Linköpings universitet
Matematiska institutionen
TATA41 Envariabelanalys 1
Magnus Herberthson

2015-03-30

Taktiska tentatips

För att klara tentan i TATA41 måste man så klart ha tillägnat sig kursinnehållet i tillräcklig omfattning. Ibland känner man att man inte har bottnat i begreppen, men ibland känner man kanske att man "kan kursen", men att det ändå går på tok. Frågan är varför, och vad man kan tänka på för att det skall gå bättre vid skrivingstillfället.

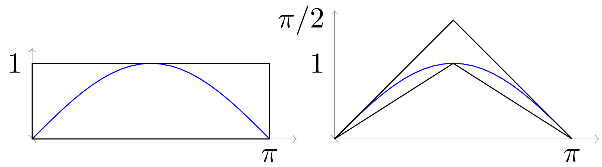
Nedanstående tips är inte menade att på något vis ersätta inläsning av stoffet, men när man väl tenterar kan man ge akt på "onödiga"/vanliga misstag som kostar poäng, och försöka undvika dessa. Tentataktik helt enkelt.

Oavsett upplägg går det inte att komma ifrån att TATA41 bygger på Grunken, och det mesta där behövs verkligen i TATA41. De elementära funktionerna, olikheter, trig- och log-lagarna et cetera. Vet man inte hur e^{-x} ser ut blir allt jobbigare. Spana in Grunken med andra ord.

- Kontroll?
  Många poäng går förlorade på småfel/slarvfel som dels får ödesdigra konsekvenser, och som dels går att hitta med en enkel kontroll. Ibland kontrollerar man sina räkningar genom att tänka igenom dem "i huvudet en gång till", men det visar sig att det är lätt att upprepa ett misstag igen på det sättet. Om man kan skall man kontrollera på ett "annat sätt". Exempel: om du gjort en partialbråksuppdelning, gå bakvägen; det vill säga slå ihop termerna och se att du får det du började med. Om du räknat ut en primitiv funktion, derivera ditt svar och jämför med det du började med.

- Går lösningen att följa?
  Hur mycket måste man skriva? Svårt att ge ett kort svar, men grundtipset är att låtsas att man inte själv gjort räkningarna man just skrivit ner. Försök sedan läsa dem och se om du kan förstå lösningen som 'utomstående'. Går det att följa dina argument? Förstår man vad som händer? Skriv vad du gör, inte bara med formler utan även text. Inför beteckningar. Skriv svar.

- Verkar svaret rimligt?
  Vad som är ett orimligt svar kan alltid diskuteras, men ett klassiskt exempel är att integralen av en positiv funktion, via areatolkningen, inte kan vara negativ. (Vi förutsätter att undre gräns är mindre än övre gräns.)

  Ser du hur den vänstra figuren ger uppskattningen $0 \leq \int_0^{\pi} \sin(x)dx \leq \pi$ och den högra ger $\pi/2 \leq \int_0^{\pi} \sin(x)dx \leq \pi^2/4$? [$\int_0^{\pi} \sin(x)dx = 2$]

- Division med noll.
  Tyvärr en klassiker. Exempel. Beräkna $\int \frac{dx}{x^{\alpha}}$. Här gäller det att INTE vara för snabb

och skriva $\int \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} + C$ trots att kontrollderivering verkar ge rätt svar. Problemet är att vi som ALLTID måste undvika division med noll, och hur ser det ut om $\alpha = 1$? Vad blir då $\frac{1}{1-\alpha}$? Vi måste alltså undanta $\alpha = 1$ i kalkylen ovan och undersöka det separat: $\alpha = 1$ ger $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$. Svaret bör alltså vara

$$\int \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} + C, & \alpha \neq 1 \\ \ln|x| + C, & \alpha = 1 \end{cases}$$

Ett annat exempel: Låt n vara ett heltal. Beräkna $\int_0^{2\pi} \cos(nx) dx$. Om man är för snabb kanske man skriver $\int_0^{2\pi} \cos(nx) dx = [\frac{1}{n} \sin(nx)]_0^{2\pi} = 0 - 0 = 0$ eftersom $\sin(n 2\pi) = 0$ om n är ett heltal. Återigen är problemet att n kanske är 0, och då har vi $\int_0^{2\pi} \cos(0x) dx = \int_0^{2\pi} 1 dx = 2\pi$. Svaret blir alltså, om det är givet att n är ett heltal,

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx) dx = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 2\pi, & n = 0 \end{cases}$$

- Belopp
  För reella x gäller
  $$\sqrt{x^2} = |x|.$$
  'Typfelet' är att i stället för $\sqrt{x^2 + x} \underset{x \neq 0}{=} |x| \sqrt{1 + 1/x}$ underlåta att skriva ut beloppstecknet. Om då x råkar vara negativt kan vad som helst hända.

- Inre derivata
  Om man söker en primitiv funktion, FÅR MAN INTE 'dela med inre derivatan' utom i fallet att den är konstant. Att man inte får det ser man när man kontrollderiverar. Exempel: $\int \sin(3x) dx = \frac{-\cos(3x)}{3} + C$. Här framgår inte hur man tänkt, men ifall man nu delat med 3 så fick man det eftersom 3 är konstant. Exempel: $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C$, och mycket mer finns inte att säga. EMELLERTID! Prova att derivera $\frac{\ln(1+x^2)}{2x} + C$ så får du se. $2x$ är inte konstant.

