Linköpings universitet
Matematiska institutionen
TATA41 Envariabelanalys 1
Hans Lundmark

2015-02-10

Checklista för funktionsundersökning

1. Vad är definitionsmängden D_f?
2. Har funktionen några uppenbara egenskaper som man kan notera direkt, innan man börja räkna på allvar?
3. Undersök alla relevanta gränsvärden. (Denna undersökning visar bl.a. om grafen har några lodräta och/eller vågräta asymptoter.)
4. Räkna ut derivatan f' och faktorisera. Gör med hjälp av faktoriseringen en teckentabell för f', för att avgöra var f är växande/avtagande och var f antar lokala extremvärden.
5. Rita grafen $y = f(x)$.
6. **Viktigt!** Kontrollera noga att den graf du har ritat verkligen överensstämmer med teckentabellen (steg 4) och alla gränsvärden (steg 3), samt med definitionsmängden (steg 1) och eventuella andra egenskaper som du observerade från början (steg 2).
7. Läs av önskad information ur grafen. Skriv svar.

Följande två moment betraktas som överkurs i TATA41:

- Undersök om grafen har några sneda asymptoter.
- Gör en teckentabell för andraderivatan f'', för att avgöra var f är konvex/konkav och var f har inflexionspunkter.

Vi kräver alltså inte att man utför dessa steg om man gör en funktionsundersökning på tentan, men det kan vara bra att känna till dem ändå. Ni kommer ju att behöva göra funktionsundersökningar i kommande matematikkurser och även i tillämpade kurser eller i yrkeslivet, och ibland är det t.ex. väldigt intressant att veta om f är konvex.

1 Definitionsmängd

Om inte definitionsmängden D_f står angiven i uppgiften så är det underförstått att den består av alla reella tal som går att stoppa in i den givna formeln för $f(x)$. I sådana fall, börja med att själv ta reda på definitionsmängden och tydligt skriva ned vad den är.

Se speciellt upp med skillnaden mellan

$$\ln\left|\cdots\right| \quad \text{och} \quad \ln\left(\cdots\right).$$

T.ex. är uttrycket $\ln\left|x-x^2\right|$ definierat för alla x utom $x=0$ och $x=1$, medan uttrycket $\ln(x-x^2)$ bara är definierat för de värden på x som gör att $x-x^2>0$, dvs. för $0<x<1$.

Man kan *inte* säga någonting om eventuella asymptoter enbart genom att titta på definitionsmängden. Först måste man undersöka gränsvärden; se punkt 3 nedan.

2 Uppenbara egenskaper

Innan du ger dig i kast med uträkningarna, titta en stund på funktionen för att försöka få en känsla för hur den beter sig! Många har kanske lite för bråttom med att hoppa över detta, men det är ett jätteviktigt steg, eftersom det är mycket lättare att upptäcka eventuella räknefel ifall man har en någorlunda vettig uppfattning om hurdant resultatet borde bli redan innan man börjar räkna.

Exempel på frågor som man kan ställa sig: Vad händer om x är stort? Om x är nära noll? Har funktionen någon symmetri (udda/jämn funktion, periodicitet)? Kan man direkt se några nollställen? Kan man se att f måste vara positiv (eller negativ) någonstans? Kan man identifiera enskilda termer eller faktorer som är växande eller avtagande? Drar de olika termerna eller faktorerna ”åt samma håll”, så att man direkt ser att hela funktionen blir växande eller avtagande, eller är det en ”kamp mellan olika viljor” som gör att situationen är mer komplicerad?

Om funktionsuttrycket är någorlunda enkelt kan det också vara bra att göra en liten värdetabell (på kladdpapper) för att ha konkreta sifferdata att kontrollera mot på slutet.

3 Gränsvärden; lodräta/vågräta asymptoter

Alla relevanta gränsvärden ska undersökas, men exakt vad som är relevant beror på sammanhanget. Exempelvis är det ofta av intresse att undersöka vad $f(x)$ går mot då $x\to\infty$ och då $x\to-\infty$ (förutsatt att detta är meningsfullt förstås, dvs. att definitionsmängden D_f är en obegränsad mängd). Och om D_f är ett intervall bör man undersöka vad funktionen gör när x går mot intervallets ändpunkter; om D_f är en union av flera intervall undersöker man ändpunkterna för alla dessa intervall. Om f är styckvis definierad kan det vara intressant att titta på höger- och vänstergränsvärde då x går mot en ”skarvningspunkt” i falluppdelningen, för att t.ex. se om f är kontinuerlig där.

