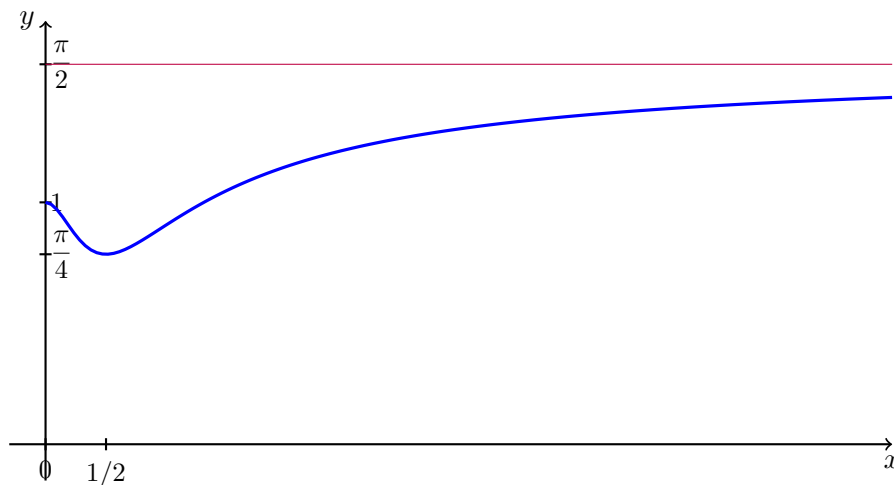


## Lösningsskisser för Övningstentamen 2

1)  $f$  definierad för  $x \geq 0$ . Standardräkningar (Gör dessa!) ger  $f'(x) = \frac{8x(2x-1)}{(1+4x^2)^2}$ . Teckentabell:

$x$	0	1/2	
$8x$	0	+	+
$2x-1$		-	0
$(1+4x^2)^2$		+	+
$f'(x)$	ej def.	-	0
$f(x)$	lok. max.	$\searrow$	lok. min. $\nearrow$

Vi ser att  $f(x) = \arctan 2x + \frac{1}{x} \cdot \frac{-2 + \frac{1}{x}}{4 + \frac{1}{x^2}} \rightarrow \frac{\pi}{2} + 0 \cdot \frac{-2+0}{4+0} = \frac{\pi}{2}$ ,  $x \rightarrow \infty$ . Vidare är  $f(1/2) = \frac{\pi}{4}$  och  $f(0) = 1$ . Detta ger grafen



**Svar:** Graf enligt ovan. Enligt denna är  $V_f = \left[ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$ . Linjen  $y = \frac{\pi}{2}$  är vågrät asymptot då  $x \rightarrow \infty$ .  $f$  har en lokal minimipunkt i  $x = \frac{1}{2}$  (med det lokala minimivärdet  $f(1/2) = \frac{\pi}{4}$ ) och en lokal maximipunkt i  $x = 0$  (med det lokala maximivärdet  $f(0) = 1$ ).

$$2a) \frac{x}{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}} = \frac{x(\sqrt{2+3x} + \sqrt{2-x})}{2+3x - (2-x)} = \frac{1}{4}(\sqrt{2+3x} + \sqrt{2-x}) \rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, x \rightarrow 0.$$

$$2b) \text{ Bytet } t = 1/x \text{ ger } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+5) - \ln x}{\sin \frac{2}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+5t)}{\sin 2t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+5t)}{5t} \cdot \frac{5}{2 \cdot \frac{\sin 2t}{2t}} = \frac{5}{2},$$

enl. standardgränsvärden.

$$2c) \frac{\ln(x-1)}{\ln(x^2-1)} = \frac{\ln x + \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{\ln x^2 + \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1 + \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{\ln x}}{2 + \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{\ln x}} \rightarrow \frac{1}{2}, x \rightarrow \infty \text{ ty } \ln x \rightarrow \infty, x \rightarrow \infty.$$

Observera att ingen slutsats kan dras innan sista steget. Stegvis gränsövergång fungerar som bekant *inte*.