- Stegvis gränsövergång
  Om du arbetar med ett gränsvärde i variabeln x, säg, får inte vissa x försvinna (genom gränsövergång, ren algebraisk förkortning går så klart bra) efter hand, och vissa stå kvar. Exempel: Som bekant gäller att $(1 + 1/x)^x \to e, x \to \infty$. Om man nu får för sig att först titta på $1 + 1/x$, som förvisso går mot 1 då $x \to \infty$, kan man med stegvis gränsövergång (OTILLÅTET!) landa i slutsatser i stil med $(1 + 1/x)^x \to 1^x = 1 \to 1$, då $x \to \infty$.

- Gränsvärde, skrivsätt
  Var snäll och välj ett av skrivsätten
  $$\lim_{x \to a} f(x) = A, \text{ eller } f(x) \to A \text{ då } x \to a$$

men blanda dem ej. Tänk på att $\lim_{x\to a} f(x)$ står för ett tal ifall gränsvärdet finns (i det här fallet talet A). I det högra skrivsättet har man en funktion, $f(x)$, som just *går mot*, närmar sig, $(\to)$ talet A då $x \to a$. Om man börjar skriva ut $\lim_{x\to a}$ dvs $\lim_{x\to a} f(x) = ...$ så får man ta och fortsätta. Om man inte vill det är det bättre att använda det högra skrivsättet. I nedanstående exempel är det inte lämpligt att ersätta $\dagger$ med $=$ eller $\to$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x}{x^2+2x} \dagger \frac{x^2(1+1/x)}{x^2(1+2/x)} \dagger \frac{x^2}{x^2} = 1 \to 1 \text{ då } x \to \infty.$$

Den första $\dagger$ kan vi inte ersätta med något vettigt, efter som vi slutat skriva $\lim_{x\to\infty}$. Den andra $\dagger$ går inte heller att byta ut eftersom vi där gjort stegvis gränsövergång vilket är otillåtet. Vi kan välja mellan

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x}{x^2+2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(1+1/x)}{x^2(1+2/x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{(1+1/x)}{(1+2/x)} = \frac{1+0}{1+0} = 1$$

och

$$\frac{x^2+x}{x^2+2x} \underset{x\neq 0}{=} \frac{x^2(1+1/x)}{x^2(1+2/x)} = \frac{(1+1/x)}{(1+2/x)} \to \frac{1+0}{1+0} = 1 \text{ då } x \to \infty.$$

- Variabelbyte, bytte du gränser?
  Vid bestämda integraler där man gör variabelbyte, får man inte glömma att också byta gränser.

- Lästal
  Lästal har oförtjänt dåligt rykte. En tydlig figur, samt att man angriper talet i lugn takt allt efter texten, brukar räcka långt. (Läs dock hela uppgiften först.) Vad som ofta händer är att man landar i en funktion $f(x)$ där man skall undersöka största/minsta värde, möjliga värden eller så. Gör funktionsundersökning som vanligt, med teckentabell (ofta enkel). Många nöjer sig tyvärr med att hitta stationära punkter (alltså punkter där $f'(x) = 0$), men reder aldrig ut om det är max eller min eller ej.

- Faktorisering
  När man skall göra en teckentabell skall man ofta faktorisera ett polynom. Det är då till hjälp att hitta polynomets nollställen, men glöm inte bort att kolla din faktorisering. Exempel: Vi skall faktorisera $4 - 2x - 2x^2$. Någon kanske observerar att

$$\begin{gathered} 4 - 2x - 2x^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \\ -2(x^2 + x - 2) = 0 \\ \Leftrightarrow \\ (x^2 + x - 2) = 0 \\ \Leftrightarrow \\ (x-1)(x+2) = 0. \end{gathered}$$

Men det betyder ju inte att $4 - 2x - 2x^2$ är lika med $(x-1)(x+2)$, även om de har samma nollställen. Det som gäller är att $4 - 2x - 2x^2 = -2(x-1)(x+2)$. Om man har glömt en faktor 2 är det fortfarande fel, men teckentabellen ger ändå rätt besked. Om man glömmer faktorn -2, som man kan tänka sig i det här exemplet, får teckentabellen ett genomgående teckenfel.

- log-lagarna
  Hör som sagt var till Grunken. Även om man vet att $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$, så måste ju $2\ln a - \ln b$ hanteras så att $2\ln a - \ln b = \ln a^2 - \ln b = \ln \frac{a^2}{b}$ (om det är den omskrivningen man vill göra). Att $\ln a - \ln b$ omöjligen kan ha något med $\frac{\ln a}{\ln b}$ att göra ser man om man sätter $a = b = 1$. Då blir $\ln a - \ln b = 0 - 0 = 0$ medan $\frac{\ln a}{\ln b}$ ger $\frac{0}{0}$ vilket inte ser bra ut.