

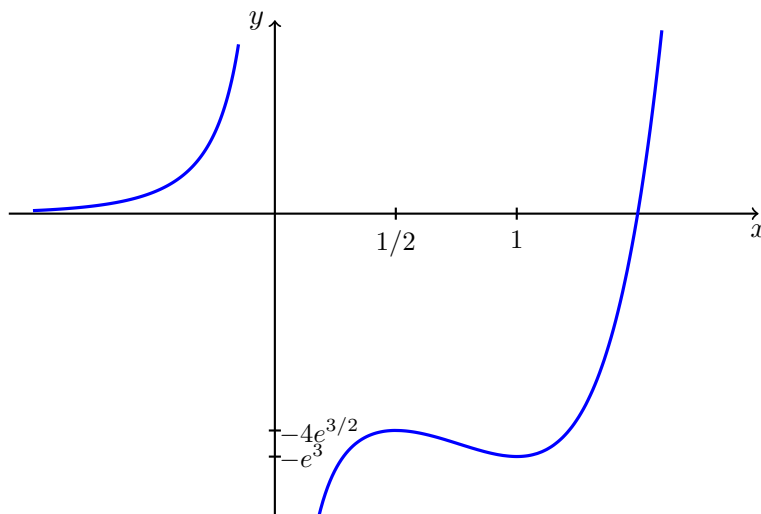
Lösningsskisser för Övningstentamen 1

1) f är definierad för $x \neq 0$. Standardräkningar (Gör dessa!) ger $f'(x) = 3e^{3x} \frac{(x-1)(2x-1)}{x^2}$.

Teckentabell:

x		0	1/2	1				
$3e^{3x}$		+	+	+	+			
$x-1$		-	-	-	0	+		
$2x-1$		-	-	0	+	+		
x^2		+	0	+	+	+		
$f'(x)$		+	ej def.	+	0	-	0	+
$f(x)$		↗	ej def.	↗	lok. max.	↘	lok. min.	↗

Vi ser att $f(x) \rightarrow 0$, $x \rightarrow -\infty$, $f(x) \rightarrow \infty$, $x \rightarrow \infty$ och att $f(x) \rightarrow \mp\infty$, $x \rightarrow 0^\pm$. Vidare är $f(1/2) = -4e^{3/2}$ och $f(1) = -e^3$. Detta ger grafen



Svar: Graf enligt ovan. Linjen $x = 0$ är lodrät asymptot och linjen $y = 0$ är vågrät asymptot då $x \rightarrow -\infty$. f har en lokal minimipunkt i $x = 1$ (med det lokala minimivärdet $f(1) = -e^3$) och en lokal maximipunkt i $x = 1/2$ (med det lokala maximivärdet $f(1/2) = -4e^{3/2}$).

$$2a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+2}{x-2} = \frac{-1+2}{-1-2} = -\frac{1}{3}.$$

$$2b) \frac{3x + \ln x}{\sqrt{x} - 2x + \sin x} = \frac{3 + \frac{\ln x}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}} - 2 + \frac{\sin x}{x}} \rightarrow \frac{3+0}{0-2+0} = -\frac{3}{2}, \quad x \rightarrow \infty \text{ enl. standardgränsvärden och}$$

p g a att $\sin x$ är begränsad och $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$ så $\frac{\sin x}{x} = \sin x \cdot \frac{1}{x} \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$ enligt sats.

$$2c) \lim_{x \rightarrow \infty} (2^x + 5^x)^{\frac{1}{x}} = 5 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{2}{5}\right)^x\right)^{\frac{1}{x}} = 5 \cdot (1+0)^0 = 5 \text{ ty } \left(\frac{2}{5}\right)^x \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty.$$

Svar: (a) $-\frac{1}{3}$ (b) $-\frac{3}{2}$ (c) 5.

3a) Bytet $t = \ln x$, $dt = dx/x$ ger (C är en godtycklig konstant)

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx = \int \cos t dt = \sin t + C = \sin(\ln x) + C.$$

3b) Partialintegration av en etta ger (C är en godtycklig konstant)

$$\int \arctan 3x dx = x \arctan 3x - \int \frac{3x}{1+9x^2} dx = x \arctan 3x - \frac{1}{6} \ln(1+9x^2) + C.$$

3c) Polynomdivision och standardräkningar (se Ex 5.21) ger (C är en godtycklig konstant)

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+2}{x^2+2x+2} dx &= \int \left(1 - \frac{2x}{(x+1)^2+1}\right) dx = x - \int \frac{2(x+1)-2}{(x+1)^2+1} dx \\ &= x - \ln(x^2+2x+2) + 2 \arctan(x+1) + C. \end{aligned}$$

Svar: (a) $\sin(\ln x) + C$ (b) $x \arctan 3x - \frac{1}{6} \ln(1+9x^2) + C$ (c) $x - \ln(x^2+2x+2) + 2 \arctan(x+1) + C$.

4) $t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2$, $t > 0 \Rightarrow dx = 2t dt$ samt partialbråksuppdelning ger ($I =$ sökt integral)

$$\begin{aligned} I &= \int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{2t dt}{t^4+t^3} = \int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{2 dt}{t^2(t+1)} = 2 \int_{\sqrt{2}}^{\infty} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1}\right) dt = 2 \lim_{a \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{t} - \ln t + \ln(t+1)\right]_{\sqrt{2}}^a \\ &= 2 \lim_{a \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{a} + \ln\left(1 + \frac{1}{a}\right)\right) + \sqrt{2} - 2 \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} - \ln\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right). \end{aligned}$$

Svar: $\sqrt{2} - \ln\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)$.

5a) Se kursboken.

