|-n\}$$

och många flera.

Generation ∞

Enligt vår definition är

$$\omega := \{0, 1, 2, \ldots \,|\} = \{\mathbb{N}|\}$$

också ett spel.

Generation ∞

Enligt vår definition är

$$\omega := \{0, 1, 2, \ldots |\} = \{\mathbb{N}|\}$$

också ett spel.

Även om blå kan välja mellan oändligt många drag tar spelet slut efter detta drag.

...och så vidare

Vi kan sedan fortsätta att definiera

$$\omega + 1 := \{\omega, 1, 2, 3, 4, \ldots \,|\}$$

$$\omega + \omega := \{\omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \ldots\}$$

$$2\omega = \omega + \omega = \{\omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \ldots\}$$

$$\omega^2, \omega^\omega, \sqrt{\omega}, \ldots$$

...och så vidare

Vi kan sedan fortsätta att definiera

$$\omega + 1 := \{\omega, 1, 2, 3, 4, \ldots |\}$$

$$\omega + \omega := \{\omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \ldots\}$$

$$2\omega = \omega + \omega = \{\omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \ldots\}$$

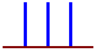
$$\omega^2, \omega^\omega, \sqrt{\omega}, \ldots$$

Faktum är att det för varje ordinaltal finns ett motsvarande spel.

Alla dessa är oändligt *stora* och *olika* (dessa begrepp har ej definierats ännu)

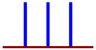
Hackenbushrepresentation

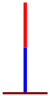
Notera att många av spelen vi skapat kan realiseras som Hackenbush-spel:

$0 = \{|\} =$ $-1 = \{|0\} =$  $3 = \{2|\} =$ 

Hackenbushrepresentation

Notera att många av spelen vi skapat kan realiseras som Hackenbush-spel:

$0 = \{|\} =$ $-1 = \{|0\} =$  $3 = \{2|\} =$ 

$* = \{0|0\} =$  $\{0|1\} =$ 

Fyra klasser av spel

Definition

Båda spelare antas spela optimalt. Ett spel G är antingen...

- **Positivt**, om blå alltid vinner. Vi skriver $G > 0$.
- **Negativt** om röd alltid vinner. Vi skriver $G < 0$.
- **Noll** Om den som börjar alltid förlorar. Vi skriver $G = 0$.
- **Luddigt** Om den som börjar alltid vinner. Vi skriver $G || 0$.

Fyra klasser av spel

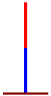
Definition

Båda spelare antas spela optimalt. Ett spel G är antingen...

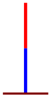
- **Positivt**, om blå alltid vinner. Vi skriver $G > 0$.
- **Negativt** om röd alltid vinner. Vi skriver $G < 0$.
- **Noll** Om den som börjar alltid förlorar. Vi skriver $G = 0$.
- **Luddigt** Om den som börjar alltid vinner. Vi skriver $G || 0$.

Vi skriver $G \sim H$ om G och H ligger i samma klass.

Exempel

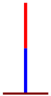
$\{0|1\} =$  är positivt eftersom blå vinner oberoende av vem som börjar

Exempel

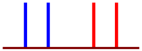
$\{0|1\} =$  är positivt eftersom blå vinner oberoende av vem som börjar

$* = \{0|0\} =$  är luddigt eftersom den som börjar alltid vinner

Exempel

$\{0|1\} =$  är positivt eftersom blå vinner oberoende av vem som börjar

$* = \{0|0\} =$  är luddigt eftersom den som börjar alltid vinner

 $=0$ eftersom den som börjar alltid förlorar

Summan av spel

Låt $G = \{G^L | G^R\}$ och $H = \{H^L | H^R\}$ vara två spel.

Definition

Vi definierar $G + H$ som spelet

$$G + H = \{G^L + H, G + H^L | G^R + H, G + H^R\}$$

Summan av spel

Låt $G = \{G^L | G^R\}$ och $H = \{H^L | H^R\}$ vara två spel.

Definition

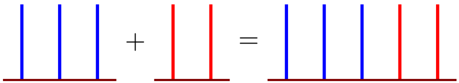
Vi definierar $G + H$ som spelet

$$G + H = \{G^L + H, G + H^L | G^R + H, G + H^R\}$$

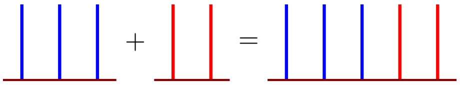
$+$

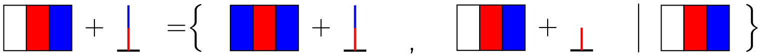
Detta betyder att i varje drag väljer spelaren om den vill göra ett drag från antingen det första eller det andra spelet.

Exempel

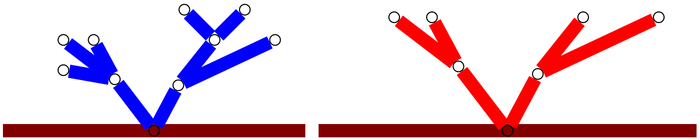


Exempel



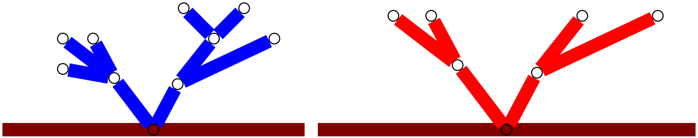


Ekvivalenta spel

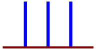


I detta Hackenbush-spel G har Blå ett klart övertag, med 9 klippbara grenar mot röds 6 grenar. Därför vinner blå vem som än startar.

Ekvivalenta spel



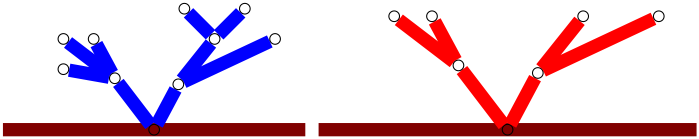
I detta Hackenbush-spel G har Blå ett klart övertag, med 9 klippbara grenar mot röds 6 grenar. Därför vinner blå vem som än startar. Detta spel har samma drag-övertag som

 $= \{2|\} = 3$

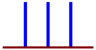
Definition

Vi skriver att $G = H$ om och endast om $G + K \sim H + K$ för alla spel K. Vi säger att spelen är ekvivalenta eller lika.

Ekvivalenta spel



I detta Hackenbush-spel G har Blå ett klart övertag, med 9 klippbara grenar mot röds 6 grenar. Därför vinner blå vem som än startar. Detta spel har samma drag-övertag som

 $= \{2|\} = 3$

Definition

Vi skriver att $G = H$ om och endast om $G + K \sim H + K$ för alla spel K. Vi säger att spelen är ekvivalenta eller lika.

Så $G = 3$.

Reduktion

Eftersom båda spelare antas spela optimalt kan vi ofta ta bort sämre drag i beräkningar.

$$\{4, 2, 0, -1, |5, 7, 11\} = \{4|5\}$$

Reduktion

Eftersom båda spelare antas spela optimalt kan vi ofta ta bort sämre drag i beräkningar.

$$\{4, 2, 0, -1, |5, 7, 11\} = \{4|5\}$$

$$3 + * = \{2 + *, 3|3\} = \{3|3\}$$

Negationen av ett spel

Definition

Om $G = \{G^L | G^R\}$ är ett spel definierar vi

$$-G = \{-G^R | -G^L\}$$

Detta betyder att $-G$ är samma spel som G fast med spelarnas roller omvända.

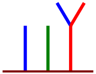
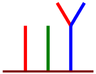
Negationen av ett spel

Definition

Om $G = \{G^L | G^R\}$ är ett spel definierar vi

$$-G = \{-G^R | -G^L\}$$

Detta betyder att $-G$ är samma spel som G fast med spelarnas roller omvända.

$G =$  $\quad -G =$ 

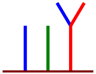
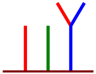
Negationen av ett spel

Definition

Om $G = \{G^L | G^R\}$ är ett spel definierar vi

$$-G = \{-G^R | -G^L\}$$

Detta betyder att $-G$ är samma spel som G fast med spelarnas roller omvända.