**Svar:** (a)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  (b)  $\frac{5}{2}$  (c)  $\frac{1}{2}$ .

3a) Partialbråksuppdelning ger ( $C$  är en godtycklig konstant)

$$\int \frac{2x}{8x - x^2 - 15} dx = \int \frac{-2x}{(x-3)(x-5)} dx = \int \left( \frac{3}{x-3} - \frac{5}{x-5} \right) dx = 3 \ln|x-3| - 5 \ln|x-5| + C.$$

3b) Partialintegration av en etta följt av polynomdivision ger ( $C$  är en godtycklig konstant)

$$\begin{aligned} \int \ln(x^2 + 1) dx &= x \ln(x^2 + 1) - \int \frac{2x^2}{x^2 + 1} dx = x \ln(x^2 + 1) - \int \left( 2 - \frac{2}{x^2 + 1} \right) dx \\ &= x \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \arctan x + C. \end{aligned}$$

3c) Kedjeregeln baklänges (gör bytet  $t = x^2$  i första termen om det är svårt att se!) samt en partialintegration ger ( $C$  är en godtycklig konstant)

$$\int x (\cos x^2 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \sin x^2 - \frac{x}{2} \sin 2x + \int \frac{1}{2} \sin 2x dx = \frac{1}{2} \sin x^2 - \frac{x}{2} \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

**Svar:** (a)  $3 \ln|x-3| - 5 \ln|x-5| + C$  (b)  $x \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \arctan x + C$  (c)  $\frac{1}{2} \sin x^2 - \frac{x}{2} \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x + C$ .

4) Partialbråksuppdelning ger

$$\begin{aligned} \int_1^a \frac{x+1}{x^3+4x} dx &= \int_1^a \left( \frac{1/4}{x} - \frac{x/4-1}{x^2+4} \right) dx = \left[ \frac{1}{4} \ln|x| - \frac{1}{8} \ln(x^2+4) \right]_1^a + \frac{1}{2} \int_1^a \frac{1/2}{1+(\frac{x}{2})^2} dx \\ &= \frac{1}{8} \ln \frac{a^2}{a^2+4} + \frac{1}{8} \ln 5 + \frac{1}{2} \left[ \arctan \frac{x}{2} \right]_1^a = \frac{1}{8} \ln 5 - \frac{1}{8} \ln \left( 1 + \frac{4}{a^2} \right) + \frac{1}{2} \arctan \frac{a}{2} \\ &\quad - \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{8} \ln 5 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2}, \quad a \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

vilket visar att  $\int_1^\infty \frac{x+1}{x^3+4x} dx$  är konvergent med värdet  $\frac{1}{8} \ln 5 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2}$ .

Vi får också

$$\begin{aligned} \int_b^1 \frac{x+1}{x^3+4x} dx &= \left[ \frac{1}{4} \ln|x| - \frac{1}{8} \ln(x^2+4) + \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} \right]_b^1 \\ &= -\frac{1}{8} \ln 5 + \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \ln b + \frac{1}{8} \ln(b^2+4) - \frac{1}{2} \arctan \frac{b}{2} \rightarrow \infty, \quad b \rightarrow 0^+, \end{aligned}$$

ty  $\ln b \rightarrow -\infty$ ,  $b \rightarrow 0^+$  och övriga termer har ändliga gränsvärden.

Detta visar att  $\int_0^1 \frac{x+1}{x^3+4x} dx$  är divergent och därmed är också  $\int_0^\infty \frac{x+1}{x^3+4x} dx$  divergent.