En **asymptot** till en kurva är, lite löst uttryckt, en **rät linje** sådan att avståndet mellan linjen och kurvan går mot noll ”när man går oändligt långt bort”. För funktionskurvor $y=f(x)$ gör kursboken följande mer precisa definitioner:

- Den vågräta linjen $y=A$ är en **vågrät asymptot** till kurvan $y=f(x)$ om $f(x)\to A$ då $x\to\infty$ och/eller då $x\to-\infty$.

En funktionskurva $y = f(x)$ kan högst ha två olika vågräta asymptoter (en då $x \to \infty$ och en annan då $x \to -\infty$). Observera att det mycket väl kan hända att kurvan korsar sina vågräta asymptoter (kanske oändligt många gånger, till och med).

- Den lodräta linjen $x = a$ är en **lodrät asymptot** till kurvan $y = f(x)$ om minst ett av följande villkor uppfylls:

$$\begin{aligned} f(x) &\to +\infty \quad \text{då} \quad x \to a^+, \\ f(x) &\to -\infty \quad \text{då} \quad x \to a^+, \\ f(x) &\to +\infty \quad \text{då} \quad x \to a^-, \\ f(x) &\to -\infty \quad \text{då} \quad x \to a^-. \end{aligned}$$

Här spelar det ingen roll om punkten a tillhör definitionsmängden D_f eller inte; även om värdet $f(a)$ skulle råka vara definierat så ska ju det värdet inte beaktas när man beräknar gränsvärden då $x \to a$. En funktionskurva $y = f(x)$ kan ha hur många lodräta asymptoter som helst.

Obs! Det är *inte* korrekt att göra påståenden i stil med

”linjen $x = 0$ är en lodrät asymptot eftersom $f(x)$ är odefinierad då $x = 0$”.

Att detta är helt galet visas t.ex. av funktionen $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ (för $x \neq 0$) som ju har gränsvärdet 1 (inte ∞ eller $-\infty$) då $x \to 0$, och saknar lodräta asymptoter. För att motivera att en viss linje är en asymptot räcker det alltså inte att bara titta på definitionsmängden, utan man måste hänvisa till lämpligt *gränsvärde*.

Sneda asymptoter (överkurs)

- Om $k \neq 0$ och $f(x) - (kx + m) \to 0$ då $x \to \infty$ eller då $x \to -\infty$ så kallas linjen $y = kx + m$ för en **sned asymptot** till kurvan $y = f(x)$.

Hur man undersöker om det finns sneda asymptoter förklaras i kursboken; för att det ska finnas en asymptot då $x \to \infty$ ska först gränsvärdet $k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ existera, och därefter ska gränsvärdet $m = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx)$ existera.

En funktionskurva $y = f(x)$ kan högst ha två olika sneda asymptoter (en då $x \to \infty$ och en annan då $x \to -\infty$). Begreppet vågrät asymptot kan, om man vill, betraktas som ett specialfall av begreppet sned asymptot (med $k = 0$).

4 Teckenstudium av förstaderivatan

Räkna ut derivatan f' och gör med hjälp av faktorisering en teckentabell som visar var f' är positiv/negativ/noll (eller odefinierad). Proceduren här är precis densamma som när man löser olikheter i grundkursen. Det är ju faktiskt inget annat än en olikhet som man är ute efter att lösa här, nämligen olikheten $f'(x) > 0$. Ur teckentabellen kan man avläsa i vilka intervall som f är **växande** respektive **avtagande**, och man ser också var f har **lokalt maximum** eller **lokalt minimum**.

(Notera dock att lokalt maximum och minimum även kan inträffa i punkter där derivatan inte existerar; t.ex. är $x = 0$ en minimipunkt för $f(x) = |x|$, och även för $f(x) = \sqrt{x}$.)

I vissa elaka fall kan det vara så att man inte enkelt kan se vad f' har för tecken, och då kan man behöva göra en hel funktionsundersökning av f' (dvs. sätt $g(x) = f'(x)$ och "gå in i en subrutin" där du betar av hela den här checklistan för funktionen g istället för f). När man väl vet i detalj hur grafen för f' ser ut så kan man förhoppingsvis därifrån avläsa exakt var f' är positiv/negativ/noll.