$G =$  $\quad -G =$ 

Vi noterar att $G + (-G) = 0$, första spelaren förlorar eftersom andra spelaren kan spegla första spelarens drag i andra komponenten.

Att ordna spel

Definition

Om G och H är spel skriver vi

- $G > H$ om $G - H > 0$
- $G < H$ om $G - H < 0$
- $G || H$ om $G - H || 0$.

Att ordna spel

Definition

Om G och H är spel skriver vi

- $G > H$ om $G - H > 0$
- $G < H$ om $G - H < 0$
- $G || H$ om $G - H || 0$.

Exempel: $* < 1$ eftersom röd alltid vinner $* - 1$.

Att ordna spel

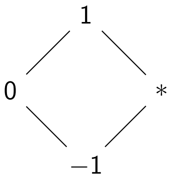
Definition

Om G och H är spel skriver vi

- $G > H$ om $G - H > 0$
- $G < H$ om $G - H < 0$
- $G || H$ om $G - H || 0$.

Exempel: $* < 1$ eftersom röd alltid vinner $* - 1$.
Relationen $<$ är nu en partiell ordningsrelation på mängden (ekvivalensklasser av) kombinatoriska spel.

Hasse-diagram:



Del III

Surrella tal

Numeriska spel

Definition

Ett spel $G = \{G^L | G^R\}$ kallas **numeriskt** om alla positioner i G^L och G^R är numeriska och om $g^l < g^r$ för alla $g^l \in G^L, g^r \in G^R$.

Numeriska spel

Definition

Ett spel $G = \{G^L | G^R\}$ kallas **numeriskt** om alla positioner i G^L och G^R är numeriska och om $g^l < g^r$ för alla $g^l \in G^L, g^r \in G^R$.

Till exempel:
$\{2|4, 3\}$ är numeriskt men $* = \{0|0\}$ är inte numeriskt.

Ett resultat om Col

Sats

Varje Col-position är ekvivalent med antigen

$$X \qquad \text{eller} \qquad X + *$$

för något **numeriskt** spel X.

Surreella tal

Definition

Mängden* numeriska spel kallas för de **surreella talen**.

Surreella tal

Definition

Mängden* numeriska spel kallas för de **surreella talen**.

Man kan också multiplicera spel:

$$GH := \{G^L H + GH^L - G^L H^L,\ G^R H + GH^R - G^R H^R | G^L H + GH^R - G^L H^R,\ G^R H + GH^L - G^R H^L\}$$

Denna operation är associativ, spelet 1 är multiplikativ identitet, och varje nollskilt surreellt tal är inverterbart.

Surreella tal

Definition

Mängden* numeriska spel kallas för de **surreella talen**.

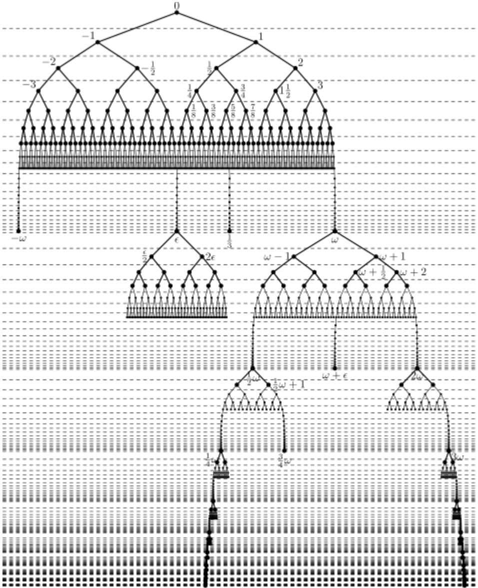
Man kan också multiplicera spel:

$$GH := \{G^L H + GH^L - G^L H^L,\ G^R H + GH^R - G^R H^R | G^L H + GH^R - G^L H^R,\ G^R H + GH^L - G^R H^L\}$$

Denna operation är associativ, spelet 1 är multiplikativ identitet, och varje nollskilt surreellt tal är inverterbart.

- De surrella talen bildar en *kropp* under addition och multiplikation av spel.
- De surreella talen är totalt ordnade under spel-relationen $\leq$.

Visualisering



Maximalitetsegenskapen

Maximalitetsegenskapen

Varje reellt tal kan ses som ett surreellt tal. Därför kan de reella talen bäddas in i de surreella. Faktum är att varje totalt ordnad kropp kan bäddas in i de surrella talen, så de surreella talsystemet är det största i denna mening.

Maximalitetsegenskapen

Maximalitetsegenskapen

Varje reellt tal kan ses som ett surreellt tal. Därför kan de reella talen bäddas in i de surreella. Faktum är att varje totalt ordnad kropp kan bäddas in i de surrella talen, så de surreella talsystemet är det största i denna mening.

Men de surrella talen innehåller också oändligt många transfinita och infinitesimala tal, t.ex. ω och $\frac{1}{\omega}$.

Del IV

Opartiska Spel

Opartiska spel

Definition

Ett spel kallas **opartiskt** om tillgängliga drag är samma för båda spelarna i varje spelposition.
Vi använder förkortad notation $G = \{H|H\} = \{H\}$ för opartiska spel.

Opartiska spel

Definition

Ett spel kallas **opartiskt** om tillgängliga drag är samma för båda spelarna i varje spelposition.
Vi använder förkortad notation $G = \{H|H\} = \{H\}$ för opartiska spel.

Nim, grön hackenbush, och plocka stenar är exempel på opartiska spel.

Opartiska spel

Definition

Ett spel kallas **opartiskt** om tillgängliga drag är samma för båda spelarna i varje spelposition.
Vi använder förkortad notation $G = \{H|H\} = \{H\}$ för opartiska spel.

Nim, grön hackenbush, och plocka stenar är exempel på opartiska spel.

Varje position i ett sådant spel är antingen vinnande (V) eller förlorande (F) för aktuell spelare.
Notation

Plocka stenar

Tillåtna drag: Plocka $1, 2$, eller 3 stenar från en hög.

Stenar	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Plocka stenar

Tillåtna drag: Plocka $1, 2$, eller 3 stenar från en hög.

Stenar	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Resultat	F	V	V	V	F	V	V	V	F	V	V	V	F	V	V	V

Plocka stenar

Tillåtna drag: Plocka $1, 3$, eller 4 stenar från en hög.

Stenar	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

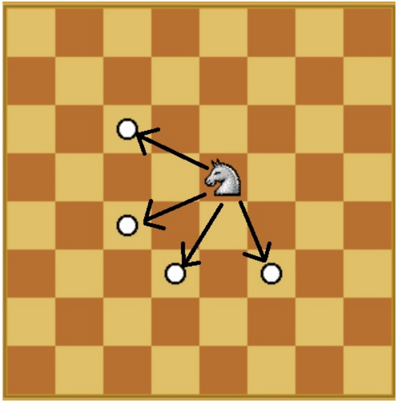
Plocka stenar

Tillåtna drag: Plocka $1, 3$, eller 4 stenar från en hög.

Stenar	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Resultat	F	V	F	V	V	V	V	F	V	F	V	V	V	V	F	V

Hästhopp

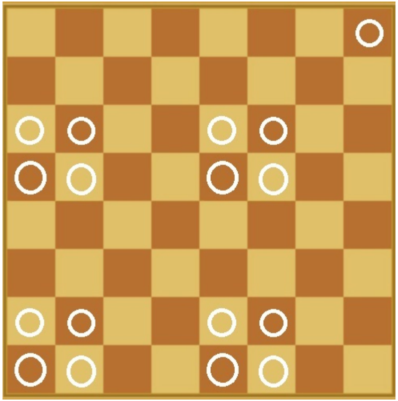
Pjäsen får endast röra sig i de fyra angivna riktningarna på schackbrädet.



Vilka positioner är vinnande?

