Om talet π = 3,1415926535...

Hans Lundmark, MAI

TATA40 Matematiska utblickar

(sept 2023)

Talet π är känt sedan antiken som förhållandet mellan **omkretsen** O och **diametern** d hos en cirkel:

$$O = \pi d$$

(Det är inte helt självklart att det är samma förhållande för alla cirklar! Så är det t.ex. inte i sfärisk eller hyperbolisk geometri.)

Samma formel för **omkretsen**, men uttryckt med **radien** r istället:

$$O = 2\pi r$$

Och talet π förekommer även i formeln för **arean** A hos en cirkelskiva med radien r :

$$A = \pi r^2$$

Motsvarande formler i tre dimensioner är kanske också bekanta. Även dessa involverar talet π.

Arean av en **sfär** med radien r :

$$A = 4\pi r^2$$

Volymen av ett **klot** med radien r :

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

- **Egypten** (Rhindpapyrusen c:a 1550 f.Kr.):

$$A \approx \left(\tfrac{8}{9} d\right)^2 \qquad (\text{dvs. } \pi \approx \left(\tfrac{16}{9}\right)^2 = 3{,}16049\ldots)$$

Wikipedia: Rhind Mathematical Papyrus, Alexander Henry Rhind

- **Arkimedes** (200-talet f.Kr.):

$$\underbrace{3 + \tfrac{10}{71}}_{=3{,}140845\ldots} < \pi < \underbrace{3 + \tfrac{1}{7}}_{=22/7=3{,}142857\ldots}$$

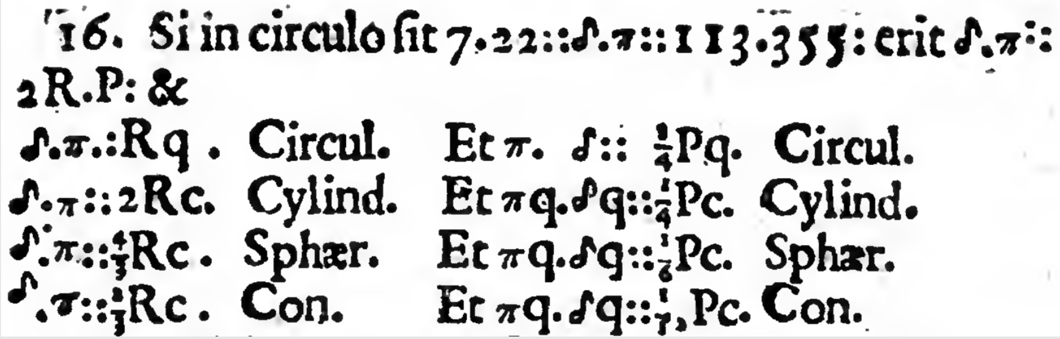
(Via omkrets av in- och omskriven regelbunden 96-hörning; se s. 18.)

- Ganska dåliga approximationer som $\sqrt{10} = 3{,}162\ldots$ och $3 + \frac{1}{8} = 3{,}125$ (eller t.o.m. bara 3) har använts på många platser och vid många tidpunkter.

Notation

- Notationen med den grekiska bokstaven π kommer **inte** från antikens greker.
- William Oughtred 1647: *Clavis Mathematicae*, kap. 18

$$\frac{\pi}{\delta} = \frac{\text{periferi}}{\text{diameter}} \qquad \left(\approx \frac{22}{7} \text{ eller } \frac{355}{113}\right)$$



16. Si in circulo sit $7.22::\delta.\pi::113.355$: erit $\delta.\pi::$ 2R.P: &

$\delta.\pi::$Rq.	Circul.	Et $\pi.\delta::\frac{1}{4}$Pq.	Circul.
$\delta.\pi::$2Rc.	Cylind.	Et $\pi q.\delta q::\frac{1}{4}$Pc.	Cylind.
$\delta.\pi::\frac{4}{3}$Rc.	Sphær.	Et $\pi q.\delta q::\frac{1}{6}$Pc.	Sphær.
$\delta.\pi::\frac{2}{3}$Rc.	Con.	Et $\pi q.\delta q::\frac{1}{12}$Pc.	Con.

- Johann Christoph Sturm 1689: *Mathesis Enucleata*, s. 81–82

$$e = 3{,}14\ldots$$

PRomptum autem hinc eſt inferre, ſi diameter alicujus circuli ponatur *a*, circumferentiam appellari poſſe *ea*, (quæcunque enim inter eas fuerit ratio, illius nomen poteſt deſi-

F gnari

82)o(

gnari literâ *e*) & aream juxta Conſect. 2. Def. XV. fore $\frac{1}{4}$ *eaa*.

Troligen första gången en ensam bokstav användes för förhållandet mellan omkrets och diameter.

- William Jones 1706: *Synopsis Palmariorum Matheseos*, s. 263

$$\pi = 3{,}14\ldots$$

There are various other ways of finding the *Lengths*, or *Areas* of particular *Curve Lines*, or *Planes*, which may very much facilitate the Practice; as for Inſtance, in the *Circle*, the Diameter is to Circumference as 1 to

$$\overline{\frac{16}{5} - \frac{4}{239}} - \frac{1}{3}\overline{\frac{16}{5^3} - \frac{4}{239^3}} + \frac{1}{5}\overline{\frac{16}{5^5} - \frac{4}{239^5}} -, \&c. =$$

3.14159, &c. $= \pi$. This *Series* (among others for the ſame purpoſe, and drawn from the ſame Principle) I receiv'd from the Excellent Analyſt, and my much Eſteem'd Friend Mr. *John Machin*; and by means thereof, *Van Ceulen*'s Number, or that in Art. 64. 38. may be Examin'd with all deſireable Eaſe and Diſpatch.

Första gången bokstaven π användes ensamt för förhållandet.
(Jones använde dock även π i andra betydelser i samma bok.)

- Leonhard Euler 1748:
  Introductio in analysin infinitorum, vol. 1, kap. 8
  Berömd lärobok. Etablerade $\pi = 3{,}14\ldots$ som standard.

  I vissa andra skrifter använde dock Euler andra bokstäver (t.ex. c eller p) istället för π, eller använde π för andra vinklar än 180°, t.ex. 90°eller 360°.

  3Blue1Brown (Grant Sanderson) på YouTube: [How pi was almost 6.283185...]

> Ponamus ergo Radium Circuli ſeu Sinum totum eſſe $= 1$, atque ſatis liquet Peripheriam hujus Circuli in numeris rationalibus exacte exprimi non poſſe, per approximationes autem inventa eſt Semicircumferentia hujus Circuli eſſe $=$
> 3, 1415926535897932384626433832795028841971693993
> 75105820974944592307816406286208998628034825342 1
> 170679821480865132 7 230664709384 46 $+$, pro quo numero, brevitatis ergo, ſcribam π, ita ut ſit $\pi =$ Semicircumferentiæ Circuli, cujus Radius $= 1$, ſeu π erit longitudo Arcus 180 graduum.

Notera att han definierar π som båglängden hos en **halvcirkel** med radie 1, inte som förhållandet mellan cirkelns omkrets och diameter.

Ger 127 decimaler (med ett tryckfel: rödmarkerad sjua ska vara en åtta).

Pi eller tau?

- **Radien** betraktas numera som viktigare än **diametern**:

$$O = \pi \cdot d = \pi \cdot 2r = 2\pi \cdot r$$

  Så konstanten 2π är kanske mer fundamental än π?