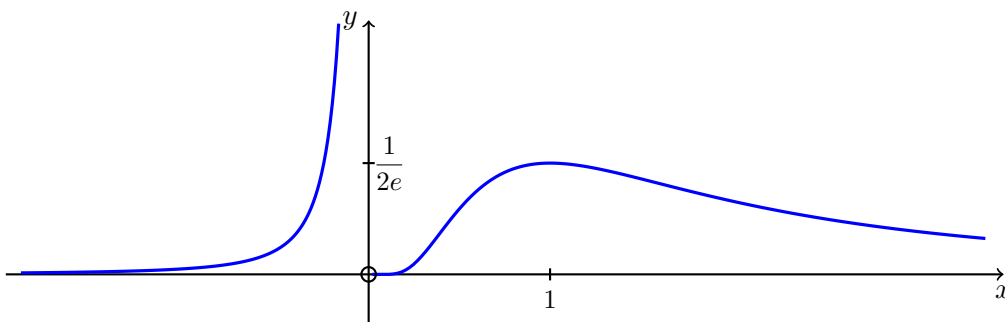
**Svar:**  $\int_1^\infty \frac{x+1}{x^3+4x} dx = \frac{1}{8} \ln 5 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2}$  och  $\int_0^\infty \frac{x+1}{x^3+4x} dx$  är divergent.

5) Sätt  $f(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^2 + 1}$ ,  $x \neq 0$ . Standardräkningar (Gör!) ger  $f'(x) = e^{-1/x} \frac{(1-x)(2x^2+x+1)}{x^2(x^2+1)^2}$ .

Observera att  $2x^2 + x + 1 = 2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0$  för alla  $x$ . Detta ger teckentabellen:

$x$	0		1	
$e^{-1/x}$	+	ej def.	+	+
$x^2(x^2+1)^2$	+	0	+	+
$1-x$	+		+	0
$2x^2+x+1$	+		+	+
$f'(x)$	+	ej def.	+	0
$f(x)$	↗	ej def.	↗	lok. max.

$f(x) \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow 0^+$ , och då  $x \rightarrow \pm\infty$ ,  $f(x) \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow 0^-$  och  $f(1) = \frac{1}{2e}$ . Detta ger grafen



Avläsning i grafen ger nu antalet lösningar för varje värde på konstanten  $k$ .

**Svar:** Ekvationen  $f(x) = k$  saknar lösning om  $k \leq 0$ . Den har 3 lösningar om  $0 < k < \frac{1}{2e}$ , 2 lösningar om  $k = \frac{1}{2e}$  och 1 lösning om  $k > \frac{1}{2e}$ .

6a) Se kursboken eller föreläsninganteckningarna.

6b) För  $x > 0$  är  $f(x) = xe^x$  vilket ger att  $F(x) = \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = (x-1)e^x + C_1$  för  $x > 0$ . Då  $F$  måste vara kontinuerlig i 0 kan vi bestämma  $C_1$  genom att låta  $x \rightarrow 0^+$ , vilket ger  $0 = F(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ((x-1)e^x + C_1) = C_1 - 1$  d v s  $C_1 = 1$ .

För  $x < 0$  är  $f(x) = -xe^x$ . Liknande räkningar (Gör dessa!) ger att  $F(x) = (1-x)e^x + C_2$  för  $x < 0$  och genom att låta  $x \rightarrow 0^-$  fås att  $0 = F(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = 1 + C_2$  varur  $C_2 = -1$ .

Detta ger att  $F(x) = \begin{cases} (x-1)e^x + 1 & , x \geq 0 \\ (1-x)e^x - 1 & , x \leq 0 \end{cases}$  är enda möjligheten.

Återstår att visa att  $F'(0) = f(0) = 0$ . Vi beräknar därför  $F$ 's höger- och vänsterderivata i 0:

$$F'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(h) - F(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(h-1)e^h + 1 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( e^h - \frac{e^h - 1}{h} \right) = e^0 - 1 = 0,$$

enligt ett standardgränsvärde. Vidare är

$$F'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(h) - F(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(1-h)e^h - 1 - 0}{h} = \text{/Genomför själv detaljerna!/} = 0.$$

Då  $F'_+(0) = 0 = F'_-(0)$  följer nu att  $F'(0) = 0 = f(0)$  så vi har visat att  $F'(x) = f(x)$  för alla  $x$ . Då  $F(0) = 0$  enligt ovan är alltså  $F$  den sökta primitiven.