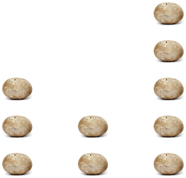
Lösning

Förlorande positioner



Nim-exempel

Nim kan spelas med olika startpositioner. Vilket drag är bäst i positionen nedan?



Nim-exempel

Nim kan spelas med olika startpositioner. Vilket drag är bäst i positionen nedan?

Nim-exempel

Nim kan spelas med olika startpositioner. Vilket drag är bäst i positionen nedan?

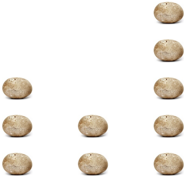
Nu lämnar varje drag två högar av olika storlek, eller tre högar varav två har samma storlek.

Nimbers

Ett spel med **en** nim-hög med n stenar skrivs $\overline{n}$ (vanligen $*n$). Vi kallar dessa spel för **Nimbers**. Då gäller

$$\overline{n} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{n-1}\}$$

Notera att spelet med tre högar från tidigare kan skrivas



$$= \overline{3} + \overline{2} + \overline{5}$$

Summor av Nimbers

Vi noterar att $\overline{n} + \overline{n} = 0$, eftersom andra spelaren kan spegla första spelarens drag.

Så $-\overline{n} = \overline{n}$. Vad blir $\overline{1} + \overline{2}$?

Summor av Nimbers

Vi noterar att $\overline{n} + \overline{n} = 0$, eftersom andra spelaren kan spegla första spelarens drag.

Så $-\overline{n} = \overline{n}$. Vad blir $\overline{1} + \overline{2}$?

$\overline{1} + \overline{2} = \Big\{$  $\Big\} = \Big\{$  $\Big\} = \{\overline{2}, \overline{0}, \overline{1}\} = \overline{3}$

Summor av Nimbers

Vi noterar att $\overline{n} + \overline{n} = 0$, eftersom andra spelaren kan spegla första spelarens drag.

Så $-\overline{n} = \overline{n}$. Vad blir $\overline{1} + \overline{2}$?

$$\overline{1} + \overline{2} =$$

$$= \{\overline{2}, \overline{0}, \overline{1}\} = \overline{3}$$

Vad blir $\overline{2} + \overline{3}$?

Summor av Nimbers

Vi noterar att $\overline{n} + \overline{n} = 0$, eftersom andra spelaren kan spegla första spelarens drag.

Så $-\overline{n} = \overline{n}$. Vad blir $\overline{1} + \overline{2}$?

$$\overline{1} + \overline{2} =$$

$$= \{\overline{2}, \overline{0}, \overline{1}\} = \overline{3}$$

Vad blir $\overline{2} + \overline{3}$?

$$\overline{2} + \overline{3} = \overline{2} + \overline{1} + \overline{2} = \overline{1}$$

En regel för Nim-summor

Sats

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a + b} \qquad \text{när } a \text{ och } b \text{ är olika 2-potenser}$$

En regel för Nim-summor

Sats

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a + b} \qquad \text{när } a \text{ och } b \text{ är olika 2-potenser}$$

Nu kan vi beräkna summan av godtyckliga Nimbers:

$$\overline{20} + \overline{19} + \overline{13} = (\overline{16} + \overline{4}) + (\overline{16} + \overline{2} + \overline{1}) + (\overline{8} + \overline{4} + \overline{1}) = \overline{8} + \overline{2} = \overline{10}$$

En regel för Nim-summor

Sats

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b} \qquad \text{när } a \text{ och } b \text{ är olika 2-potenser}$$

Nu kan vi beräkna summan av godtyckliga Nimbers:

$$\overline{20} + \overline{19} + \overline{13} = (\overline{16} + \overline{4}) + (\overline{16} + \overline{2} + \overline{1}) + (\overline{8} + \overline{4} + \overline{1}) = \overline{8} + \overline{2} = \overline{10}$$

Följdsats

$$\overline{m} + \overline{n} = \overline{m \text{ xor } n}$$

Vinnande strategi i Nim

Vinnande strategi är alltså att alltid spela till en position med Nim-summa noll.

Vinnande strategi i Nim

Vinnande strategi är alltså att alltid spela till en position med Nim-summa noll.

Exempel: Vilket är vinnande draget från positionen $\overline{20}+\overline{19}+\overline{13}$?

$$\overline{20}+\overline{19}+\overline{13} = (\overline{16}+\overline{4})+(\overline{16}+\overline{2}+\overline{1})+(\overline{8}+\overline{4}+\overline{1}) = \overline{8}+\overline{2} = \overline{10}$$

Vi söker en högstorlek n så att $\overline{n}+\overline{10}$ har högstorlek mindre än n.

Vinnande strategi i Nim

Vinnande strategi är alltså att alltid spela till en position med Nim-summa noll.

Exempel: Vilket är vinnande draget från positionen $\overline{20} + \overline{19} + \overline{13}$?

$$\overline{20} + \overline{19} + \overline{13} = (\overline{16} + \overline{4}) + (\overline{16} + \overline{2} + \overline{1}) + (\overline{8} + \overline{4} + \overline{1}) = \overline{8} + \overline{2} = \overline{10}$$

Vi söker en högstorlek n så att $\overline{n} + \overline{10}$ har högstorlek mindre än n.

För tredje högen har vi $\overline{13} + \overline{10} = (\overline{8} + \overline{4} + \overline{1}) + (\overline{8} + \overline{2}) = \overline{4} + \overline{2} + \overline{1} = \overline{7}$.
Så vinnande draget är att reducera tredje högen till $\overline{7}$, då får vi positionen

$$\overline{20} + \overline{19} + \overline{7} = (\overline{16} + \overline{4}) + (\overline{16} + \overline{2} + \overline{1}) + (\overline{4} + \overline{2} + \overline{1}) = 0$$

Nimbers för Hästhopp

Mex

Man kan visa att i ett opartiskt spel där alla drag är Nimbers så kan spelet skrivas som ett enda Nimber:

$$\{\overline{n}_1, \overline{n}_2, \overline{n}_3, \ldots, \overline{n}_k\} = \overline{\mathrm{mex}(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k)}$$

mex står för **minimalt exkluderat tal**.

Nimbers för Hästhopp

Mex

Man kan visa att i ett opartiskt spel där alla drag är Nimbers så kan spelet skrivas som ett enda Nimber:

$$\{\overline{n}_1, \overline{n}_2, \overline{n}_3, \ldots, \overline{n}_k\} = \overline{\mathrm{mex}(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k)}$$

mex står för **minimalt exkluderat tal**.

Till exempel: $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{2}\} = \overline{\mathrm{mex}}(0, 1, 2, 5, 7) = \overline{3}$

Nimbers för Hästhopp

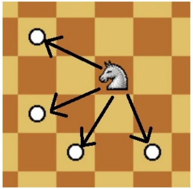
Mex

Man kan visa att i ett opartiskt spel där alla drag är Nimbers så kan spelet skrivas som ett enda Nimber:

$$\{\overline{n}_1, \overline{n}_2, \overline{n}_3, \ldots, \overline{n}_k\} = \overline{\mathrm{mex}(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k)}$$

mex står för **minimalt exkluderat tal**.

Till exempel: $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{2}\} = \overline{\mathrm{mex}}(0, 1, 2, 5, 7) = \overline{3}$



1	1	2	3	1	1	2	1
1	1	2	2	1	2	2	2
0	0	2	4	0	0	2	1
0	0	2	3	0	0	1	1
1	1	2	1	3	4	2	3
1	2	2	2	3	2	2	2
0	0	2	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1

Sprague-Grundys Sats

Sats

Varje *opartiskt* spel är equivalent ett Nimber $\overline{n}$, alltså med ett Nim-spel med en hög.
(Eventuellt med vissa reversibla drag tillagda)

Sprague-Grundys Sats

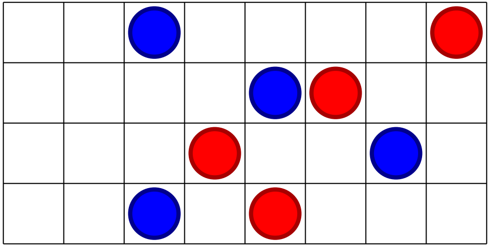
Sats

Varje *opartiskt* spel är equivalent ett Nimber $\overline{n}$, alltså med ett Nim-spel med en hög.
(Eventuellt med vissa reversibla drag tillagda)

Roland Sprague (1894-1967) och Patrick Michael Grundy (1917-1959) bevisade satsen oberoende av varandra.