- Somliga förespråkar att denna konstant ska kallas **tau**:

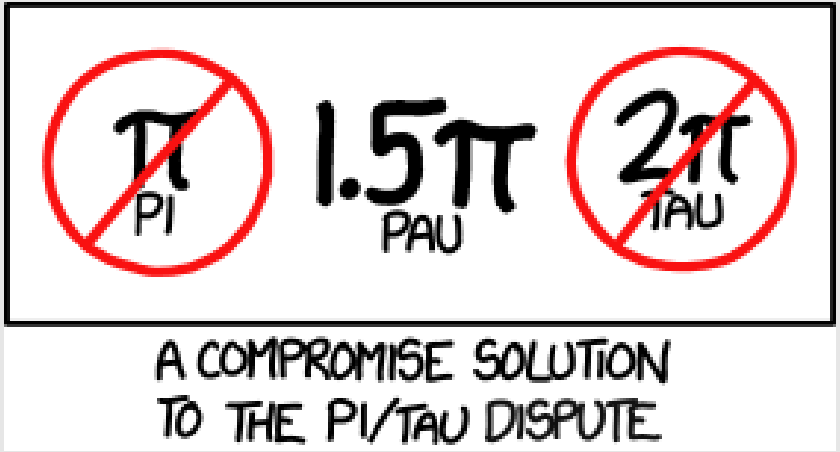
$$\boxed{\tau = 2\pi = 6{,}283185\ldots}$$

  (Och att man ska fira τ-dagen 28 juni istället för π-dagen 14 mars.)

- Sinus och cosinus är τ-periodiska funktioner.
- Uttrycket för cirkelns area blir $A = \frac{1}{2}\tau r^2$.

  (Jfr många andra kvadratiska uttryck där det är naturligt med en faktor $\frac{1}{2}$, t.ex. $\frac{1}{2}gt^2$ eller $\frac{1}{2}mv^2$.)

```
$ python
Python 3.7.2 (default, Jan 10 2019, 23:51:51)
[GCC 8.2.1 20181127] on linux
Type "help", "copyright", "credits" or "license" for more information.
>>> import math
>>> math.tau
6.283185307179586
```



xkcd.com/1292

Några andra möjliga sätt att definiera π

Via bestämd integral

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx \qquad \text{(Arean av en kvartscirkel.)}$$

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \text{(Båglängden av en kvartscirkel.)}$$

Via potensserie

Talet $\dfrac{\pi}{2}$ är det minsta positiva nollstället till funktionen

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad (x \in \mathbf{R})$$

Talen e och π är irrationella

- **Rationella** tal är sådana som skrivas som a/b där a och b är heltal ($b \neq 0$).

  Reella tal som inte är rationella kallas **irrationella**.

- Det är enkelt att visa att $\sqrt{2}$ är irrationellt. (Eller $\sqrt{n}$ för vilket $n \in \mathbf{N}$ som helst som inte råkar vara kvadraten av ett heltal.)

- Euler visade 1737 att talet $e = 2{,}7182818284590\ldots$ är irrationellt.

  Wikipedia: Proof that e is irrational

- Johann Heinrich Lambert visade 1766 att talet π är irrationellt.

  Mathologer (Burkard Polster) på YouTube:
  Pi is IRRATIONAL: animation of a gorgeous proof

- Enklare bevis av Charles Hermite 1873.

  Mathologer: Pi is IRRATIONAL: simplest proof on toughest test

  Wikipedia: Proof that π is irrational

Talen e och π är t.o.m. transcendenta

- Nollställen (även komplexa) till polynom $p(x)$ med heltalskoefficienter kallas för **algebraiska** tal. Icke-algebraiska komplexa tal kallas **transcendenta**.
- Alla rationella tal är algebraiska, eftersom a/b är nollställe till $p(x) = bx - a$. Alla reella transcendenta tal är alltså irrationella.
- Även många irrationella tal är algebraiska, t.ex. $\sqrt{2}$, som ju är nollställe till $p(x) = x^2 - 2$. Att vara transcendent är alltså en strikt starkare egenskap än att vara irrationellt, och är i allmänhet mycket svårare att visa.
- Hermite visade 1873 att e är transcendent.
- Ferdinand Lindemann visade 1882 på liknande sätt att π är transcendent.
- Förenklade bevis (för både e och π) av David Hilbert 1893.

Mathologer: The PROOF: e and pi are transcendental

Följdsats av att π är transcendent:

Cirkelns kvadratur är omöjlig.

(Dvs. det är omöjligt att med passare och linjal konstruera en kvadrat med samma area som en given cirkel.)

Wikipedia: Squaring the circle, Indiana Pi Bill

> One of the unnoticed good effects of television is that people now watch it instead of producing pamphlets squaring the circle.
>
> Underwood Dudley, *Mathematical Cranks* (1992), s. 303

- Det är också känt att t.ex.

$$e^{\pi} \quad \text{och} \quad \pi + \ln 2 + \sqrt{2}\ln 3$$

är transcendenta tal.

- Men det är okänt om följande är det:

$$\pi + e, \quad \pi e, \quad \frac{\pi}{e}, \quad \pi^e, \quad \ln \pi, \quad \ldots$$

- Dock måste **minst ett** av talen $\pi + e$ och πe vara transcendent!

  Det finns en sats som säger att nollställen till polynom med algebraiska koefficienter måste vara algebraiska. Så om a och b är transcendenta kan inte både $a + b$ och ab vara algebraiska, för då skulle

$$p(x) = (x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$$

  ha algebraiska koefficienter men transcendenta nollställen, vilket är omöjligt enligt denna sats.

Beräkning av approximationer till π

- In- och omskrivna polygoner var under lång tid den enda metod man kände till.
- Arkimedes (Syrakusa, 200-talet f.Kr.):

  För $n \geq 3$, låt Q_n och P_n vara halva omkretsen hos enhetscirkelns in- resp. omskrivna regelbundna n-hörning (så att $Q_n < \pi < P_n$):

  $$Q_n = n \sin \frac{\pi}{n} \qquad P_n = n \tan \frac{\pi}{n}$$

  Från $\cos(2v) = 2\cos^2 v - 1$ fås (för vinklar i första kvadranten) $\cos v = \sqrt{\frac{1+\cos(2v)}{2}}$ med vilket man successivt från $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ kan beräkna $\cos \frac{\pi}{6}$, $\cos \frac{\pi}{12}$, $\cos \frac{\pi}{24}$, $\cos \frac{\pi}{48}$ och $\cos \frac{\pi}{96}$. Trigonometriska ettan ger sedan $\sin \frac{\pi}{96}$, och då vet vi även $\tan \frac{\pi}{96}$.

Resultat:

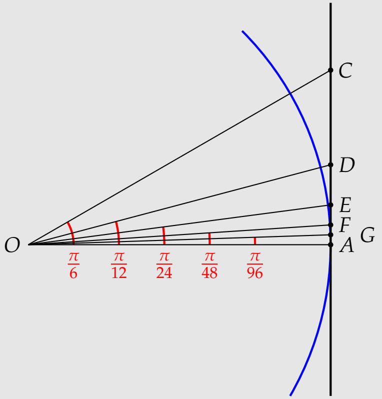
$$Q_{96} < \pi < P_{96}$$

där

$$Q_{96} = 96 \sin\frac{\pi}{96} = 96\,\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}{2} = 3{,}14103195\ldots$$

$$P_{96} = 96 \tan\frac{\pi}{96} = 96\,\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}} = 3{,}14271459\ldots$$

Arkimedes formulerar sig inte på detta sätt, utan han använder elementär geometri för att successivt ge rationella uppskattningar av sträckorna AC, AD, AE, AF och AG i förhållande till radien OA (alltså det som vi kallar (co)tangens för vinklarna $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{12}$, $\frac{\pi}{24}$, $\frac{\pi}{48}$ resp. $\frac{\pi}{96}$).



$$\boxed{\frac{OA}{AC}} = \sqrt{3} > \frac{265}{153} \qquad \left(\text{vinkeln är } \frac{\pi}{6} \text{ och } \frac{265^2}{153^2} = \frac{70225}{23409} < \frac{70227}{23409} = 3\right)$$

