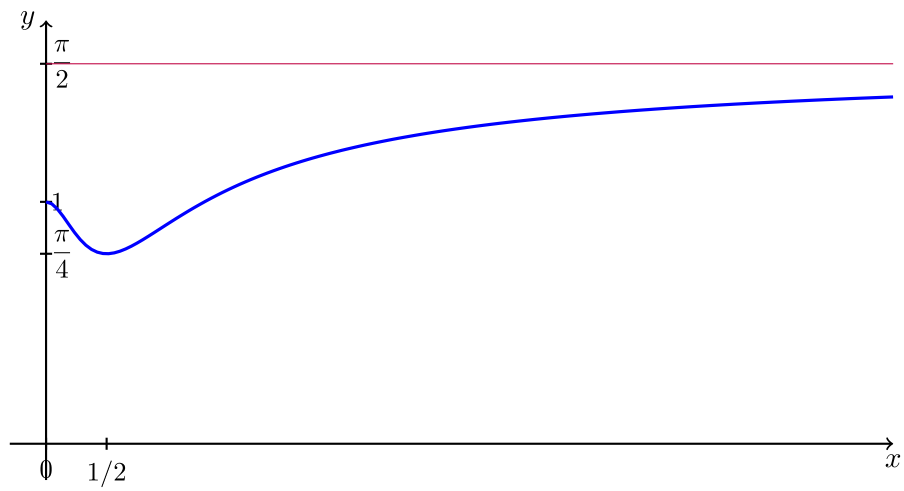
Lösningsskisser för TATA41 230323

1) f definierad för $x \geq 0$. Standardräkningar (Gör dessa!) ger $f'(x) = \dfrac{8x(2x-1)}{(1+4x^2)^2}$. Teckentabell:

x	0		$1/2$	
$8x$	0	$+$		$+$
$2x-1$		$-$	0	$+$
$(1+4x^2)^2$		$+$		$+$
$f'(x)$	ej def.	$-$	0	$+$
$f(x)$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Vi ser att $f(x) = \arctan 2x + \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{-2+\frac{1}{x}}{4+\frac{1}{x^2}} \to \dfrac{\pi}{2} + 0 \cdot \dfrac{-2+0}{4+0} = \dfrac{\pi}{2}$, $x \to \infty$. Vidare är $f(1/2) = \dfrac{\pi}{4}$ och $f(0) = 1$. Detta ger grafen



Svar: Graf enligt ovan. Enligt denna är $V_f = \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Linjen $y = \dfrac{\pi}{2}$ är vågrät asymptot då $x \to \infty$. f har en lokal minimipunkt i $x = \dfrac{1}{2}$ (med det lokala minimivärdet $f(1/2) = \dfrac{\pi}{4}$) och en lokal maximipunkt i $x = 0$ (med det lokala maximivärdet $f(0) = 1$).

2a) Partialbråksuppdelning ger (C är en godtycklig konstant)

$$\int \frac{2x}{8x - x^2 - 15}\,dx = \int \frac{-2x}{(x-3)(x-5)}\,dx = \int \left(\frac{3}{x-3} - \frac{5}{x-5}\right) dx = 3\ln|x-3| - 5\ln|x-5| + C.$$

2b) Partialintegration av en etta följt av polynomdivision ger (C är en godtycklig konstant)

$$\int \ln(x^2+1)\,dx = x\ln(x^2+1) - \int \frac{2x^2}{x^2+1}\,dx = x\ln(x^2+1) - \int \left(2 - \frac{2}{x^2+1}\right) dx$$
$$= x\ln(x^2+1) - 2x + 2\arctan x + C.$$

2c) Kedjeregeln baklänges (gör bytet $t = x^2$ i första termen om det är svårt att se!) samt en partialintegration ger (C är en godtycklig konstant)

$$\int x\left(\cos x^2 - \cos 2x\right)dx = \frac{1}{2}\sin x^2 - \frac{x}{2}\sin 2x + \int \frac{1}{2}\sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin x^2 - \frac{x}{2}\sin 2x - \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

Svar: (a) $3\ln|x-3| - 5\ln|x-5| + C$ (b) $x\ln(x^2+1) - 2x + 2\arctan x + C$ (c) $\frac{1}{2}\sin x^2 - \frac{x}{2}\sin 2x - \frac{1}{4}\cos 2x + C$.

3a) $$\frac{x}{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}} = \frac{x(\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x})}{2+3x-(2-x)} = \frac{1}{4}(\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}) \to \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,,\ x \to 0.$$

3b) Bytet $t = 1/x$ ger $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+5)-\ln x}{\sin\frac{2}{x}} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(1+5t)}{\sin 2t} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(1+5t)}{5t}\cdot\frac{5}{2\cdot\frac{\sin 2t}{2t}} = \frac{5}{2}$, enl. standardgränsvärden.

3c) $$\frac{\ln(x-1)}{\ln(x^2-1)} = \frac{\ln x + \ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\ln x^2 + \ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\ln x}}{2+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{\ln x}} \to \frac{1}{2}\,,\ x\to\infty \text{ ty } \ln x \to \infty\,,\ x\to\infty.$$

Observera att ingen slutsats kan dras innan sista steget. Stegvis gränsövergång fungerar som bekant *inte*.