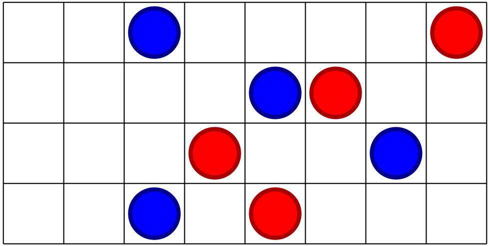
Northcotts spel igen

Vilket drag är bäst för blå nedan?



Northcotts spel igen

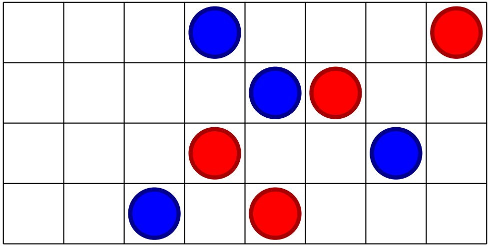
Vilket drag är bäst för blå nedan?



$G = \overline{4} + \overline{0} + \overline{2} + \overline{1}$. Högstorlekarna är avstånden mellan röd och blå plupp i varje rad.

Northcotts spel igen

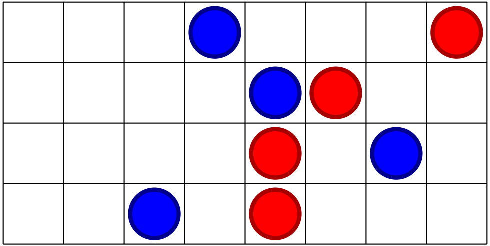
Vilket drag är bäst för blå nedan?



$G = \overline{4} + \overline{0} + \overline{2} + \overline{1}$. Högstorlekarna är avstånden mellan röd och blå plupp i varje rad.

Northcotts spel igen

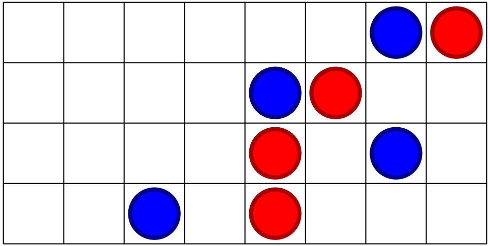
Vilket drag är bäst för blå nedan?



$G = \overline{4} + \overline{0} + \overline{2} + \overline{1}$. Högstorlekarna är avstånden mellan röd och blå plupp i varje rad.

Northcotts spel igen

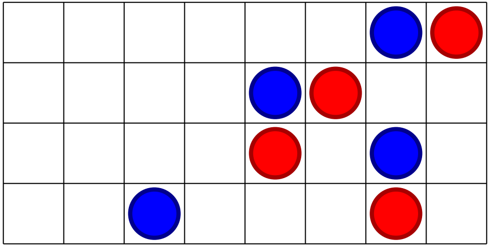
Vilket drag är bäst för blå nedan?



$G = \overline{4} + \overline{0} + \overline{2} + \overline{1}$. Högstorlekarna är avstånden mellan röd och blå plupp i varje rad.

Northcotts spel igen

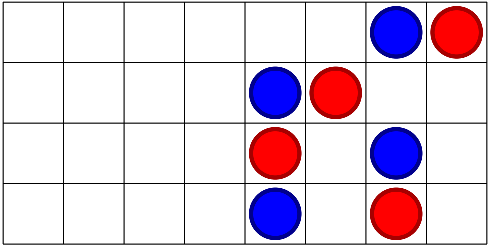
Vilket drag är bäst för blå nedan?



$G = \overline{4} + \overline{0} + \overline{2} + \overline{1}$. Högstorlekarna är avstånden mellan röd och blå plupp i varje rad. Vissa drag är nu **reversibla**, när motståndaren flyttar pluppen iväg från din plupp kan du kancellera draget genom att flytta din plupp lika många steg mot motståndaren.

Northcotts spel igen

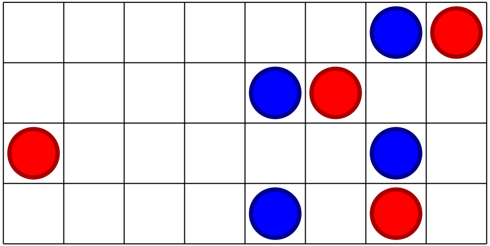
Vilket drag är bäst för blå nedan?



$G = \overline{4} + \overline{0} + \overline{2} + \overline{1}$. Högstorlekarna är avstånden mellan röd och blå plupp i varje rad. Vissa drag är nu **reversibla**, när motståndaren flyttar pluppen iväg från din plupp kan du kancellera draget genom att flytta din plupp lika många steg mot motståndaren.

Northcotts spel igen

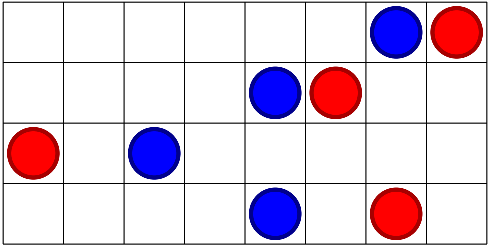
Vilket drag är bäst för blå nedan?



$G = \overline{4} + \overline{0} + \overline{2} + \overline{1}$. Högstorlekarna är avstånden mellan röd och blå plupp i varje rad. Vissa drag är nu **reversibla**, när motståndaren flyttar pluppen iväg från din plupp kan du kancellera draget genom att flytta din plupp lika många steg mot motståndaren.

Northcotts spel igen

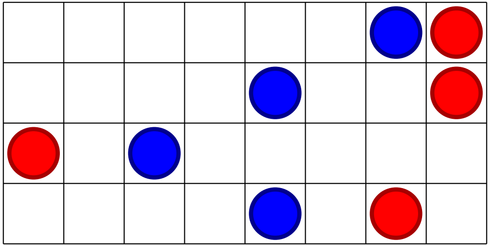
Vilket drag är bäst för blå nedan?



$G = \overline{4} + \overline{0} + \overline{2} + \overline{1}$. Högstorlekarna är avstånden mellan röd och blå plupp i varje rad. Vissa drag är nu **reversibla**, när motståndaren flyttar pluppen iväg från din plupp kan du kancellera draget genom att flytta din plupp lika många steg mot motståndaren.

Northcotts spel igen

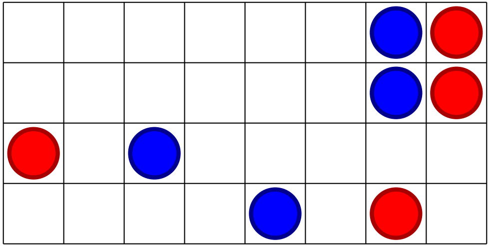
Vilket drag är bäst för blå nedan?



$G = \overline{4} + \overline{0} + \overline{2} + \overline{1}$. Högstorlekarna är avstånden mellan röd och blå plupp i varje rad. Vissa drag är nu **reversibla**, när motståndaren flyttar pluppen iväg från din plupp kan du kancellera draget genom att flytta din plupp lika många steg mot motståndaren.

Northcotts spel igen

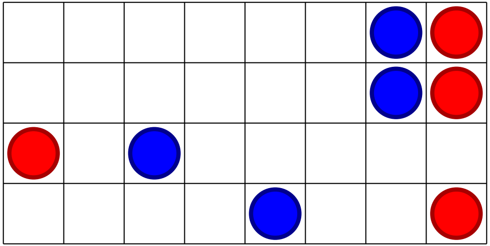
Vilket drag är bäst för blå nedan?