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AD+DC}{AD} = 1 + \frac{CD}{AD} = [\text{bisektrissatsen}] = 1 + \frac{OC}{OA} = \frac{OA+OC}{OA}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{OA}{AD}} = \frac{OA+OC}{AC} = \frac{OA}{AC} + \boxed{\frac{OC}{AC}} = \sqrt{3}+2 > \frac{265}{153} + 2 = \frac{571}{153}$$

$$\frac{OD^2}{AD^2} = [\text{Pyth.}] = \frac{OA^2+AD^2}{AD^2} = \left(\frac{OA}{AD}\right)^2 + 1 > \left(\frac{571}{153}\right)^2 + 1 = \frac{349450}{153^2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{OD}{AD}} > \sqrt{\frac{349450}{153^2}} > \frac{591+\frac{1}{8}}{153}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\text{cirkelns omkrets}}{\text{diametern}} < \frac{\text{omkrets av omskriven 96-hörning}}{\text{diametern}} < \frac{14688}{4673+\frac{1}{2}} < 3 + \frac{1}{7}$$

Och på liknande sätt:

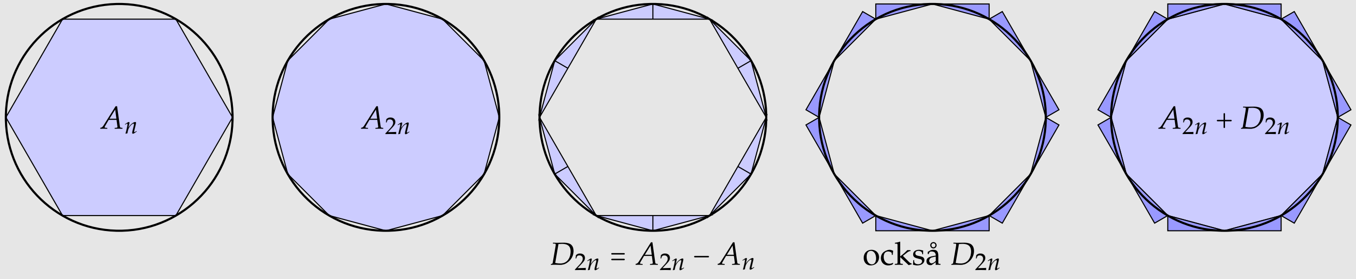
$$\frac{\text{cirkelns omkrets}}{\text{diametern}} > \frac{\text{omkrets av inskriven 96-hörning}}{\text{diametern}} > \frac{6336}{2017+\frac{1}{4}} > 3 + \frac{10}{71}$$

Arkimedes lyckas alltså på detta sätt finna en instängning av de irrationella värdena Q_{96} och P_{96} (och därmed en instängning av π) med ganska enkla rationella tal:

$$\underbrace{3+\frac{10}{71}}_{=3{,}140845\ldots} < \underbrace{Q_{96}}_{=3{,}14103195\ldots} < \pi < \underbrace{P_{96}}_{=3{,}14271459\ldots} < \underbrace{3+\frac{1}{7}}_{=3{,}142857\ldots}$$

- 刘徽 Liú Huī (Kina, 200-talet):

  Metod baserad på **arean** (istället för omkretsen) av regelbunden månghörning inskriven i cirkel:



$$\boxed{A_{2n} < \pi r^2 < A_{2n} + D_{2n}}$$

Beräknar rekursivt sidlängden (och därur arean) i $3 \cdot 2^n$-hörningar med Pythagoras' sats. Med $r = 10$ får han $A_{96} \approx 313 + \frac{584}{625}$ och $A_{192} \approx 314 + \frac{64}{625}$ vilket ger skillnaden $D_{192} \approx \frac{105}{625}$. Resultat, således:

$$314 + \frac{64}{625} \lesssim 100\pi \lesssim 314 + \frac{169}{625}$$

(Slutsats: $\pi \approx 3{,}14 = \frac{157}{50}$ är ett enkelt och praktiskt närmevärde.)

Han säger också utan tydlig motivering att ett bättre värde (jämförbart med det som fås från A_{3072}) ges av att addera korrektionstermen $\frac{36}{625}$ till A_{192} :

$$\pi \approx \frac{A_{192} + \frac{36}{625}}{100} \approx \frac{\left(314 + \frac{64}{625}\right) + \frac{36}{625}}{100} = \frac{314 + \frac{4}{25}}{100} = \frac{314 + 0{,}16}{100} = \boxed{3{,}1416}$$

En tänkbar förklaring är att han har noterat empiriskt att $D_{2n} \approx \frac{1}{4} D_n$, så att

$$\begin{aligned}
\pi r^2 &= A_{192} + D_{2\cdot 192} + D_{4\cdot 192} + D_{8\cdot 192} + \cdots \\
&\approx A_{192} + D_{192} \cdot \left(\tfrac{1}{4} + \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{4}\right)^3 + \cdots \right) \\
&= A_{192} + D_{192} \cdot \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} \qquad \text{(geometrisk serie med kvoten } \tfrac{1}{4}\text{)} \\
&= A_{192} + D_{192} \cdot \tfrac{1}{3} \\
&\approx \left(314 + \tfrac{64}{625}\right) + \tfrac{105}{625} \cdot \tfrac{1}{3} \\
&= \left(314 + \tfrac{64}{625}\right) + \tfrac{35}{625} \\
&\approx \left(314 + \tfrac{64}{625}\right) + \tfrac{36}{625}
\end{aligned}$$

- 祖冲之　Zǔ Chōngzhī / Tsu Ch’ung-chih (Kina, 400-talet):

$$3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927$$

Använde Liu Huis metod på area av 12288-hörning. Resultatet ej överträffat förrän c:a 1000 år senare.

$\pi \approx \frac{22}{7} = 3{,}142857\ldots$　约率　yuē lǜ　(”ungefärligt förhållande”)

$\pi \approx \frac{355}{113} = 3{,}1415929203\ldots$　密率　mì lǜ　(”nära förhållande”)

Närmevärdet $\frac{355}{113}$ var inte känt av grekerna, indierna eller araberna. Återupptäckt i Europa först 1585 av Adriaan Anthonisz.

En liten utvikning om kedjebråk

Varje tal $x \in \mathbf{R}$ har **heltalsdel** $a_0 = \lfloor x \rfloor$ och **bråkdel** $b_0 = \{x\}$,

$$x = a_0 + b_0, \qquad a_0 \in \mathbf{Z}, \qquad 0 \le b_0 < 1.$$

Om $b_0 \neq 0$ så är $\frac{1}{b_0} > 1$, med heltalsdel $a_1 \geq 1$ och bråkdel b_1:

$$x = a_0 + b_0 = a_0 + \frac{1}{1/b_0} = a_0 + \frac{1}{a_1 + b_1}, \qquad 0 \le b_1 < 1.$$

Om $b_1 \neq 0$ så är $\frac{1}{b_1} > 1$, med heltalsdel $a_2 \geq 1$ och bråkdel b_2:

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{1/b_1}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + b_2}}, \qquad 0 \le b_2 < 1.$$

Och så vidare!

Processen slutar efter ändligt många steg om och endast om x är ett rationellt tal.

