

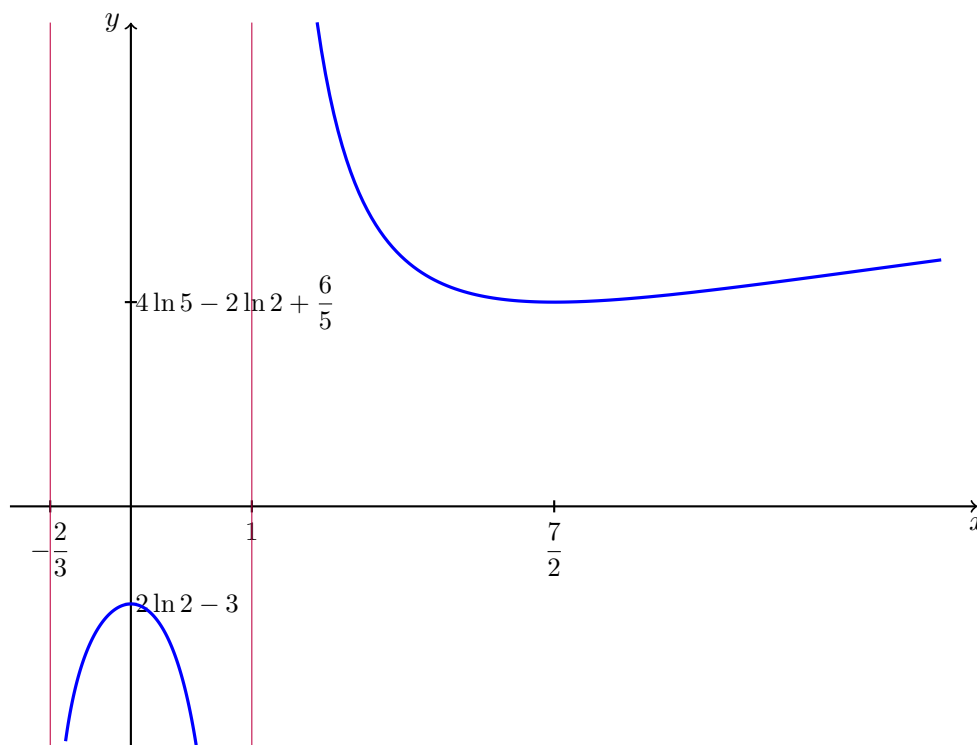
Lösningsskisser för Övningstentamen 4

1) f är definierad då $x > -\frac{2}{3}$ och $x \neq 1$. Standardräkningar (Gör dessa!) ger $f'(x) = \frac{3x(2x-7)}{(3x+2)(x-1)^2}$.

Teckentabell:

x	$-\frac{2}{3}$	0	1	$\frac{7}{2}$	
$3x$		-	0	+	+
$2x-7$		-		-	0
$3x+2$	0	+	+	+	+
$(x-1)^2$		+	+	0	+
$f'(x)$	ej def.	+	0	-	ej def.
$f(x)$	ej def.	↗	lok. max.	↘	ej def.
					lok. min.
					↗

Vi ser att $f(x) \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow -\frac{2}{3}^+$, $f(x) \rightarrow \pm\infty$, $x \rightarrow 1^\pm$ och $f(x) \rightarrow \infty$, $x \rightarrow \infty$. Vidare är $f(\frac{7}{2}) = 2 \ln \frac{25}{2} + \frac{6}{5} = 4 \ln 5 - 2 \ln 2 + \frac{6}{5}$ och $f(0) = 2 \ln 2 - 3$. Detta ger grafen



Svar: Graf enligt ovan. Linjerna $x = -\frac{2}{3}$ och $x = 1$ är lodräta asymptoter. Vågräta asymptoter saknas. f har en lokal maximipunkt i $x = 0$ (med det lokala maximivärdet $f(0) = 2 \ln 2 - 3$) och en lokal minimipunkt i $x = \frac{7}{2}$ (med det lokala minimivärdet $f(\frac{7}{2}) = 4 \ln 5 - 2 \ln 2 + \frac{6}{5}$).

$$2a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{x+1} = \frac{1 \cdot (1-1)}{1+1} = 0.$$

$$2b) \frac{x + e^{-x}}{\ln(x^2 + e^{3x})} = \frac{x + e^{-x}}{\ln e^{3x} + \ln\left(1 + \frac{x^2}{e^{3x}}\right)} = \frac{1 + \frac{1}{x}e^{-x}}{3 + \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{x^2}{e^{3x}}\right)} \rightarrow \frac{1 + 0 \cdot 0}{3 + 0 \cdot 0} = \frac{1}{3}, \quad x \rightarrow \infty \text{ enligt ett standardgränsvärde.}$$

$$2c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\tan x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2 \cdot 9x^2 \cdot \frac{\cos x^2}{\sin x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2 \cdot 9 \cdot \frac{\cos x^2}{\frac{\sin x^2}{x^2}} = 1^2 \cdot 9 \cdot \frac{\cos 0}{1} = 9$$

enligt ett standardgränsvärde och p g a att cos är kontinuerlig.