$G = \overline{4} + \overline{0} + \overline{2} + \overline{1}$. Högstorlekarna är avstånden mellan röd och blå plupp i varje rad. Vissa drag är nu **reversibla**, när motståndaren flyttar pluppen iväg från din plupp kan du kancellera draget genom att flytta din plupp lika många steg mot motståndaren.

Northcotts spel igen

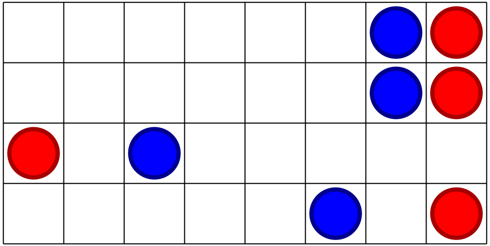
Vilket drag är bäst för blå nedan?



$G = \overline{4} + \overline{0} + \overline{2} + \overline{1}$. Högstorlekarna är avstånden mellan röd och blå plupp i varje rad. Vissa drag är nu **reversibla**, när motståndaren flyttar pluppen iväg från din plupp kan du kancellera draget genom att flytta din plupp lika många steg mot motståndaren.

Northcotts spel igen

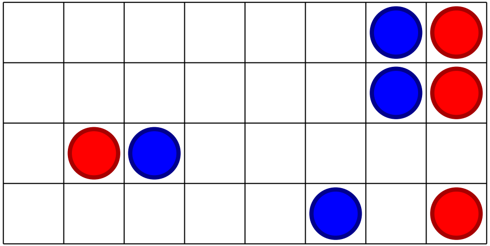
Vilket drag är bäst för blå nedan?



$G = \overline{4} + \overline{0} + \overline{2} + \overline{1}$. Högstorlekarna är avstånden mellan röd och blå plupp i varje rad. Vissa drag är nu **reversibla**, när motståndaren flyttar pluppen iväg från din plupp kan du kancellera draget genom att flytta din plupp lika många steg mot motståndaren.

Northcotts spel igen

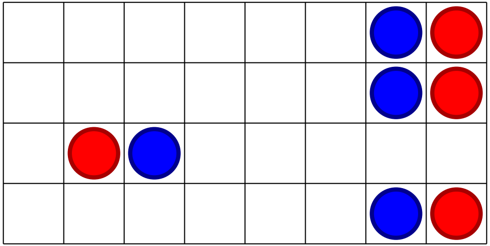
Vilket drag är bäst för blå nedan?



$G = \overline{4} + \overline{0} + \overline{2} + \overline{1}$. Högstorlekarna är avstånden mellan röd och blå plupp i varje rad. Vissa drag är nu **reversibla**, när motståndaren flyttar pluppen iväg från din plupp kan du kancellera draget genom att flytta din plupp lika många steg mot motståndaren.

Northcotts spel igen

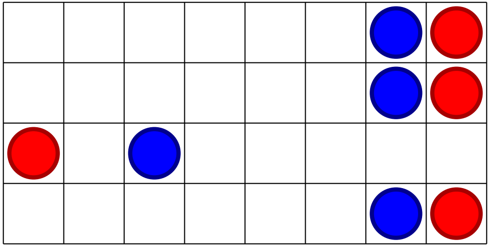
Vilket drag är bäst för blå nedan?



$G = \overline{4} + \overline{0} + \overline{2} + \overline{1}$. Högstorlekarna är avstånden mellan röd och blå plupp i varje rad. Vissa drag är nu **reversibla**, när motståndaren flyttar pluppen iväg från din plupp kan du kancellera draget genom att flytta din plupp lika många steg mot motståndaren.

Northcotts spel igen

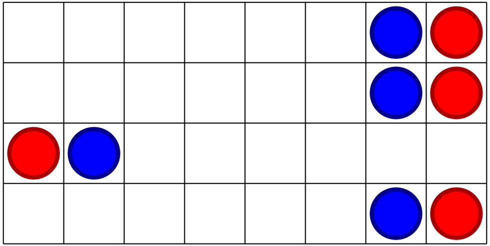
Vilket drag är bäst för blå nedan?



$G = \overline{4} + \overline{0} + \overline{2} + \overline{1}$. Högstorlekarna är avstånden mellan röd och blå plupp i varje rad. Vissa drag är nu **reversibla**, när motståndaren flyttar pluppen iväg från din plupp kan du kancellera draget genom att flytta din plupp lika många steg mot motståndaren.

Northcotts spel igen

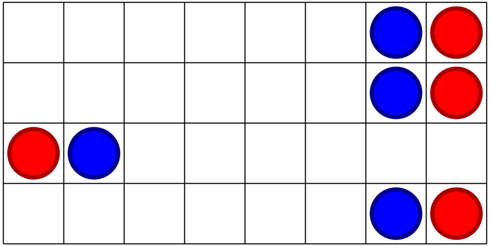
Vilket drag är bäst för blå nedan?



$G = \overline{4} + \overline{0} + \overline{2} + \overline{1}$. Högstorlekarna är avstånden mellan röd och blå plupp i varje rad. Vissa drag är nu **reversibla**, när motståndaren flyttar pluppen iväg från din plupp kan du kancellera draget genom att flytta din plupp lika många steg mot motståndaren.

Northcotts spel igen

Vilket drag är bäst för blå nedan?



$G = \overline{4} + \overline{0} + \overline{2} + \overline{1}$. Högstorlekarna är avstånden mellan röd och blå plupp i varje rad. Vissa drag är nu **reversibla**, när motståndaren flyttar pluppen iväg från din plupp kan du kancellera draget genom att flytta din plupp lika många steg mot motståndaren. Blå vinner!

Del V

Aritmetik för spel

Aritmetik för några små spel

Vi hade $* = \{0|0\}$ och $\uparrow = \{0|*\}$ och $\downarrow = \{0|*\}$. Vi har

$$* + * = \{*|*\} = 0$$

Aritmetik för några små spel

Vi hade $* = \{0|0\}$ och $\uparrow = \{0|*\}$ och $\downarrow = \{0|*\}$. Vi har

$$* + * = \{*|*\} = 0$$

$$\uparrow + \downarrow = 0$$

Aritmetik för några små spel

Vi hade $* = \{0|0\}$ och $\uparrow = \{0|*\}$ och $\downarrow = \{0|*\}$. Vi har

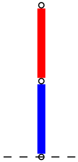
$$* + * = \{*|*\} = 0$$

$$\uparrow + \downarrow = 0$$

$$\{\uparrow | \downarrow\} = *$$

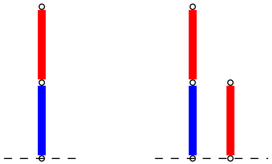
Ett litet övertag

Vi tittar på Hackenbushversionan av $\{0|1\}$
Vem vinner i följande position?



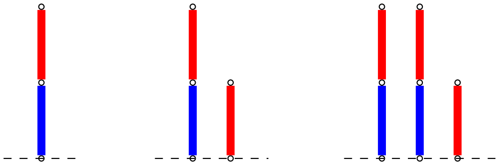
Ett litet övertag

Vi tittar på Hackenbushversionan av $\{0|1\}$
Vem vinner i följande position?



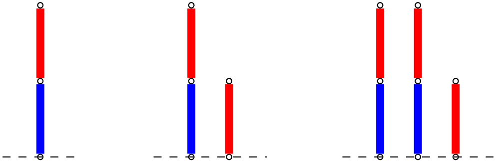
Ett litet övertag

Vi tittar på Hackenbushversionan av $\{0|1\}$
Vem vinner i följande position?



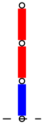
Ett litet övertag

Vi tittar på Hackenbushversionan av $\{0|1\}$
Vem vinner i följande position?

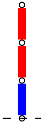


Detta visar att den ursprungliga positionen motsvarar precis ett halvt drags övertag för blå: $\frac{1}{2} := \{0|1\}$

Många spelvärden

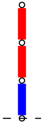
Vilket värde har positionen  $= \{0|1, \frac{1}{2}\} = \{0|\frac{1}{2}\}$?