Om x är irrationellt fås en entydig oändlig **kedjebråksutveckling**:

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

Notation:

$$x = [a_0; a_1, a_2, a_3, a_4, \dots]$$

Vissa kända matematiska konstanter har en regelbunden kedjebråks-utveckling:

$$\phi = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} = [1;1,1,1,1,1,1,\dots] = 1 + \tfrac{1}{\phi} \quad \text{(gyllene snittet)}$$

$$\sqrt{2} = [1;2,2,2,2,2,2,\dots]$$

$$e = [2;1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1,10,1,\dots]$$

Men kedjebråksutvecklingen för π följer inget uppenbart mönster:

$$\begin{aligned}\pi = [3;&7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,1,14,2,1,1,2,2,2,2,\\ &1,84,2,1,1,15,3,13,1,4,2,6,6,99,1,2,2,6,3,\\ &5,1,1,6,8,1,7,1,2,3,7,1,2,1,1,12,1,1,1,3,1,\\ &1,8,1,1,2,1,6,1,1,5,2,2,3,1,2,4,4,16,1,161,\dots]\end{aligned}$$

Trunkeringar av kedjebråksutvecklingen ger bra rationella approximationer. T.ex. för $\pi = 3{,}14159265358979\ldots$ fås

$$[3;7] = 3 + \frac{1}{7} = \boxed{\frac{22}{7}} = 3{,}14{\color{red}2857\ldots} > \pi$$

$$[3;7,15] = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15}} = \boxed{\frac{333}{106}} = 3{,}1415{\color{red}0943\ldots} < \pi$$

$$[3;7,15,1] = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \frac{1}{1}}} = \boxed{\frac{355}{113}} = 3{,}141592{\color{red}9203\ldots} > \pi$$

$$[3;7,15,1,292] = \cdots = \boxed{\frac{103993}{33102}} = 3{,}14159265{\color{red}30119\ldots} < \pi$$

Att termen 292 i $\pi = [3;7,15,1,\boxed{292},\dots]$ är relativt stor är orsaken till att trunkeringen

$$[3;7,15,1] = \boxed{\frac{355}{113}}$$

ger en anmärkningsvärt bra approximation till π i förhållande till nämnarens storlek:

$$\left|\pi - \frac{355}{113}\right| \approx 2{,}667 \times 10^{-7} \approx \frac{1}{113^{3{,}202}}$$

Sex korrekta decimaler med tresiffrig nämnare.

Bra ”valuta för pengarna”, med andra ord!

(Och lätt att minnas: 11 33 55 $\longrightarrow$ 113 355 $\longrightarrow$ $\frac{355}{113}$.)

Arkimedes' uppskattning $\boxed{\sqrt{3} > \frac{265}{153}}$ fås från kedjebråket $\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots]$:

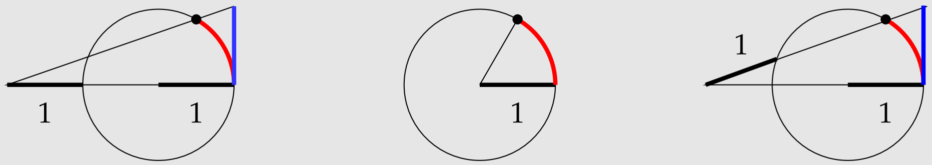
$$
\begin{aligned}
1 &= [1] < \sqrt{3} \\
2 &= [1;1] > \sqrt{3} \\
\tfrac{5}{3} &= [1;1,2] < \sqrt{3} \\
\tfrac{7}{4} &= [1;1,2,1] > \sqrt{3} \\
\tfrac{19}{11} &= [1;1,2,1,2] < \sqrt{3} \\
\tfrac{26}{15} &= [1;1,2,1,2,1] > \sqrt{3} \\
\tfrac{71}{41} &= [1;1,2,1,2,1,2] < \sqrt{3} \\
\tfrac{97}{56} &= [1;1,2,1,2,1,2,1] > \sqrt{3} \\
\longrightarrow \qquad \tfrac{265}{153} &= [1;1,2,1,2,1,2,1,2] < \sqrt{3} \\
\tfrac{362}{209} &= [1;1,2,1,2,1,2,1,2,1] > \sqrt{3} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

[Slut på utvikningen. Åter till π-approximerandet!]

- Ludolph van Ceulen (med Arkimedes' metoder):
  Publicerade 20 decimaler 1596, hann till 35 decimaler innan han dog 1610.

  På tyska kallas π ibland **die Ludolphsche Zahl**.

- Bättre instängning av cirkelbåge (Willebrord Snell 1621):



$$\frac{3\sin\phi}{2+\cos\phi} < \phi < 2\sin\frac{\phi}{3}+\tan\frac{\phi}{3}$$

(Bevisat av Christiaan Huygens 1654.)

Redan $\phi = \pi/3$ (som i figurerna ovan) ger ett bättre närmevärde till π än Arkimedes' 96-hörning. Snell verifierade relativt enkelt van Ceulens 35 decimaler.

- Ett genombrott:

$$\boxed{\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots}$$

för $-1 \leq x \leq 1$.

(Mādhava c:a 1400, James Gregory 1668, G. W. Leibniz 1671)

Bevis: För $|x| < 1$ är $\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots)\, dt = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots$. Att likheten även gäller för $x = \pm 1$ följer sedan av **Leibniz' kriterium** och **Abels kontinuitetssats.**

- Med $x = 1$ fås $\boxed{\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots}$

3Blue1Brown: Pi hiding in prime regularities

(Ger ett invecklat men intressant direkt bevis, inte via arctan-serien, utan genom att räkna heltalspunkter i cirklar med radie $R \to \infty$.)

- Serien konvergerar långsamt då $x = 1$. *Mycket* fortare om $|x| < 1$.

- Abraham Sharp (1699): 72 decimaler med

$$\boxed{\frac{\pi}{6} = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2k+1}}$$

- John Machin (1706): 100 decimaler med

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{4}{5^{2k+1}} - \frac{1}{239^{2k+1}}\right) \end{aligned}}$$

Bevis för första likheten: $(5+i)^4 = 476 + 480i = 2(239+i)(1+i)$.

Vi såg Machins formel redan i början av föreläsningen, i William Jones' bok från 1706:

There are various other ways of finding the *Lengths*, or *Areas* of particular *Curve Lines*, or *Planes*, which may very much facilitate the Practice; as for Inſtance, in the *Circle*, the Diameter is to Circumference as 1 to

$$\overline{\frac{16}{5}-\frac{4}{239}}-\frac{1}{3}\,\overline{\frac{16}{5^3}-\frac{4}{239^3}}+\frac{1}{5}\,\overline{\frac{16}{5^5}-\frac{4}{239^5}}-, \&c. =$$

3.14159, &c. $= \pi$. This *Series* (among others for the ſame purpoſe, and drawn from the ſame Principle) I receiv'd from the Excellent Analyſt, and my much Eſteem'd Friend Mr. *John Machin*; and by means thereof, *Van Ceulen*'s Number, or that in Art. 64.38. may be Examin'd with all deſireable Eaſe and Diſpatch.

$$\pi = \left(\frac{16}{5} - \frac{4}{239}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{16}{5^3} - \frac{4}{239^3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{16}{5^5} - \frac{4}{239^5}\right) - \cdots$$

- William Shanks använde många år av sitt liv för att beräkna 707 decimaler (publ. 1873) med hjälp av Machins formel.

  Tyvärr var ”bara” de 527 första korrekta, men det upptäcktes inte förrän 1945.

- Ända in på 2000-talet har liknande formler använts vid världs-rekordberäkningar av π.

  T.ex.

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\pi}{4} = {} & 12\arctan\frac{1}{49} + 32\arctan\frac{1}{57} \\ & - 5\arctan\frac{1}{239} + 12\arctan\frac{1}{110443}\end{aligned}}$$

- Eugene Salamin & Richard Brent (1975, oberoende av varandra):

$$\boxed{\pi = \frac{2\,\mathrm{agm}\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} 2^k c_k^2}}$$

- **Aritmetisk-geometriskt medelvärde** av två positiva tal a och b:

$$\boxed{\mathrm{agm}(a,b) = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n}$$

där

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= a > 0 \\ b_0 &= b > 0 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_{n+1} &= \tfrac{1}{2}(a_n + b_n) && \text{(aritm. medelv. av } a_n \text{ och } b_n\text{)} \\ b_{n+1} &= (a_n b_n)^{1/2} && \text{(geom. medelv. av } a_n \text{ och } b_n\text{)} \\ c_{n+1} &= \tfrac{1}{2}(a_n - b_n) && \text{(hjälpstorhet, ingår i formeln ovan)} \end{aligned}}$$

- **Kvadratisk konvergens.** Antalet korrekta decimaler i

$$\pi \approx \frac{2a_n^2}{\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{n} 2^k c_k^2} \qquad \text{(med } a_0 = 1 \text{ och } b_0 = 1/\sqrt{2}\text{)}$$

  fördubblas (ungefär) i varje iteration!