Svar: (a) 0 (b) $\frac{1}{3}$ (c) 9.

$$3a) \frac{d}{dx} \left(-\frac{2x+1}{4} e^{-2x} \right) = -\frac{2e^{-2x} - 2(2x+1)e^{-2x}}{4} = xe^{-2x} \text{ så } \int xe^{-2x} dx = -\frac{2x+1}{4} e^{-2x} + C,$$

där C är en godtycklig konstant.

3b) Trig.-ettan, bytet $t = \cos x$, $dt = -\sin x dx$ och partialbråksuppdelning ger ($I =$ sökt integral)

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{4 - \cos^2 x} dx = \int_1^0 \frac{-dt}{4 - t^2} = \frac{1}{4} \int_0^1 \left(\frac{1}{2+t} + \frac{1}{2-t} \right) dt = \frac{1}{4} \left[\ln \left(\frac{2+t}{2-t} \right) \right]_0^1 = \frac{1}{4} \ln 3.$$

Svar: (a) $-\frac{2x+1}{4} e^{-2x} + C$ (b) $\frac{1}{4} \ln 3$.

$$4a) \text{ Bytet } t = 2x^3, \quad x^2 dx = \frac{1}{6} dt \text{ ger } (I_1 = \text{sökt integral}) \quad I_1 = \int_{16}^{\infty} \frac{1}{6} e^{-t} dt = \frac{1}{6} \lim_{a \rightarrow \infty} [-e^{-t}]_{16}^a =$$

$$\frac{1}{6} \lim_{a \rightarrow \infty} (e^{-16} - e^{-a}) = \frac{e^{-16}}{6}, \text{ så } \int_2^{\infty} x^2 e^{-2x^3} \text{ är konvergent med värdet } \frac{e^{-16}}{6}.$$

$$4b) \text{ En standardprimitiv ger } (I_2 = \text{sökt integral}) \quad I_2 = \int_2^{\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right]_2^a =$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}, \text{ d v s } \int_2^{\infty} \frac{x-2}{x^3} dx \text{ är konvergent med värdet } \frac{1}{4}.$$

$$4c) \text{ Betrakta först } \int_2^{\infty} \frac{|x-2|}{x^3} dx = \text{/ty } x-2 \geq 0/ = \int_2^{\infty} \frac{x-2}{x^3} dx = \frac{1}{4} \text{ enligt (b). Eftersom denna}$$

$$\text{integral är konvergent får vi dela upp sökta integralen } I_3: I_3 = \int_1^2 \frac{|x-2|}{x^3} dx + \int_2^{\infty} \frac{|x-2|}{x^3} dx$$

ty den första av dessa integraler är inte generaliserad. För $1 \leq x \leq 2$ är $x-2 \leq 0$ d v s $|x-2| = -(x-2) = 2-x$. Detta ger

$$I_3 = \int_1^2 \frac{|x-2|}{x^3} dx + \int_2^{\infty} \frac{|x-2|}{x^3} dx = \frac{1}{4} + \int_1^2 \left(\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{1}{4} + \left[-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right]_1^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

d v s $\int_1^{\infty} \frac{|x-2|}{x^3} dx$ är konvergent med värdet $\frac{1}{2}$.

Svar: (a) $\frac{e^{-16}}{6}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{1}{2}$.

5a) Se kursboken eller föreläsningssanteckningarna.

5b) Det gäller att

$$\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{x} \rightarrow 1 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}, \quad h \rightarrow 0$$

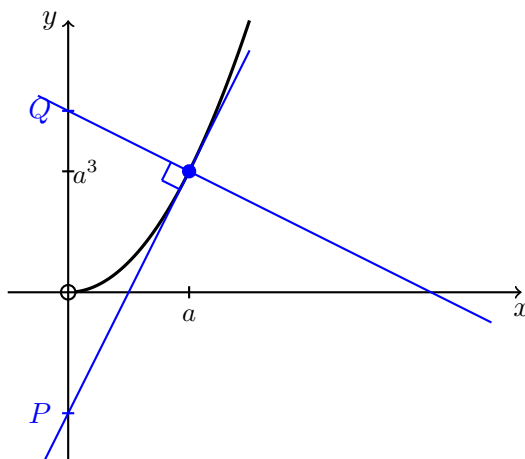
och

$$\frac{(x+h)e^{x+h} - xe^x}{h} = e^{x+h} + xe^x \frac{e^h - 1}{h} \rightarrow e^{x+0} + xe^x \cdot 1 = (x+1)e^x, \quad h \rightarrow 0,$$

där vi har använt två standardgränsvärden samt att exponentialfunktionen är kontinuerlig.

