LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen

TATA41
TEN1

Övningstentamen 3 i Envariabelanalys 1

Penna, radergummi, linjal, passare och grad-/radianskiva utan formler på får användas. Inga andra hjälpmedel är tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och innehålla ett tydligt utskrivet svar till varje uppgift. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Tentamen består av tre delar: A1, A2 och B.

- **Del A1** består av 2 uppgifter, numrerade 1 och 2, värda 3p var.
- **Del A2** består av 2 uppgifter, numrerade 3 och 4, värda 3p var.
- **Del B** består av 3 uppgifter, numrerade 5–7, värda 3p var.

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2p.
För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) räcker krav K1, K2 och K3, där

- **K1:** Minst 2 poäng på del A1.
- **K2:** Minst 2 poäng på del A2.
- **K3:** Minst 3/4/5 godkända uppgifter och minst 8/12/16 poäng totalt.

Del A1 - Differentialkalkyl

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = 4\ln|x| - \ln(4x^2+1) - 6\arctan 2x$. Ange alla lokala extrempunkter samt lodräta och vågräta asymptoter.

2. Undersök gränsvärdena

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{10x - 2x^2 - 8}{x^2 - 1}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 7x}\right)$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(\ln(x+3) - \ln x\right)$.

Var god vänd!

Del A2 - Integralkalkyl

3. Beräkna

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+x-2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \sin x \sin 2x\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^3 e^{\sqrt{x+1}}\,dx.$

4. Beräkna $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ och $\displaystyle\int_4^\infty \frac{dx}{x\left(\sqrt{x}+3\right)}$ eller visa divergens.

Del B

5. (a) Är någon/några av funktionerna $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \arctan x$, $f_3(x) = -\dfrac{1}{x}$, $f_4(x) = x^3$ och $f_5(x) = |x| + 2x$ strängt växande? Vilken/vilka i så fall? Endast svar ska anges. Inga motiveringar ska lämnas in.

   (b) Formulera medelvärdessatsen för derivator.

   (c) Antag att f är definierad på ett intervall I och att $f'(x) > 0$ för alla $x \in I$. Visa att f är strängt växande på I.

6. Visa att $\displaystyle\sum_{k=1}^{1000} ke^{-k^2} < \frac{3}{2e}.$

7. Antag att $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + f(x)^2}$ för $x \geq 1$. Visa att f är begränsad för $x \geq 1$.