- Formeln var faktiskt känd av Gauss redan 1809, men hade fallit i glömska.

  Ej lämplig för handräkning. Alla uträkningar måste göras med full precision (det önskade slutliga antalet decimaler). Rotutdragningar.

- Förbättrad implementation av Arnold Schönhage 1994. (Undviker kostsamma multiplikationer.)

- Liknande algoritmer av Jonathan & Peter Borwein har konvergens av ännu högre ordning.

- **Världsrekordet** för π-beräkning är f.n. 10^{14} decimaler. (Emma Haruka Iwao, Google, okt 2021 – mars 2022)

  Even more pi in the sky: Calculating 100 trillion digits of pi on Google Cloud

  Metod (David & Gregory Chudnovsky 1988):

$$\boxed{\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,(6k)!\,(545140134\,k + 13591409)}{(3k)!\,(k!)^3\,640320^{3k+3/2}}}$$

  Redan första termen (den med $k = 0$) ensam ger

$$\pi \approx 3.14159265358973{\color{red}42\ldots}$$

  Sedan c:a 14 nya decimaler per term.

  Wikipedia: Chudnovsky brothers, Chudnovsky algorithm

- Det var **Ramanujan** som 1914 bevisade den första formeln av denna typ:

$$\boxed{\frac{1}{\pi} = 162 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,(6k)!\,(133\,k+8)}{(3k)!\,(k!)^3\,255^{3k+3/2}}}$$

Detta är relaterat till teorin för **elliptiska kurvor** och **modulära funktioner**, vilket också hänger ihop med **Fermats stora sats**

$a^n + b^n \neq c^n$ om $n \geq 3$ och a, b, c är positiva heltal

(formulerad av Pierre de Fermat 1637, bevisad av Andrew Wiles 1995) och det faktum att **Ramanujans konstant**

$$\boxed{e^{\pi\sqrt{163}} = 262537412640768743{,}99999999999925\ldots}$$

är mycket nära ett heltal.

- Världsrekorduträkningen är kontrollerad med **BBP-formeln**

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right)$$

med vars hjälp man kan beräkna en godtycklig siffra i π:s hexadecimal-utveckling (dvs. i basen 16) utan att beräkna de föregående.

(David Bailey, Peter Borwein, Simon Plouffe 1995)

- Och även med den effektivare BBP-liknande formeln

$$\pi = \frac{1}{2^6} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1024^k} \left(-\frac{2^5}{4k+1} - \frac{1}{4k+3} + \frac{2^8}{10k+1} - \frac{2^6}{10k+3} - \frac{2^2}{10k+5} - \frac{2^2}{10k+7} + \frac{1}{10k+9} \right)$$

(Fabrice Bellard 1997)

Ett lustigt fenomen

- Kom ihåg Mādhava–Gregory–Leibniz-serien:

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right)$$

- Vad detta betyder är att **delsumman**

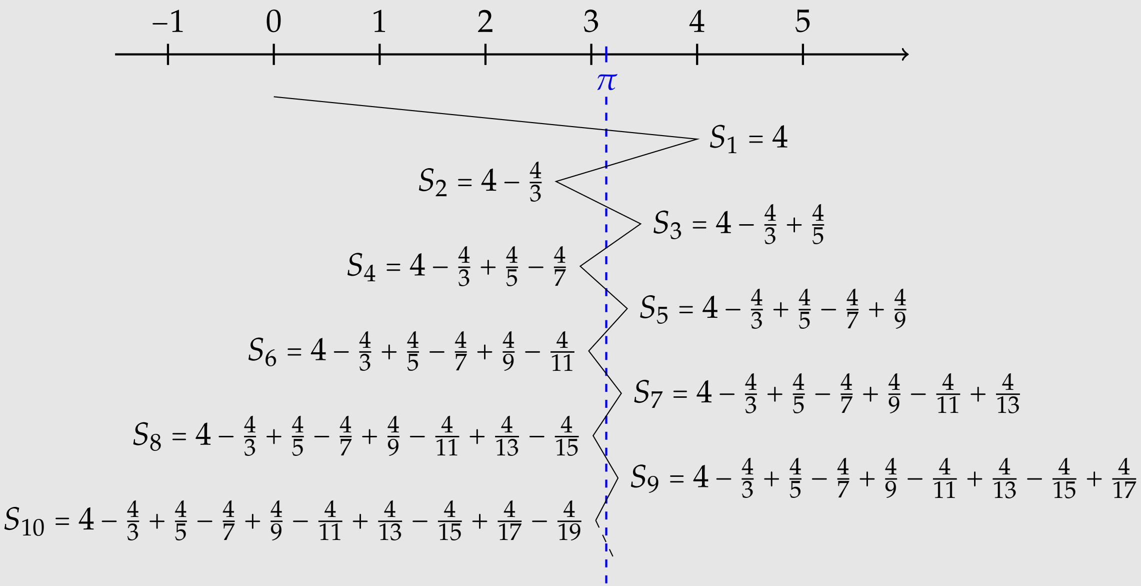
$$\boxed{S_N = 4\sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}}$$

  närmar sig **gränsvärdet** π då antalet termer N går mot oändligheten. (Se figur på nästa sida.)

- Långsam konvergens! Med 150 000 termer fås bara fyra korrekta decimaler:

$$S_{150\,000} = 3{,}1415859869\ldots$$
$$\pi = 3{,}1415926535\ldots$$

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \frac{4}{13} - \frac{4}{15} + \frac{4}{17} - \frac{4}{19} + \frac{4}{21} - \frac{4}{23} + \cdots$$



- Med 430 000 termer är det fortfarande inte så bra:

$$S_{430\,000} = 3{,}14159\color{red}{0328008397\ldots}$$
$$\pi = 3{,}141592653589793\ldots$$

- Med 430 000 termer är det fortfarande inte så bra:

$$
\begin{aligned}
S_{430\,000} &= 3{,}14159\textcolor{red}{0328008397\ldots}\\
\pi &= 3{,}141592653589793\ldots
\end{aligned}
$$

- Men med 500 000 termer händer detta:

$$
\begin{aligned}
S_{500\,000} &= 3{,}14159\textcolor{red}{0}65358979324\textcolor{red}{0}\ldots
\end{aligned}
$$

- Med 430 000 termer är det fortfarande inte så bra:

$$\begin{aligned} S_{430\,000} &= 3{,}14159\textcolor{red}{0328008397\ldots} \\ \pi &= 3{,}141592653589793\ldots \end{aligned}$$

- Men med 500 000 termer händer detta:

$$\begin{aligned} S_{500\,000} &= 3{,}14159\textcolor{red}{0}65358979323\textcolor{red}{4}04626433832\textcolor{red}{6}9502884\ldots \\ \pi &= 3{,}14159265358979323846264338327950288\,4\ldots \end{aligned}$$

- Nästa term som ska adderas (för att få $S_{500\,001}$) är

$$\frac{4(-1)^{500\,000}}{2\cdot 500\,000+1} = \frac{4}{1\,000\,001} \approx \frac{4}{1\,000\,000} = 0{,}000004.$$

Om vi adderar *hälften* av detta, alltså 0,000002, borde vi hamna ganska nära π (som ju ligger ungefär mitt emellan två konsekutiva delsummor). Så korrektionen $\textcolor{red}{0} \to 2$ i sjätte decimalen verkar rimlig.

Såhär fortsätter det, om vi beräknar fler decimaler:

$S_{500\,000}$	π	differens
3,141590	3,141592	$2 \cdot 10^{-6}$
653589793240	653589793238	$-2 \cdot 10^{-18}$
462643383269	462643383279	$10 \cdot 10^{-30}$
502884197291	502884197169	$-122 \cdot 10^{-42}$
399375103050	399375105820	$2770 \cdot 10^{-54}$
974944693349	974944592307	$-101042 \cdot 10^{-66}$
816400880678	816406286208	$5405530 \cdot 10^{-78}$
999026756787	998628034825	$-398721962 \cdot 10^{-90}$
303334043696	342117067982	...
957845863423	148086513282	
...	...	