Svar: (a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{5}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$.

4) Partialbråksuppdelning ger

$$\int_1^a \frac{x+1}{x^3+4x}\,dx = \int_1^a\left(\frac{1/4}{x} - \frac{x/4-1}{x^2+4}\right)dx = \left[\frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{8}\ln(x^2+4)\right]_1^a + \frac{1}{2}\int_1^a \frac{1/2}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx$$
$$= \frac{1}{8}\ln\frac{a^2}{a^2+4} + \frac{1}{8}\ln 5 + \frac{1}{2}\left[\arctan\frac{x}{2}\right]_1^a = \frac{1}{8}\ln 5 - \frac{1}{8}\ln\left(1+\frac{4}{a^2}\right) + \frac{1}{2}\arctan\frac{a}{2}$$
$$-\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2} \to \frac{1}{8}\ln 5 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}\,,\ a\to\infty,$$

vilket visar att $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x+1}{x^3+4x}\,dx$ är konvergent med värdet $\frac{1}{8}\ln 5 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}$.

Vi får också

$$\int_b^1 \frac{x+1}{x^3+4x}\,dx = \left[\frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{8}\ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\right]_b^1$$
$$= -\frac{1}{8}\ln 5 + \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\ln b + \frac{1}{8}\ln(b^2+4) - \frac{1}{2}\arctan\frac{b}{2} \to \infty\,,\ b\to 0^+,$$

ty $\ln b \to -\infty\,,\ b\to 0^+$ och övriga termer har ändliga gränsvärden.

Detta visar att $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{x^3+4x}\,dx$ är divergent och därmed är också $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x+1}{x^3+4x}\,dx$ divergent.

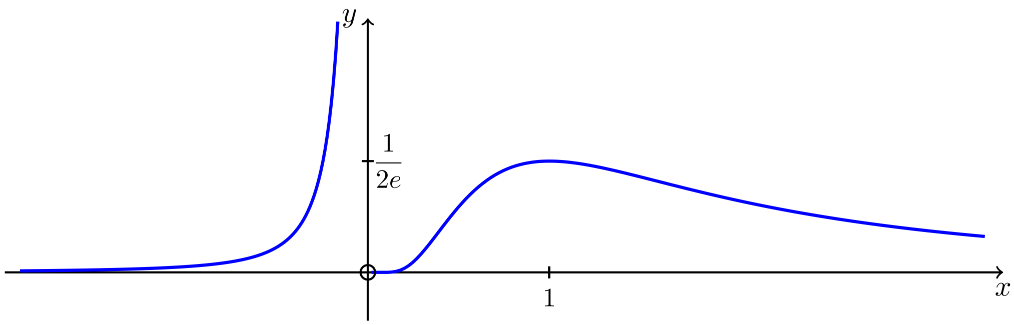
Svar: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x+1}{x^3+4x}\,dx = \frac{1}{8}\ln 5 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}$ och $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x+1}{x^3+4x}\,dx$ är divergent.

5) Sätt $f(x) = \dfrac{e^{-1/x}}{x^2+1}$, $x \neq 0$. Standardräkningar (Gör!) ger $f'(x) = e^{-1/x}\dfrac{(1-x)(2x^2+x+1)}{x^2(x^2+1)^2}$.

Observera att $2x^2+x+1 = 2\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2 + \dfrac{7}{8} > 0$ för alla x. Detta ger teckentabellen:

x		0		1	
$e^{-1/x}$	$+$	ej def.	$+$		$+$
$x^2(x^2+1)^2$	$+$	0	$+$		$+$
$1-x$	$+$		$+$	0	$-$
$2x^2+x+1$	$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	ej def.	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	ej def.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

$f(x) \to 0\,,\ x \to 0^+$, och då $x \to \pm\infty$, $f(x) \to \infty\,,\ x \to 0^-$ och $f(1) = \dfrac{1}{2e}$. Detta ger grafen



Avläsning i grafen ger nu antalet lösningar för varje värde på konstanten k.

Svar: Ekvationen $f(x) = k$ saknar lösning om $k \leq 0$. Den har 3 lösningar om $0 < k < \dfrac{1}{2e}$, 2 lösningar om $k = \dfrac{1}{2e}$ och 1 lösning om $k > \dfrac{1}{2e}$.

6a) Se kursboken eller föreläsningsanteckningarna.

6b) För $x > 0$ är $f(x) = xe^x$ vilket ger att $F(x) = \int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = (x-1)e^x + C_1$ för $x > 0$. Då F måste vara kontinuerlig i 0 kan vi bestämma C_1 genom att låta $x \to 0^+$, vilket ger $0 = F(0) = \lim\limits_{x\to0^+} F(x) = \lim\limits_{x\to0^+}((x-1)e^x + C_1) = C_1 - 1$ d v s $C_1 = 1$.