5b) Då $f(x) = \int_1^{2x} \frac{e^t}{t^2} dt + \int_x^1 \frac{e^t}{t^2} dt = \int_1^{2x} \frac{e^t}{t^2} dt - \int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt$ ger analysens huvudsats samt kedjeregeln

att $f'(x) = \frac{e^{2x}}{(2x)^2} \cdot 2 - \frac{e^x}{x^2} = \frac{e^x(e^x-2)}{2x^2}$ d v s $f'(x) < 0$ då $x \in D_f$ och $e^x - 2 < 0$ d v s då $0 < x < \ln 2$, $f'(x) = 0$ då $x = \ln 2$ och $f'(x) > 0$ om $x > \ln 2$. f är alltså strängt avtagande på $]0, \ln 2]$ och strängt växande på $[\ln 2, \infty[$, vilket visar att $f(\ln 2)$ är f :s minsta värde och att detta värde inte antas någon annanstans än i $x = \ln 2$.

Svar: (a) Se kursboken. (b) f :s minsta värde antas endast för $x = \ln 2$. Se ovan för bevis.

6) Vänsterledet är definierat för $0 < x < 3$ så ekvationen är ekvivalent med

$$f(x) := \ln(3-x) + \frac{3-x \ln x}{x-3} = k, \quad 0 < x < 3.$$

Standardräkningar (Gör dessa!) ger $f'(x) = \frac{3(\ln x - 1)}{(x-3)^2}$. Teckentabell:

x	0	e	3	
$3(\ln x - 1)$	ej def.	-	0	+
$(x - 3)^2$		+		0
$f'(x)$	ej def.	-	0	+
$f(x)$	ej def.	\searrow	lok. min.	\nearrow ej def.

Observera att $f(x)$ och $f'(x)$ inte är definierade för $x = 0$ och $x = 3$.

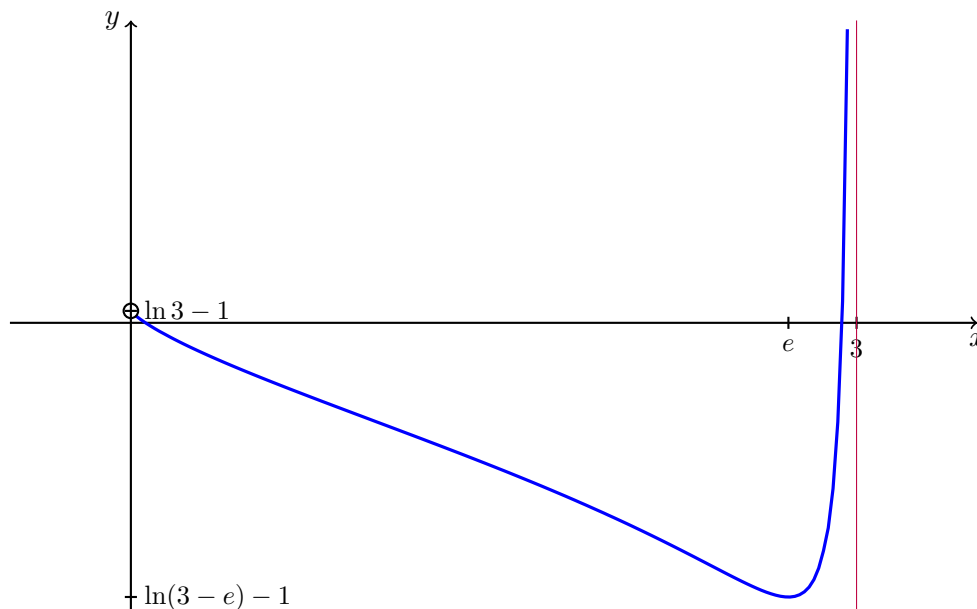
$x \ln x \rightarrow 0$, $x \rightarrow 0^+$ enligt ett standardgränsvärde så $f(x) \rightarrow \ln 3 - 1 > 0$, $x \rightarrow 0^+$.

Variabelbytet $t = 3 - x$ (så att $t \rightarrow 0^+$, $x \rightarrow 3^-$) ger nu att

$$f(x) = \ln t + \frac{3 - (3 - t) \ln(3 - t)}{-t} = \frac{1}{t} (t \ln t - 3 + (3 - t) \ln(3 - t)) \rightarrow \infty, x \rightarrow 3^-,$$

ty $t \ln t \rightarrow 0$, $t \rightarrow 0^+$ så uttrycket inom parentes $\rightarrow 3 \ln 3 - 3 > 0$, $t \rightarrow 0^+$.

Vidare är $f(e) = \ln(3 - e) - 1 < 0$. Detta ger grafen



Avläsning i grafen ger nu antalet lösningar till ekvationen för olika värden på k .

Svar: Lösning saknas om $k < \ln(3 - e) - 1$. En lösning om $k = \ln(3 - e) - 1$ eller $k \geq \ln 3 - 1$. Två lösningar om $\ln(3 - e) - 1 < k < \ln 3 - 1$.

- 7) Låt $a < b < c$ vara tre olika nollställen till f . Då $f(a) = f(b) = 0$ och f är deriverbar överallt följer det av Rolles sats att det finns ett tal ξ_1 med $a < \xi_1 < b$ sådant att $f'(\xi_1) = 0$. Samma resonemang ger att det också finns ett tal ξ_2 med $b < \xi_2 < c$ sådant att $f'(\xi_2) = 0$. Då $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$ och f' är deriverbar överallt ger Rolles sats en tredje gång att det finns ett tal ξ med $\xi_1 < \xi < \xi_2$ sådant att $f''(\xi) = 0$, d v s f'' har minst ett nollställe, vilket skulle visas.

Svar: Se ovan.