Låt oss testa med 5 000 000 termer också:

$S_{5\,000\,000}$	π	differens
3,1415924	3,1415926	$2 \cdot 10^{-7}$
53589793238464	53589793238462	$-2 \cdot 10^{-21}$
64338327950278	64338327950288	$10 \cdot 10^{-35}$
41971693993873	41971693993751	$-122 \cdot 10^{-49}$
05820974941822	05820974944592	$2770 \cdot 10^{-63}$
30781640729662	30781640628620	$-101042 \cdot 10^{-77}$
89986274942723	89986280348253	$5405530 \cdot 10^{-91}$
42117466704110	42117067982148	$-398721962 \cdot 10^{-105}$
08612545206374	08651328230664	$38783024290 \cdot 10^{-119}$
75748205446380	70938446095505	…
41489348885745	12848111745028	
…	…	

- Sökning efter ”2, 2, 10, 122, 2770” i **The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences** ger exakt en träff:

  OEIS: A011248 Twice A000364.

  2, 2, 10, 122, 2770, 101042, 5405530, 398721962, 38783024290, 4809759350882, 740742376475050, 138697748786275802, 31029068327114173810, 8174145018586247784722, 2504519282807259730936570, 883087786498046209107365642, 355038783159078578873329579330, 161446598471775796124336494906562

- Och därifrån följer man länken till:

  OEIS: A000364 Euler (or secant or “Zig”) numbers: e.g.f. (even powers only) sec(x) = 1/cos(x).

  1, 1, 5, 61, 1385, 50521, 2702765, 199360981, 19391512145, 2404879675441, 370371188237525, 69348874393137901, 15514534163557086905, 4087072509293123892361, 1252259641403629865468285, 441543893249023104553682821, 177519391579539289436664789665

- Mönstret vi har funnit verkar alltså involvera följden av **Eulertal**

$$\boxed{(E_k^*)_0^\infty = (1, 1, 5, 61, 1385, 50521, 2702765, 199360981, 19391512145, \dots)}$$

som bl.a. förekommer i Maclaurinutvecklingen för sekans-funktionen:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \sum_{k=0}^{\infty} E_k^* \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

- Och man kan bevisa att så är fallet:

$$\boxed{\pi = S_N + \sum_{k=0}^{K-1} (-1)^k \frac{2E_k^*}{(2N)^{2k+1}} + R_{N,K}} \quad \text{där} \quad \boxed{|R_{N,K}| \le \frac{2E_K^*}{(2N)^{2K+1}}}$$

(Jonathan Borwein, Peter Borwein, Karl Dilcher 1989; Gert Almkvist 1997)

För ett givet N kan man inte ta K hur stort som helst, eftersom Eulertalet $E_K^* \approx 8\left(\frac{K}{\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{4K}{\pi e}\right)^{2K}$ i feltermens täljare då blir så stort att det överskuggar nämnaren $(2N)^{2K+1}$.

- Just när $2N$ är en **tiopotens** blir Eulertalen ”synliga” i decimalutvecklingen, t.ex. då $2N = 10^7$ i exemplet med 5 miljoner termer ovan:

$$\begin{aligned} \pi &\sim S_{10^5} + \frac{2E_0^*}{10^7} - \frac{2E_1^*}{(10^7)^3} + \frac{2E_2^*}{(10^7)^5} - \cdots \\ &= S_{10^5} + 2 \cdot 10^{-7} - 2 \cdot 10^{-21} + 10 \cdot 10^{-35} - \cdots \end{aligned}$$

Basel-problemet

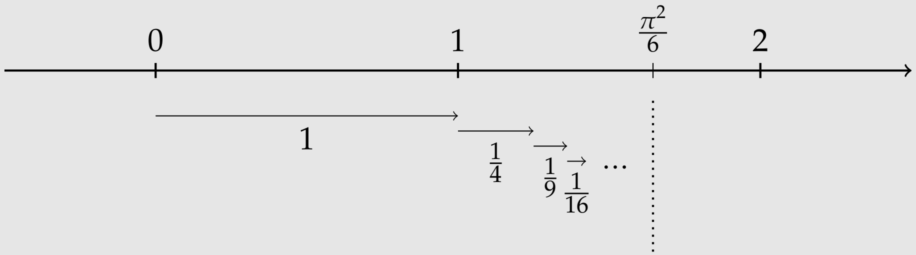
Fråga (Pietro Mengoli 1650):

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots = \boxed{?}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} &= 1 + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{N\cdot N} \\
&< 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(N-1)\cdot N} \\
&= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{N} < 2
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \le 2$ (Så summan måste ha ett **ändligt** värde, men vad **är** detta värde?)

Svar (Euler 1734): $$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$ (= 1,644934...)



math.stackexchange.com:
Different methods to compute $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ (Basel problem)

3Blue1Brown:
Why is pi here? And why is it squared? A geometric answer to the Basel problem

Ett elementärt bevis för $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

- Grunken & instängningsregeln räcker!
- Utgångspunkt:

$$\boxed{0 < \sin x < x < \tan x} \qquad \text{för } 0 < x < \tfrac{\pi}{2}$$

- Detta medför

$$\frac{1}{\tan^2 x} < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x} \qquad \text{för } 0 < x < \tfrac{\pi}{2}$$

vilket p.g.a. trig-ettan är samma sak som

$$\boxed{\frac{1}{\sin^2 x} - 1 < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x}} \qquad \text{för } 0 < x < \tfrac{\pi}{2}$$

- Fixera ett heltal $n \geq 1$, och dela intervallet $]0, \frac{\pi}{2}[$ i 2^n lika stora bitar. Kalla delningspunkterna för

$$\boxed{x_k = k \cdot \left(\frac{\pi/2}{2^n}\right)} \qquad (k = 1, 2, 3, \dots, 2^n - 1)$$

- Olikheten $\frac{1}{\sin^2 x} - 1 < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x}$ (från förra sidan) gäller i varje delningspunkt, eftersom de alla ligger i intervallet $]0, \frac{\pi}{2}[$:

$$\frac{1}{\sin^2 x_k} - 1 < \frac{1}{x_k^2} < \frac{1}{\sin^2 x_k} \qquad (k = 1, 2, 3, \dots, 2^n - 1)$$

- Summering av ovanstående $2^n - 1$ stycken olikheter ger

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} \left(\frac{1}{\sin^2 x_k} - 1\right) \quad < \quad \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{x_k^2} \quad < \quad \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2 x_k}$$

- Från förra sidan:

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2 x_k} - \sum_{k=1}^{2^n-1} 1 \quad < \quad \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{x_k^2} \quad < \quad \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2 x_k}$$

- Alltså, om den blåmarkerade summan döps till S_n :

$$S_n - (2^n - 1) \quad < \quad \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k^2 \left(\frac{\pi/2}{2^n}\right)^2} \quad < \quad S_n$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{\left(\frac{\pi/2}{2^n}\right)^2 \left(S_n - (2^n - 1)\right) \quad < \quad \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k^2} \quad < \quad \left(\frac{\pi/2}{2^n}\right)^2 S_n}$$

- Nästa steg är att beräkna $S_n = \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2 x_k}$. Notera att

$$\boxed{\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^2(\frac{\pi}{2} - x)}} = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

$$= \frac{4}{(2 \sin x \cos x)^2} = \boxed{\frac{4}{\sin^2 2x}}$$

  Om man tar mittpunkten $\frac{\pi}{4}$ för sig, och parar ihop $x_k < \frac{\pi}{4}$ med $x_{2^n-k} = \frac{\pi}{2} - x_k > \frac{\pi}{4}$, får man alltså rekursionen

$$\boxed{S_n} = \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2 x_k} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + 4S_{n-1} = \boxed{2 + 4S_{n-1}}$$

- Begynnelsevillkor: $S_0 = 0$.