För $x < 0$ är $f(x) = -xe^x$. Liknande räkningar (Gör dessa!) ger att $F(x) = (1-x)e^x + C_2$ för $x < 0$ och genom att låta $x \to 0^-$ fås att $0 = F(0) = \lim\limits_{x\to0^-} F(x) = 1 + C_2$ varur $C_2 = -1$.

Detta ger att $F(x) = \begin{cases} (x-1)e^x + 1 & , \quad x \geq 0 \\ (1-x)e^x - 1 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$ är enda möjligheten.

Återstår att visa att $F'(0) = f(0) = 0$. Vi beräknar därför F:s höger- och vänsterderivata i 0:

$$F'_+(0) = \lim_{h\to0^+}\frac{F(h)-F(0)}{h} = \lim_{h\to0^+}\frac{(h-1)e^h+1-0}{h} = \lim_{h\to0^+}\left(e^h - \frac{e^h-1}{h}\right) = e^0 - 1 = 0,$$

enligt ett standardgränsvärde. Vidare är

$$F'_-(0) = \lim_{h\to0^-}\frac{F(h)-F(0)}{h} = \lim_{h\to0^-}\frac{(1-h)e^h-1-0}{h} = /\text{Genomför själv detaljerna!}/ = 0.$$

Då $F'_+(0) = 0 = F'_-(0)$ följer nu att $F'(0) = 0 = f(0)$ så vi har visat att $F'(x) = f(x)$ för alla x. Då $F(0) = 0$ enligt ovan är alltså F den sökta primitiven.

Alternativ 1: Istället för att visa att $F'(0) = 0$ med derivatans definition går det att resonera på följande sätt: Enligt analysens huvudsats har f en primitiv på $\mathbf{R}$ (ty f är kontinuerlig på $\mathbf{R}$). Då F ovan är den enda möjligheten måste den därför vara den sökta primitiven.

Alternativ 2: Enligt analysens huvudsats är $F(x) = \int_0^x |t|e^t\, dt$ en primitiv till f och självklart är då $F(0) = 0$. Beräkning av integralen ger sedan samma uttryck som ovan.

Svar: (a) Se kursboken. (b) $F(x) = \begin{cases} (x-1)e^x + 1 & , \quad x \geq 0 \\ (1-x)e^x - 1 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$

7) Antag att $f(0) > 0$ och tag x så litet att $f(t) > f(0)/2$ för $x \leq t \leq 2x$ (möjligt ty f kont.). Då är $\int_x^{2x} \frac{f(t)}{t^2}\, dt \geq \frac{f(0)}{2} \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2} = \frac{f(0)}{4x} \to \infty\,,\ x \to 0^+$ så $\int_x^{2x} \frac{f(t)}{t^2}\, dt \to \infty\,,\ x \to 0^+$ om $f(0) > 0$.

Samma resonemang med $-f$ istället för f visar att $\int_x^{2x} \frac{f(t)}{t^2}\, dt \to -\infty\,,\ x \to 0^+$ om $f(0) < 0$.

Återstår fallet $f(0) = 0$. En partialintegration ger då

$$\int_x^{2x} \frac{f(t)}{t^2}\, dt = \left[-\frac{f(t)}{t}\right]_x^{2x} + \int_x^{2x} \frac{f'(t)}{t}\, dt = \frac{f(x)}{x} - \frac{f(2x)}{2x} + \int_x^{2x} \frac{f'(t) - f'(0)}{t}\, dt + \int_x^{2x} \frac{f'(0)}{t}\, dt$$

Derivatans definition ger $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x} \to f'(0)\,,\ x \to 0^+$ och $\frac{f(2x)}{2x} \to f'(0)\,,\ x \to 0^+$ fås på samma sätt.

Beräkning av sista termen ger $\int_x^{2x} \frac{f'(0)}{t}\, dt = f'(0)\ln 2$ och i tredje termen ger medelvärdessatsen för integraler att det finns ξ med $x < \xi < 2x$ (d v s $\xi \to 0\,,\ x \to 0^+$ enligt instängningsregeln) sådant att

$$\int_x^{2x} \frac{f'(t) - f'(0)}{t}\, dt = \frac{f'(\xi) - f'(0)}{\xi} x \to f''(0) \cdot 0 = 0\,,\ x \to 0^+.$$

Sammantaget ger detta att $\int_x^{2x} \frac{f(t)}{t^2}\, dt \to f'(0) - f'(0) + 0 + f'(0)\ln 2 = f'(0)\ln 2$ om $f(0) = 0$.

Svar: $\int_x^{2x} \frac{f(t)}{t^2}\, dt \to \infty\,,\ x \to 0^+$ om $f(0) > 0$. $\int_x^{2x} \frac{f(t)}{t^2}\, dt \to -\infty\,,\ x \to 0^+$ om $f(0) < 0$. $\int_x^{2x} \frac{f(t)}{t^2}\, dt \to f'(0)\ln 2\,,\ x \to 0^+$ om $f(0) = 0$.

Anmärkning: Förutsättningarna i uppgiften är egentligen onödigt starka. Slutsatsen i svaret är sann även om f bara är en gång kontinuerligt deriverbar. Detta kan bevisas t ex med hjälp av den generaliserade medelvärdessatsen.