**Alternativ 1:** Istället för att visa att  $F'(0) = 0$  med derivatans definition går det att resonera på följande sätt: Enligt analysens huvudsats har  $f$  en primitiv på  $\mathbf{R}$  (ty  $f$  är kontinuerlig på  $\mathbf{R}$ ). Då  $F$  ovan är den enda möjligheten måste den därför vara den sökta primitiven.

**Alternativ 2:** Enligt analysens huvudsats är  $F(x) = \int_0^x |t|e^t dt$  en primitiv till  $f$  och självklart är då  $F(0) = 0$ . Beräkning av integralen ger sedan samma uttryck som ovan.

**Svar:** (a) Se kursboken. (b)  $F(x) = \begin{cases} (x-1)e^x + 1 & , x \geq 0 \\ (1-x)e^x - 1 & , x \leq 0 \end{cases}$

7) Antag att  $f(0) > 0$  och tag  $x$  så litet att  $f(t) > f(0)/2$  för  $x \leq t \leq 2x$  (möjligt ty  $f$  kont.). Då är  $\int_x^{2x} \frac{f(t)}{t^2} dt \geq \frac{f(0)}{2} \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2} = \frac{f(0)}{4x} \rightarrow \infty, x \rightarrow 0^+$  så  $\int_x^{2x} \frac{f(t)}{t^2} dt \rightarrow \infty, x \rightarrow 0^+$  om  $f(0) > 0$ .

Samma resonemang med  $-f$  istället för  $f$  visar att  $\int_x^{2x} \frac{f(t)}{t^2} dt \rightarrow -\infty, x \rightarrow 0^+$  om  $f(0) < 0$ .

Återstår fallet  $f(0) = 0$ . En partialintegration ger då

$$\int_x^{2x} \frac{f(t)}{t^2} dt = \left[ -\frac{f(t)}{t} \right]_x^{2x} + \int_x^{2x} \frac{f'(t)}{t} dt = \frac{f(x)}{x} - \frac{f(2x)}{2x} + \int_x^{2x} \frac{f'(t) - f'(0)}{t} dt + \int_x^{2x} \frac{f'(0)}{t} dt$$

Derivatans definition ger  $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x} \rightarrow f'(0), x \rightarrow 0^+$  och  $\frac{f(2x)}{2x} \rightarrow f'(0), x \rightarrow 0^+$  fås på samma sätt.

Beräkning av sista termen ger  $\int_x^{2x} \frac{f'(0)}{t} dt = f'(0) \ln 2$  och i tredje termen ger medelvärdesatsen för integraler att det finns  $\xi$  med  $x < \xi < 2x$  (d v s  $\xi \rightarrow 0, x \rightarrow 0^+$  enligt instängningsregeln) sådant att

$$\int_x^{2x} \frac{f'(t) - f'(0)}{t} dt = \frac{f'(\xi) - f'(0)}{\xi} x \rightarrow f''(0) \cdot 0 = 0, x \rightarrow 0^+.$$

Sammantaget ger detta att  $\int_x^{2x} \frac{f(t)}{t^2} dt \rightarrow f'(0) - f'(0) + 0 + f'(0) \ln 2 = f'(0) \ln 2$  om  $f(0) = 0$ .

**Svar:**  $\int_x^{2x} \frac{f(t)}{t^2} dt \rightarrow \infty, x \rightarrow 0^+$  om  $f(0) > 0$ .  $\int_x^{2x} \frac{f(t)}{t^2} dt \rightarrow -\infty, x \rightarrow 0^+$  om  $f(0) < 0$ .

$\int_x^{2x} \frac{f(t)}{t^2} dt \rightarrow f'(0) \ln 2, x \rightarrow 0^+$  om  $f(0) = 0$ .

**Anmärkning:** Förutsättningarna i uppgiften är egentligen onödigt starka. Slutsatsen i svaret är sann även om  $f$  bara är en gång kontinuerligt deriverbar. Detta kan bevisas t ex med hjälp av den generaliserade medelvärdesatsen.