- Vi vill alltså lösa rekursionen

$$S_n = 2 + 4S_{n-1}$$

med begynnelsevillkoret $S_0 = 0$. För att göra detta undersöker vi hur mycket S_n avviker från jämviktslösningen S^* som ges av $S^* = 2 + 4S^*$, alltså $S^* = -\frac{2}{3}$.

- Betrakta alltså

$$\boxed{T_n = S_n - S^* = S_n + \frac{2}{3}}$$

$$\begin{cases} S_n = 2 + 4S_{n-1} \\ S_0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} T_n - \frac{2}{3} = 2 + 4(T_{n-1} - \frac{2}{3}) \\ T_0 - \frac{2}{3} = 0 \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} T_n = 4T_{n-1} \\ T_0 = \frac{2}{3} \end{cases}}$$

Denna enklare rekursion för T_n har uppenbart lösningen $\boxed{T_n = \frac{2}{3} \cdot 4^n}$,

så lösningen för $S_n = T_n - \frac{2}{3}$ blir alltså $\boxed{S_n = \frac{2}{3}(4^n - 1)}$.

- I vår tidigare olikhet

$$\left(\frac{\pi/2}{2^n}\right)^2\left(S_n-(2^n-1)\right) \quad < \quad \sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{k^2} \quad < \quad \left(\frac{\pi/2}{2^n}\right)^2 S_n$$

kan vi nu sätta in $S_n = \frac{2}{3}(4^n-1)$, vilket ger följande:

$$\left(\frac{\pi/2}{2^n}\right)^2\left(\tfrac{2}{3}(4^n-1)-(2^n-1)\right) < \sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{k^2} < \left(\frac{\pi/2}{2^n}\right)^2\tfrac{2}{3}(4^n-1)$$

$$\iff \quad \boxed{\frac{\pi^2}{6}\left(1-\frac{1}{4^n}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{4^n}\right)\right) < \sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{6}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}$$

- Båda ytterleden går här mot $\frac{\pi^2}{6}$ då $n \to \infty$, och då måste även den instängda summan i mitten göra det. Klart!

Gauss-integralen

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}} \quad \left(\iff \quad \boxed{I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\,dx = 1} \right)$$

- Gausskurvan $y = e^{-x^2}$ beskriver **normalfördelningen** i sannolikhetslära.
- Man behöver veta dess integral för att kunna normera så att totala sannolikheten blir 1.
- Problem: Det går inte att uttrycka dess primitiva funktion $\int e^{-x^2}\,dx$ med elementära funktioner (bevisat av Liouville på 1830-talet).

Följande uträkning med hjälp av **polära koordinater**

$$\boxed{x = r\cos\phi} \qquad \boxed{y = r\sin\phi}$$

och deras **lokala areaskala** $\boxed{r}$ är en klassiker i flervariabelanalys-kurser:

$$\begin{aligned}
\boxed{I^2} = I \cdot I &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2}\,dy\right) \\
&= \iint_{\mathbf{R}^2} e^{-\pi x^2} e^{-\pi y^2}\,dx\,dy = \iint_{\mathbf{R}^2} e^{-\pi(x^2+y^2)}\,dx\,dy \\
&= \iint_{0\le r,\ 0\le\phi<2\pi} e^{-\pi r^2}\,\boxed{r}\,dr\,d\phi \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\phi\right)\left(\int_0^{\infty} r\,e^{-\pi r^2}\,dr\right) = 2\pi\cdot\left[\tfrac{-1}{2\pi}\,e^{-\pi r^2}\right]_0^{\infty} = \boxed{1}
\end{aligned}$$

Slutsats, eftersom $I > 0$: $\boxed{I = 1}$, vilket skulle visas.

Ett enkelt bevis för att $\pi < 22/7$

$$\boxed{0} < \boxed{\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx}$$

$$= \left[\text{multiplicera ut } x^4(1-x)^4 \text{ och polynomdividera sedan}\right]$$

$$= \int_0^1 \left(x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - \frac{4}{1+x^2}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^7}{7} - \frac{4x^6}{6} + x^5 - \frac{4x^3}{3} + 4x - 4\arctan x\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{7} - \frac{2}{3} + 1 - \frac{4}{3} + 4 - 4\cdot\frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{22}{7} - \pi}$$

(D. P. Dalzell, 1944)

Ett par liknande olikheter:

$$0 < \int_0^1 \frac{x^5(1-x)^6(197+462x^2)}{530(1+x^2)}\,dx = \cdots = \pi - \frac{333}{106}$$

$$0 < \int_0^1 \frac{x^8(1-x)^8(25+816x^2)}{3164(1+x^2)}\,dx = \cdots = \frac{355}{113} - \pi$$

(S. K. Lucas 2005, 2007)

Wallis' produkt

John Wallis 1655

$$\boxed{\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot\ldots = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{(k-1)(k+1)}}$$

- **Partiell integration** ger

$$\boxed{I_n = \int_0^{\pi}\sin^n x\,dx} = \int_0^{\pi}\sin x\,\sin^{n-1}x\,dx$$

$$= \Big[(-\cos x)\,\sin^{n-1}x\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-\cos x)\,(n-1)\sin^{n-2}x\,\cos x\,dx$$

$$= 0 + (n-1)\int_0^{\pi}\sin^{n-2}x\,(1-\sin^2 x)\,dx = \boxed{(n-1)\,(I_{n-2} - I_n)}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \boxed{I_n = \frac{n-1}{n}\,I_{n-2}} \qquad (\text{för } n \geq 2)$$

- Direkt uträkning ger rekursionens begynnelsevärden:

$$\boxed{I_0} = \int_0^\pi 1\,dx = \boxed{\pi}$$

$$\boxed{I_1} = \int_0^\pi \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^\pi = \boxed{2}$$

- Rekursionsformeln $\boxed{I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}}$ ger nu successivt värdena på alla integralerna I_n (jämna n för sig, utgående från I_0, och udda n för sig, utgående från I_1).

  Följden $(I_n)_0^\infty$ är **avtagande**, eftersom $\sin^n x$ (för $0 < x < \pi/2$) minskar när n ökar.

$$\boxed{\pi} > \boxed{2} > \boxed{\frac{1}{2}\cdot\pi} > \boxed{\frac{2}{3}\cdot 2} > \boxed{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi} > \boxed{\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2} > \boxed{\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi} > \boxed{\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2} > \cdots$$

- Från

$$\cdots > \boxed{I_{2n}} > \boxed{I_{2n+1}} > \boxed{I_{2n+2}} > \cdots$$

fås

$$\frac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot\ldots\cdot 1}{(2n)\cdot(2n-2)\cdot\ldots\cdot 2}\cdot\pi > \frac{(2n)\cdot(2n-2)\cdot\ldots\cdot 2}{(2n+1)\cdot(2n-1)\cdot\ldots\cdot 3}\cdot 2$$

$$> \frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot\ldots\cdot 1}{(2n)\cdot(2n-2)\cdot\ldots\cdot 2}\cdot\pi$$

$$\iff \qquad \frac{\pi}{2} < \frac{\big((2n)\cdot(2n-2)\cdot\ldots\cdot 2\big)^2}{(2n+1)\big((2n-1)\cdot(2n-3)\cdot\ldots\cdot 3\big)^2\cdot 1} < \frac{1+\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{\pi}{2}$$

- **Instängningsregeln** för gränsvärden ger att mittenledet går mot $\pi/2$ då $n \to \infty$ (eftersom ytterleden gör det), vilket precis är vad som skulle visas.