Om värdet $f(x)$ är odefinierat i en punkt x så kan det såklart inte finnas någon derivata $f'(x)$ i den punkten heller. Om t.ex. $f(x) = \ln x - \ln(2-x)$, vilket bara är meningsfullt för $0 < x < 2$, så är $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{-1}{2-x} = \frac{2}{x(2-x)}$, men bara för $0 < x < 2$; för övriga x är är inte $f'(x)$ definierat. Om man ska vara noga bör teckentabellen alltså se ut såhär:

x		0		2	
x	$-$	0	$+$		$+$
$2-x$	$+$		$+$	0	$-$
$f'(x)$	ej def.	ej def.	$+$	ej def.	ej def.
$f(x)$	ej def.	ej def.	$\nearrow$	ej def.	ej def.

Inte såhär:

x		0		2	
x	$-$	0	$+$		$+$
$2-x$	$+$		$+$	0	$-$
$f'(x)$	$-$	ej def.	$+$	ej def.	$-$
$f(x)$	ej def.	ej def.	$\nearrow$	ej def.	ej def.

Och inte såhär, vilket vore ännu värre:

x		0		2	
x	$-$	0	$+$		$+$
$2-x$	$+$		$+$	0	$-$
$f'(x)$	$-$	ej def.	$+$	ej def.	$-$
$f(x)$	$\searrow$	ej def.	$\nearrow$	ej def.	$\searrow$

(Den här sista tabellen är dock korrekt ifall funktionen istället vore $f(x) = \ln|x| - \ln|2-x|$, med beloppstecken. Då består ju definitionsmängden för f (och för f') av alla $x \in \mathbf{R}$ utom $x = 0$ och $x = 2$.)

Ibland kan det även vara intressant att undersöka vissa gränsvärden för $f'(x)$, eller att undersöka höger- och vänsterderivatan i punkter där $f'(x)$ inte existerar (typiskt i undantagspunkter eller skarvningspunkter för styckvis definierade funktioner, t.ex. om **absolutbelopp** är inblandat).

Teckenstudium av andraderivatan (överkurs)

Räkna ut andraderivatan f'', faktorisera, och gör en teckentabell som visar var f'' är positiv/negativ/noll (eller odefinierad). Ur denna tabell kan man avläsa på vilka intervall som förstaderivatan f' är växande respektive avtagande, alltså var funktionen f själv är **konvex** respektive **konkav**.

Minnesregler:

- f är kon**vex** om f' är **väx**ande, alltså om f'' är **positiv**, och då ser f:s graf **glad** ut.
- f är konk**av** om f' är **av**tagande, alltså om f'' är **negativ**, och då ser f:s graf **sur** ut.

En **inflexionspunkt** är en punkt där f'' växlar tecken, dvs. där f går från att vara konkav till att vara konvex, eller tvärtom.

5 Rita grafen

Skissa grafen $y = f(x)$ med hjälp av all information ovan. Det är oftast inte så jätteviktigt att det blir skalenligt, för det är en kvalitativ förståelse man är ute efter. Ibland kan det t.o.m. vara svårare att se de intressanta aspekterna om man ritar en helt verklighetstrogen figur, t.ex. om funktionens värden spänner över ett väldigt stort intervall men skillnaden mellan två olika lokala extremvärden är liten.

Man bör dock räkna ut funktionsvärdet i alla lokala extrempunkter och åtminstone försöka avgöra om det är positivt eller negativt, så att man ritar kurvan på rätt sida om x-axeln. Ibland kan man också behöva avgöra på vilken höjd de olika lokala extremvärdena och de vågräta asymptoterna ligger i förhållande till varandra, t.ex. för att kunna avläsa hur många gånger en horisontell linje $y = k$ skär grafen $y = f(x)$ för olika värden på k.