Många spelvärden

Vilket värde har positionen  $= \{0|1, \frac{1}{2}\} = \{0|\frac{1}{2}\}$?

$\{0|\frac{1}{2}\} + \{0|\frac{1}{2}\} = \frac{1}{2}$, så värdet är $\frac{1}{4}$.

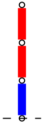
Många spelvärden

Vilket värde har positionen  $= \{0|1, \frac{1}{2}\} = \{0|\frac{1}{2}\}$?

$\{0|\frac{1}{2}\} + \{0|\frac{1}{2}\} = \frac{1}{2}$, så värdet är $\frac{1}{4}$.

Mer generellt kan man visa att en blå bas med k röda grenar ovanpå har värdet $\frac{1}{2^k}$.

Många spelvärden

Vilket värde har positionen  $= \{0|1, \frac{1}{2}\} = \{0|\frac{1}{2}\}$?

$\{0|\frac{1}{2}\} + \{0|\frac{1}{2}\} = \frac{1}{2}$, så värdet är $\frac{1}{4}$.

Mer generellt kan man visa att en blå bas med k röda grenar ovanpå har värdet $\frac{1}{2^k}$.

En Hackenbush-sats

- För varje dyadiskt rationellt tal r så finns det en blåröd Hackenbush-position vars värde är r.
- Varje numeriskt spel med ändligt många positioner kan modelleras som en blåröd Hackenbush position.

Enkelhetsregeln

Sats

Låt $G = \{G^L | G^R\}$ vara ett numeriskt spel. Låt H vara spelet från tidigast generation så att $G^R < H < G^L$. Då är

$$G = H$$

Enkelhetsregeln

Sats

Låt $G = \{G^L | G^R\}$ vara ett numeriskt spel. Låt H vara spelet från tidigast generation så att $G^R < H < G^L$. Då är

$$G = H$$

Till exempel, $\{0|1\} = \frac{1}{2}$

Enkelhetsregeln

Sats

Låt $G = \{G^L | G^R\}$ vara ett numeriskt spel. Låt H vara spelet från tidigast generation så att $G^R < H < G^L$. Då är

$$G = H$$

Till exempel, $\{0|1\} = \frac{1}{2}$
Till exempel, $\{\frac{5}{2}|\frac{9}{2}\} = 3$.

Positivt?

Uppgift

Visa att $\uparrow = \{0|*\}$ är positivt och infinitesimalt, alltså att

$$0 < \uparrow < \frac{1}{2^k}$$

för varje $k \in \mathbb{N}$.

Positivt?

Uppgift

Visa att $\uparrow = \{0|*\}$ är positivt och infinitesimalt, alltså att

$$0 < \uparrow < \frac{1}{2^k}$$

för varje $k \in \mathbb{N}$.

Uppgift

Visa att

$$* \not\geq 0 \qquad * + \uparrow \not\geq 0 \qquad * + \uparrow + \uparrow > 0$$

Att jämföra litet med smått

Låt $\epsilon := \{0|\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ och $\uparrow = \{0|*\}$. Båda dessa spel är mindre än varje bråktal. Vilken är minst?

Att jämföra litet med smått

Låt $\epsilon := \{0|\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ och $\uparrow = \{0|*\}$. Båda dessa spel är mindre än varje bråktal. Vilken är minst?

Vi beräknar

$$\epsilon - \uparrow = \epsilon + \downarrow = \epsilon + \{*|0\} = \{0 + \downarrow, * + \epsilon | \frac{1}{2^k} + \downarrow, \epsilon + 0\}$$

Att jämföra litet med smått

Låt $\epsilon := \{0|\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ och $\uparrow = \{0|*\}$. Båda dessa spel är mindre än varje bråktal. Vilken är minst?

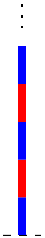
Vi beräknar

$$\epsilon - \uparrow = \epsilon + \downarrow = \epsilon + \{*|0\} = \{0 + \downarrow, * + \epsilon | \tfrac{1}{2^k} + \downarrow, \epsilon + 0\}$$

$$\{* + \epsilon | \tfrac{1}{2^k} + \downarrow\} > 0 \qquad \text{eftersom blå alltid vinner.}$$

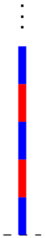
Oändlig Hackenbush

Vilket värde har spelet G?



Oändlig Hackenbush

Vilket värde har spelet G?



$G = \frac{2}{3}$ eftersom man kan visa att $G + G + G - 2 = 0$.

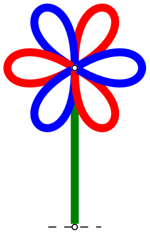
Reella tal som Hackenbush

Sats

Varje reellt tal α kan representeras som en Hackenbush-sträng. Strängen blir oändlig när α inte är ett dyadiskt bråktal.

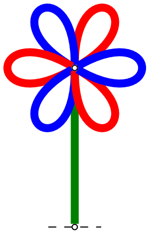
En luddig blomma

Vad är följande Hackenbush position värd?



En luddig blomma

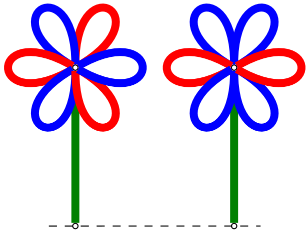
Vad är följande Hackenbush position värd?



Klipper man den gröna stjälken tar spelet slut så den som börjar vinner. Detta spel är ”luddigt”.

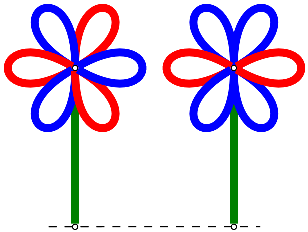
Blommor

Hur mycket är följande position värd?



Blommor

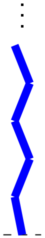
Hur mycket är följande position värd?



Den som klipper första stjälken förlorar, så blå vinner eftersom det finns fler blå kronblad.

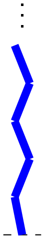
Hackenbush positioner som inte är reella tal

Vilket värde har spelet G?



Hackenbush positioner som inte är reella tal

Vilket värde har spelet G?



$$G = \omega = \{0, 1, 2, \dots \mid \}$$

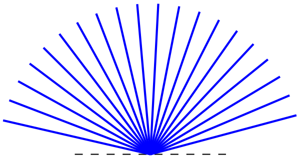
Notera att för alla heltal n gäller $\omega > n$ eftersom blå alltid vinner $\omega - n$ (genom att spela ω till ett tal $\geq n$). Så ω är oändligt stort.

Del VI

Loopiga spel

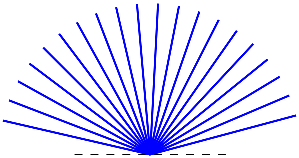
Större än oändligheten?

Betrakta spelet nedan med oändligt många blå grenar.



Större än oändligheten?

Betrakta spelet nedan med oändligt många blå grenar.

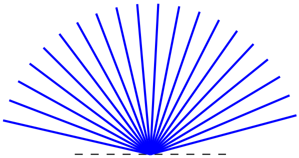


Detta spel kallas **on** och uppfyller $\textbf{on} = \{\textbf{on} | \}$.

Vi har $\textbf{on} + x = \textbf{on}$ för alla numeriska spel x.

Större än oändligheten?

Betrakta spelet nedan med oändligt många blå grenar.



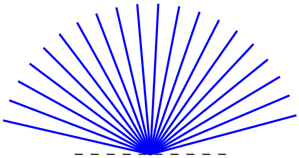
Detta spel kallas **on** och uppfyller $\textbf{on} = \{\textbf{on}|\}$.

Vi har $\textbf{on} + x = \textbf{on}$ för alla numeriska spel x.

Dess röda motsvarighet $-\textbf{on}$ kallas **off** och uppfyller $\textbf{off} = \{|\textbf{off}\}$.

Större än oändligheten?

Betrakta spelet nedan med oändligt många blå grenar.



Detta spel kallas **on** och uppfyller $\mathbf{on} = \{\mathbf{on}|\}$.