Svar: (a) Se ovan (b) $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$ och $\frac{d}{dx}(xe^x) = (x+1)e^x$.

6) Låt (a, a^3) vara en godtycklig punkt på den givna kurvan. Figur:



Tangenten till kurvan i punkten (a, a^3) får ekvationen $y - a^3 = 3a^2(x - a) \Leftrightarrow y = 3a^2x - 2a^3$ och skär y -axeln i $P : (0, -2a^3)$. Kurvnormalen i samma punkt är vinkelrät mot tangenten och har riktningskoefficienten $-\frac{1}{3a^2}$ vilket ger ekvationen $y - a^3 = -\frac{1}{3a^2}(x - a) \Leftrightarrow y = a^3 + \frac{1}{3a} - \frac{1}{3a^2}x$ och skärningspunkten $Q : \left(0, a^3 + \frac{1}{3a}\right)$ med y -axeln.

Låt $f(a)$ vara längden av sträckan PQ , d v s $f(a) = a^3 + \frac{1}{3a} - (-2a^3) = 3a^3 + \frac{1}{3a} = \frac{9a^4 + 1}{3a}$, $a > 0$. Vi söker den/de punkter där f antar sitt minsta värde (om ett sådant finns). Derivering ger $f'(a) = 9a^2 - \frac{1}{3a^2} = \frac{27a^4 - 1}{3a^2}$, så $f'(a) < 0$ om $0 < a < 3^{-3/4}$, $f'(a) = 0$ om $a = 3^{-3/4}$ och $f'(a) > 0$ om $a > 3^{-3/4}$. f är alltså strängt avtagande på $]0, 3^{-3/4}]$ och strängt växande på $[3^{-3/4}, \infty[$ vilket visar att punkterna P och Q hamnar närmast varandra då $a = 3^{-3/4}$.

Det minimala avståndet mellan P och Q blir då $f(3^{-3/4}) = \frac{9 \cdot (3^{-3/4})^4 + 1}{3 \cdot 3^{-3/4}} = \frac{4}{3\sqrt[4]{3}}$.

Svar: Punkterna hamnar så nära varandra som möjligt om punkten på kurvan är $(3^{-3/4}, 3^{-9/4})$.

7) Vi studerar först fallet att grad $p \geq 4$. Efter polynomdivision samt partialbråksuppdelning av divisionens rest får vi att alla primitiver till den givna funktionen ges av

$$\begin{aligned} \int \frac{p(x)}{x^2(1+x^2)} dx &= \int \left(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{1+x^2} \right) dx \\ &= x^{n+1} \left(\frac{a_n}{n+1} + \frac{a_{n-1}}{nx} + \dots + \frac{a_1}{2x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} + A \frac{\ln|x|}{x^{n+1}} - \frac{B}{x^{n+2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{C}{2} \cdot \frac{2 \ln|x| + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x^{n+1}} + D \frac{\arctan x}{x^{n+1}} + \frac{K}{x^{n+1}} \right), \end{aligned}$$

där $A, B, C, D, a_0, \dots, a_n$ är konstanter och n är gradtalet på kvoten vid polynomdivisionen så att $a_n \neq 0$. K är en godtycklig konstant. I uttrycket inom parentes går alla termer utom den första mot noll (standard) och då första termen är $\neq 0$ går alla dessa primitiver mot ∞ eller $-\infty$ då $x \rightarrow \infty$. I detta fall har alltså ingen primitiv alls ändligt gränsvärde då $x \rightarrow \infty$.

Återstår fallet att $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ för godtyckliga konstanter a, b, c och d .

Partialbråksansatsen $\frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{x^2(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{1+x^2}$ ger primitiven

$$\begin{aligned} \int \frac{p(x)}{x^2(1+x^2)} dx &= A \ln|x| - \frac{B}{x} + \frac{C}{2} \ln(1+x^2) + D \arctan x + K = /A = -C + (A+C)/ \\ &= (A+C) \ln|x| - \frac{B}{x} + \frac{C}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + D \arctan x + K, \end{aligned}$$

där K är en godtycklig konstant. Vi ser att alla termer utom den första har ändliga gränsvärden då $x \rightarrow \infty$. Multiplicera ansatsen ovan med x och låt $x \rightarrow \infty$ så fås $A+C = a$ så alla primitiver har ändligt gränsvärde om och endast om $a = 0$. $p(x)$ är alltså ett godtyckligt polynom av grad högst 2.

Svar: $p(x) = bx^2 + cx + d$ för godtyckliga konstanter b, c och d .