Ifall definitionsmängden och/eller värdemängden är obegränsad så är det naturligtvis omöjligt att rita *hela* grafen, och det finns ju även funktioner i stil med $f(x) = \sin(1/x)$ vars beteende nära $x = 0$ inte går att fullständigt fånga på bild. Men man får helt enkelt försöka ta med så pass mycket att allt som är intressant syns i figuren. Rita in asymptoterna i figuren tillsammans med grafen, och om man t.ex. har räknat ut att $f(x) \to \infty$ då $x \to \infty$ så är det bra om man också skriver dit detta någonstans i nära anslutning till figuren; i en ändlig figur är det ju omöjligt att se vad som händer då $x \to \infty$. (Även om det t.ex. skulle framgå av teckentabellen att f är växande för stora värden på x, så räcker inte detta för att avgöra beteendet då $x \to \infty$. Det kan ju vara så att funktionen är begränsad och växer mot en vågrät asymptot, som t.ex. $f(x) = \arctan x$, men funktionen kan också växa obegränsat, som t.ex. $f(x) = \ln x$.)

6 Kontroll

Det är mycket viktigt att kontrollera att grafen verkligen överensstämmer med teckentabellen och de övriga undersökningarna, så att det inte finns några påståenden som motsäger varandra. (Om man t.ex. från början har noterat att f måste vara positiv överallt, så kan man sedan inte påstå att något gränsvärde är $-\infty$, eller rita grafen så att den går ner under x-axeln.) Gå gärna igenom de tidigare stegen i checklistan en gång till och verifiera att den graf du har ritat verkligen uppfyller allt som du har sagt att den ska uppfylla. Tänk en extra gång på definitionsmängden, så att du inte har glömt att rita någon del av grafen, eller råkat rita in funktionsvärden där det inte ska vara några.

7 Svar

Till slut: avläs utifrån grafen den information som söks, och skriv ett tydligt svar. Läs frågan, och läs därefter direkt ditt svar (utan att titta på alla uträkningarna) för att se att du verkligen svarar på det som det frågades efter och inget annat. Nonsenssvar brukar inte ge så många poäng på tentan... Här är några exempel på hur ett tydligt svar kan se ut:

- Uppgift: Bestäm det största och minsta värdet som funktionen $f(x) = x^2$ antar på intervallet $[-2, 3]$.
  Svar: Det största värdet är $f(3) = 9$ och det minsta värdet är $f(0) = 0$.

- Uppgift: Ange hur många reella lösningar ekvationen $x^3 - 3x = 1$ har.
  Svar: Ekvationen $x^3 - 3x = 1$ har tre reella lösningar.

- Uppgift: Ange hur många reella lösningar ekvationen $x^3 - 3x = k$ har för alla olika värden på den reella parametern k.
  Svar: Ekvationen $x^3 - 3x = k$ har tre lösningar om $|k| < 2$, två lösningar om $|k| = 2$, och en lösning om $|k| > 2$.

- Uppgift: Rita grafen för funktionen $f(x) = (\cdots)$ och ange alla lokala extremvärden samt eventuella lodräta och vågräta asymptoter.
  Svar: Se figuren ovan för graf. Funktionen har lokalt maximum $f(1) = 43$ och lokala minima $f(0) = \pi$ och $f(17) = 0$. Linjen $y = 10$ är en vågrät asymptot till grafen $y = f(x)$ (då $x \to -\infty$). Lodräta asymptoter saknas.

- Uppgift: Ange värdemängden för funktionen $f(x) = (\cdots)$.
  Svar: $V_f = [1, 3] \cup]4, \infty[$.

- Uppgift: Ange det största värdet som arean av en triangel med egenskaperna *si-och-så* kan anta.
  Svar: Den största möjliga arean är 15 (vilket inträffar när triangeln ser ut *såhär-och-såhär*).

- Uppgift: Ange de största möjliga intervallen där $f(x) = (\cdots)$ är strängt växande.
  Svar: f är strängt växande på intervallen $[0, 5]$ och $[17, \infty[$ (men inte på några större intervall).

- Uppgift: Visa att olikheten $(\cdots) \geq 0$ gäller om $x \geq 0$.
  På ”visa-uppgifter” består ju ”svaret” egentligen av hela redovisningen, men om man vill sammanfatta på slutet kan man t.ex. skriva såhär: Undersökningen ovan av funktionen $f(x) = (\cdots)$ visar att $f(17) = 0$ är funktionens minsta värde på intervallet $[0, \infty[$. Alltså är $(\cdots) \geq 0$ för alla $x \geq 0$, vilket skulle visas.