Vi har $\mathbf{on} + x = \mathbf{on}$ för alla numeriska spel x.

Dess röda motsvarighet $-\mathbf{on}$ kallas **off** och uppfyller $\mathbf{off} = \{|\mathbf{off}\}$.

$\mathbf{on} + \mathbf{off} \neq 0$ eftersom detta spel aldrig tar slut. Spelet

Vi definierar $\mathbf{dud} := \mathbf{on} + \mathbf{off}$

Vad är tornet värt?

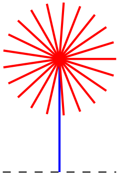
Vad är tornet värt?

Man ser att detta spel infinitesimalt - positivt men mindre än alla $\frac{1}{2^k}$.

Detta spel kallas $\frac{1}{\omega}$, det är också numeriskt.

En nästan värdelös blomma?

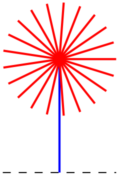
Blomman nedan (oändligt många kronblad) är också positiv och infinitesimal



Är den mer eller mindre värd än $\frac{1}{\omega}$? Än $\uparrow$? Än $\Uparrow := \uparrow + \uparrow$?

En nästan värdelös blomma?

Blomman nedan (oändligt många kronblad) är också positiv och infinitesimal



Är den mer eller mindre värd än $\frac{1}{\omega}$? Än $\uparrow$? Än $\Uparrow := \uparrow + \uparrow$?

Detta spel kallas **over** och uppfyller $\textbf{over} = \{\textbf{over}|0\}$. Vi har

$$0 < \uparrow < \Uparrow < \textbf{over} < \frac{1}{\omega}$$

Loopiga spel

Tar vi bort kravet att kombinatoriska spel måste ta slut efter ändligt många drag får en klass spel som kallas **loopiga**. Ett par sådana spel:

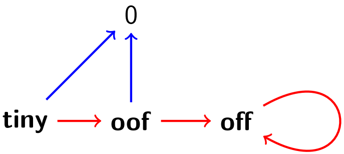
$$
\begin{aligned}
\textbf{on} &= \{\textbf{on}|\} \\
\textbf{off} &= \{|\textbf{off}\} \\
\textbf{dud} &= \{\textbf{dud}|\textbf{dud}\} \\
\textbf{over} &= \{0|\textbf{over}\} \\
\textbf{under} &= \{\textbf{under}|0\} \\
\textbf{hot} &= \{\textbf{on}|\textbf{off}\} \\
\textbf{oof} &= \{0|\textbf{off}\} \\
\textbf{ono} &= \{\textbf{on}|0\} \\
\textbf{hi} &= \{\textbf{on}|\textbf{oof}\} \\
\textbf{lo} &= \{\textbf{ono}|\textbf{off}\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\textbf{tiny} &= \{0|\textbf{oof}\} \\
\textbf{miny} &= \{\textbf{ono}|0\} \\
\textbf{ace} &= \{0|\textbf{tiny}\} \\
\textbf{deuce} &= \{0|\textbf{ace}\} \\
\textbf{joker} &= \{0|\{0|\{-\textbf{ace}|\textbf{off}\}\}\} \\
\clubsuit &= \{\{\textbf{deuce}|0\}|0\} \\
\spadesuit &= \{0|\bar{1}\spadesuit\} \\
\diamondsuit &= \{\textbf{ace}|\{-\textbf{joker}|0\}\} \\
\heartsuit &= \{\{0|\textbf{joker}\}|-\textbf{ace}\} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Visualisering av loopiga spel

Detta är inte Hackenbush-diagram, utan noderna är spelpositioner och de färgade pilarna indikerar tillgängliga drag för blå och röd.

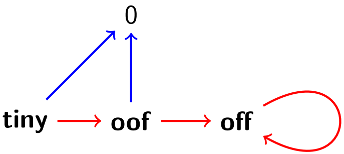
Plommonträdet för spelet **tiny** är



Visualisering av loopiga spel

Detta är inte Hackenbush-diagram, utan noderna är spelpositioner och de färgade pilarna indikerar tillgängliga drag för blå och röd.

Plommonträdet för spelet **tiny** är



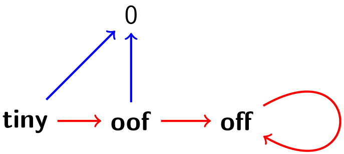
Sats

tiny är det minsta positiva spelet. Det är mindre än alla andra spel $G > 0$.

Visualisering av loopiga spel

Detta är inte Hackenbush-diagram, utan noderna är spelpositioner och de färgade pilarna indikerar tillgängliga drag för blå och röd.

Plommonträdet för spelet **tiny** är



Sats

tiny är det minsta positiva spelet. Det är mindre än alla andra spel $G > 0$.

Bevis: diagrammet visar att **tiny** > 0 eftersom blå alltid vinner. Men röd har en vinnande strategi i **tiny** $- G$: att spela mot **off**, blå kan aldrig spela **tiny**-komponenten till 0 eftersom röd då vinner spelet $-G$.

Addition av loopiga spel

<table>
<tr><th></th><th>ono</th><th>hi</th><th>lo</th><th>oof</th><th>tiny & miny</th></tr>
<tr><td>ono</td><td>on</td><td>on & ono</td><td>ono & hot</td><td>hi & lo</td><td>on|tiny & ono</td></tr>
<tr><td>hi</td><td>on & ono</td><td>on & hi</td><td>hi & lo</td><td>hot & oof</td><td>hi & on||miny|off</td></tr>
<tr><td>lo</td><td>ono & hot</td><td>hi & lo</td><td>lo & off</td><td>oof & off</td><td>on|tiny||off & lo</td></tr>
<tr><td>oof</td><td>hi & lo</td><td>hot & oof</td><td>oof & off</td><td>off</td><td>oof & miny|off</td></tr>
</table>

Del VII

Varma och kalla spel

Numeriska spel är kalla

I numeriska spel vill man inte göra drag.

$$\frac{1}{2} = \{0|1\}$$

Här minskar vänstra spelaren spelets värde till 0 genom att göra ett drag, och högra spelaren ökar värdet till 1 genom att göra ett drag.

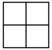
Numeriska spel är kalla

I numeriska spel vill man inte göra drag.

$$\frac{1}{2} = \{0|1\}$$

Här minskar vänstra spelaren spelets värde till 0 genom att göra ett drag, och högra spelaren ökar värdet till 1 genom att göra ett drag.

Men i andra spel tjänar man på att göra första draget, som i Domineering-positionerna nedan

 $= \{1| -1\}$

Switchar

Spel som inte är kalla kallas varma.

Definition

En **switch** är ett spel på form $S = \{x|y\}$ där x och y är numeriska, men $x \not< y$.
Vi definierar switchens **medelvärde** som $m = \frac{x+y}{2}$ och dess **temperatur** som $t = |x-y|$, och vi skriver $S = m \pm \frac{t}{2}$

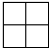
Switchar

Spel som inte är kalla kallas varma.

Definition

En **switch** är ett spel på form $S = \{x|y\}$ där x och y är numeriska, men $x \not< y$.
Vi definierar switchens **medelvärde** som $m = \frac{x+y}{2}$ och dess **temperatur** som $t = |x-y|$, och vi skriver $S = m \pm \frac{t}{2}$

Exempel:

 $= \{1| -1\} = 0 \pm 1 = \pm 1$

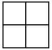
Switchar

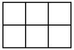
Spel som inte är kalla kallas varma.