- Ett annat bevis:

  3Blue1Brown: The Wallis product for pi, proved geometrically

- Låt p_n beteckna sannolikheten för **lika många krona som klave** vid $2n$ slantsinglingar.

$$\boxed{p_n} = \boxed{\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-3) \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n-2) \cdot 2n}$$

$$\frac{1}{p_n^2} = \underbrace{\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n-1}}_{\approx \pi/2 \text{ när } n \text{ är stort, enl. Wallis}} \cdot 2n \approx \pi n$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{p_n \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}}} \quad \text{när } n \text{ är stort}$$

Stirlings approximation av n-fakultet

Trapetsregeln (med steglängd 1, se fig. nästa sida) ger att integralen

$$\int_1^n \ln x\,dx = \Big[x\ln x - x\Big]_1^n = n\ln n - n + 1$$

är ungefär lika med

$$\frac{\ln 1+\ln 2}{2} + \frac{\ln 2+\ln 3}{2} + \frac{\ln 3+\ln 4}{2} + \cdots + \frac{\ln(n-1)+\ln n}{2}$$

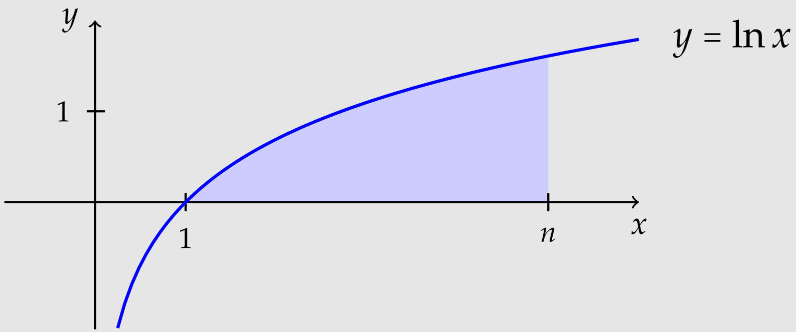
$$= \ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \cdots + \ln(n-1) + \ln(n) - \frac{\ln n}{2}$$

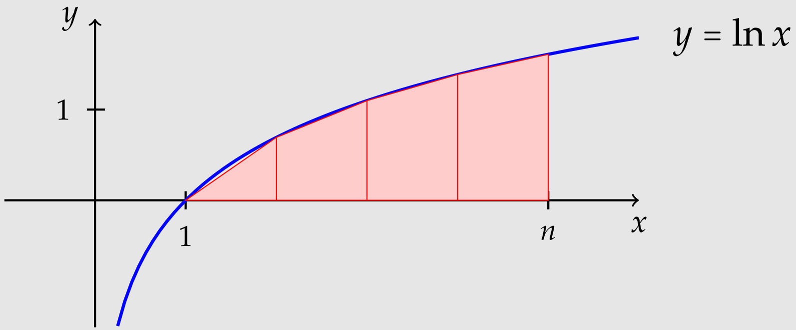
$$= \ln\Big(2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n\Big) - \frac{\ln n}{2} = \ln(n!) - \frac{\ln n}{2}$$

dvs.

$$\ln(n!) \approx \left(n+\tfrac{1}{2}\right)\ln n - n + 1$$

$$\boxed{n! \approx \exp\Big(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\ln n - n + 1\Big) = n^{n+1/2}e^{-n+1} = e\sqrt{n}\left(\tfrac{n}{e}\right)^n}$$


y
1
1
n
x
y = ln x


y
1
1
n
x
y = ln x

Kurvan $y = \ln x$ är **konkav**, så trapetsapproximationen ger en area som är **mindre** än den verkliga arean under kurvan:

$$n! < e\sqrt{n}\,(n/e)^n$$

Med andra ord, approximationen $n! \approx e\sqrt{n}\,(n/e)^n$ ger alltid ett för **stort** värde.

Om faktorn e byts ut mot en annan (mindre) konstant kanske vi kan göra approximationen bättre? Såhär, alltså:

$$n! \approx C\sqrt{n}\,(n/e)^n \quad \text{för något lämpligt tal } C < e$$

- Abraham de Moivre 1730:

$$\text{Gränsvärdet} \quad \boxed{C = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{n}\,(n/e)^n} \in \mathbf{R}_+} \quad \text{existerar.}$$

  (Bevis nedan.)

- James Stirling 1730:

$$\boxed{C = \sqrt{2\pi}} = 2{,}5066\ldots < 2{,}71828\ldots = e$$

  (Bevis nedan.)

- Alltså Stirlings formel: $\boxed{n! \approx \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n}$

- Kan preciseras, t.ex.

$$\boxed{\sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n\, e^{1/(12n+1)} < n! < \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n\, e^{1/(12n)}}$$

Bevis för att gränsvärdet C existerar och är positivt (inte noll):

$$c_n = \frac{n!}{\sqrt{n}\,(n/e)^n} \qquad d_n = \ln c_n = \ln(n!) - (n + \tfrac{1}{2}) \ln n + n$$

$$\begin{aligned} d_{k+1} - d_k &= \Big(\ln\big((k+1)!\big) - (k + \tfrac{3}{2}) \ln(k+1) + (k+1)\Big) \\ &\quad - \Big(\ln(k!) - (k + \tfrac{1}{2}) \ln k + k \Big) \\ &= 1 - (k + \tfrac{1}{2}) \ln\left(1 + \tfrac{1}{k}\right) \qquad \text{[Maclaurin: } \ln(1+t) = t - \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{3}t^3 + O(t^4),\ t \to 0] \\ &= 1 - (k + \tfrac{1}{2}) \left(\tfrac{1}{k} - \tfrac{1}{2k^2} + \tfrac{1}{3k^3} + O\left(\tfrac{1}{k^4}\right)\right) = -\frac{1}{12k^2} + O\left(\frac{1}{k^3}\right) \end{aligned}$$

Så $D = \lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} \left(d_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (d_{k+1} - d_k) \right) = d_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (d_{k+1} - d_k)$ existerar (som ett reellt tal, inte $D = -\infty$). Alltså $C = \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} e^{d_n} = e^D > 0$.

Bevis för att $C = \sqrt{2\pi}$: Wallis' produkt ger

$$\boxed{\frac{\pi}{2}} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{2k}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k+1} \right) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{2k}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k} \cdot \frac{2k}{2k} \cdot \frac{2k}{2k+1} \right)$$

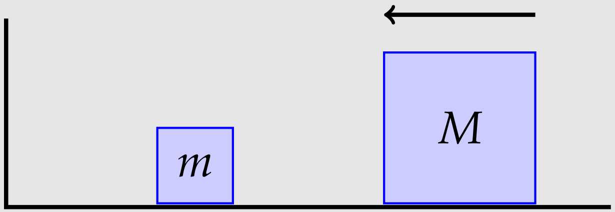
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^4\, 2^{4n}}{(2n)!\,(2n)!\,(2n+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\dfrac{n!}{\sqrt{n}\,(n/e)^n} \right)^4 \left(\sqrt{n}\,(n/e)^n \right)^4 2^{4n}}{\left(\dfrac{(2n)!}{\sqrt{2n}\,(2n/e)^{2n}} \right)^2 \left(\sqrt{2n}\,(2n/e)^{2n} \right)^2 (2n+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\dfrac{n!}{\sqrt{n}\,(n/e)^n} \right)^4}{\left(\dfrac{(2n)!}{\sqrt{2n}\,(2n/e)^{2n}} \right)^2 2\left(2 + \frac{1}{n}\right)} = \boxed{\frac{C^4}{C^2 \cdot 2 \cdot 2}} \implies \boxed{C = \sqrt{2\pi}}$$

Ett mekanikproblem

(Gregory Galperin 1995, publ. 2003)



Hur många kollisioner (inkl. med väggen)?

(Ingen friktion, elastiska stötar.)

Massförhållande M/m	Antal kollisioner
1	3
10^2	31
10^4	314
10^6	3141
10^8	31415
10^{10}	314159
$\vdots$	$\vdots$

3Blue1Brown:
The most unexpected answer to a counting puzzle
So why do colliding blocks compute pi?
How colliding blocks act like a beam of light … to compute pi.