Definition

En **switch** är ett spel på form $S = \{x|y\}$ där x och y är numeriska, men $x \not< y$.
Vi definierar switchens **medelvärde** som $m = \frac{x+y}{2}$ och dess **temperatur** som $t = |x - y|$, och vi skriver $S = m \pm \frac{t}{2}$

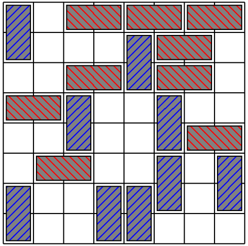
Exempel:

 $= \{1| -1\} = 0 \pm 1 = \pm 1$

 $= \{2| -\frac{1}{2}\} = \dfrac{3}{4} \pm \dfrac{5}{4}$

Sats

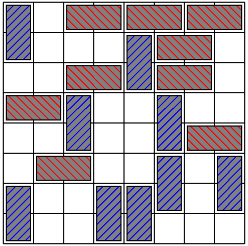
Om ett varmt spel är en summa av numeriska spel och switchar så är den vinnande strategin att alltid spela i den varmaste komponenten av spelet.



t

Sats

Om ett varmt spel är en summa av numeriska spel och switchar så är den vinnande strategin att alltid spela i den varmaste komponenten av spelet.

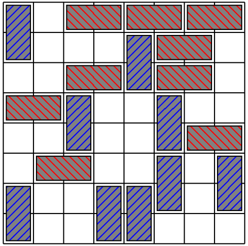


t

$$= \{-1|-1\} + \{0|1\} + \{0|0\} + \{\tfrac{1}{2}|-2\} + \{1|-1\} + \{0|1\}$$
$$= (-1 \pm 0) + \frac{1}{2} + (\tfrac{-3}{4} \pm \tfrac{5}{4}) + (0 \pm 1) + \tfrac{1}{2}$$

Sats

Om ett varmt spel är en summa av numeriska spel och switchar så är den vinnande strategin att alltid spela i den varmaste komponenten av spelet.



t

$$= \{-1|-1\} + \{0|1\} + \{0|0\} + \{\tfrac{1}{2}|-2\} + \{1|-1\} + \{0|1\}$$
$$= (-1 \pm 0) + \frac{1}{2} + (\tfrac{-3}{4} \pm \tfrac{5}{4}) + (0 \pm 1) + \tfrac{1}{2}$$

Medeltemperaturen för hela spelet är $-1 + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}$
Efter switcharna lösts upp kommer därför temperaturen att vara $-\frac{3}{4} \pm (\frac{5}{4} - 1 + 0) = -\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}$, alltså -1 eller $-\frac{1}{2}$ beroende på vem som börjar. Slutsats: Röd har en vinnande strategi!

Att kyla ned spel

Sats

Låt t vara ett numeriskt spel. För ett spel G definierar vi

$$G_t = \{G_t^L - t | G_t^R + t\}$$

operationen $G \mapsto G_t$ kallas **nedkylning med** t.
Intuitivt kan vi tänka att vi lägger till en skatt t på att göra drag.

Att kyla ned spel

Sats

Låt t vara ett numeriskt spel. För ett spel G definierar vi

$$G_t = \{G_t^L - t | G_t^R + t\}$$

operationen $G \mapsto G_t$ kallas **nedkylning med** t.
Intuitivt kan vi tänka att vi lägger till en skatt t på att göra drag.

Exempel: Spelet $G = \{11|3\} = 7 \pm 4$ är varmt, men dess nedkylning $G_4 = 7$ är numeriskt, alltså kallt.

Termografer

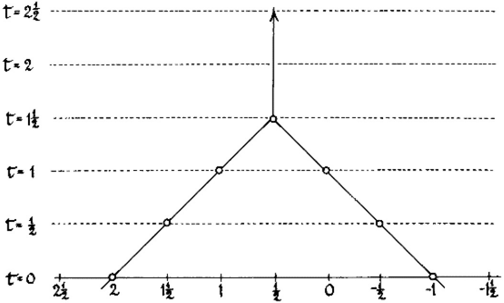
Ett varmt spel G övergår efter ett tag till ett kallt spel med något numeriskt värde $L(G)$ eller $R(G)$-beroende på vem som börjar.

I spelets **termograf** plottar vi t i y-led och slutvärdena $L(G_t)$ och $R(G_t)$.

Termografer

Ett varmt spel G övergår efter ett tag till ett kallt spel med något numeriskt värde $L(G)$ eller $R(G)$- beroende på vem som börjar.

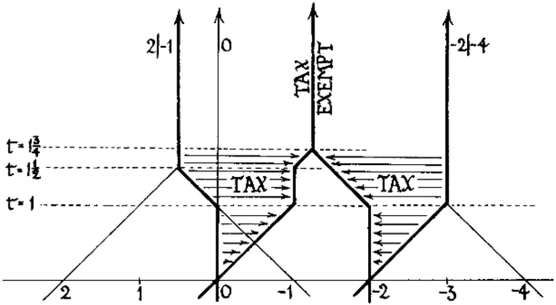
I spelets **termograf** plottar vi t i y-led och slutvärdena $L(G_t)$ och $R(G_t)$.



Switchar har en enkel termograf, ovan syns termografen för $\{2|-1\}$.

Mer avancerade termografer

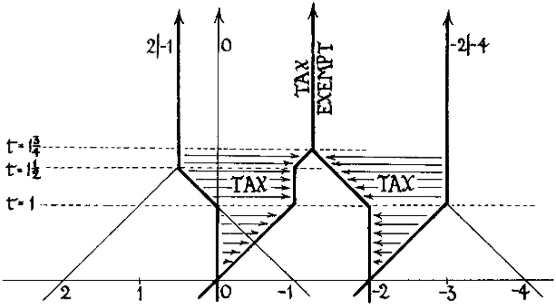
I varma spel som inte är en summa av switchar kan man ta fram termografen från komponenternas termografer:



Hur man tar fram termografen för $\{\{2|-1\}, 0|\{-2|-4\}\}$

Mer avancerade termografer

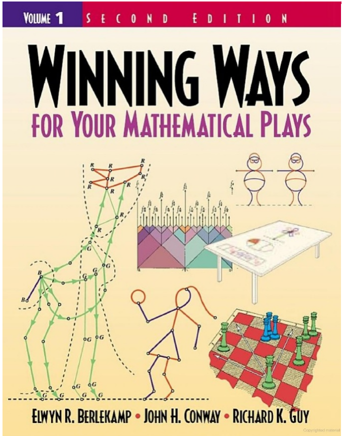
I varma spel som inte är en summa av switchar kan man ta fram termografen från komponenternas termografer:

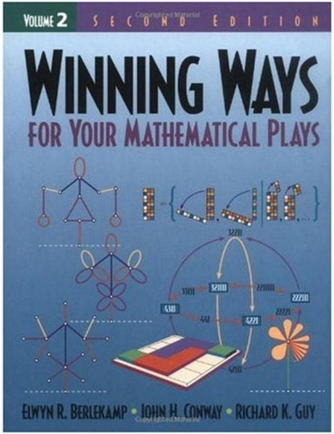


Hur man tar fram termografen för $\{\{2|-1\},0|\{-2|-4\}\}$
Med hjälp av dessa grafer kan man ta fram en vinnande strategi - **termostraten**- i många varma spel.

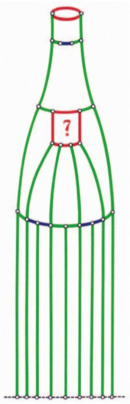
Boktips

Presentationen är baserad på böckerna
Winning Ways for your Mathematical Plays (Vol 1-4), av Av Berlekamp, Conway, Guy.

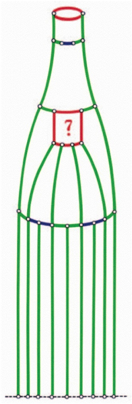




Vad är flaskan?



Vad är flaskan?



$7 \uparrow$

Några kapitelnamn i Winning Ways

- The Tweedledum and Tweedledee argument
- What are flowers worth?
- How Childish can you get?
- The Opening Dissection of Toads-and-Frogs
- Does the Excitement show?
- All Remote Stars Agree
- Cooling the Childrens Party
- Atomic Weights of Jungles
- How Big is a Redwood Bed?
- Tracks Cleared through the Amazing Jungle
- Go Fly a Kite!
- How Remote is a Horse?
- Plumtrees are Nicer!
- A Summary of Some Sum Properties
- Sweets and Nuts, and Maybe a Date?
- Sunny and Loony positions
- Animals and their Genus