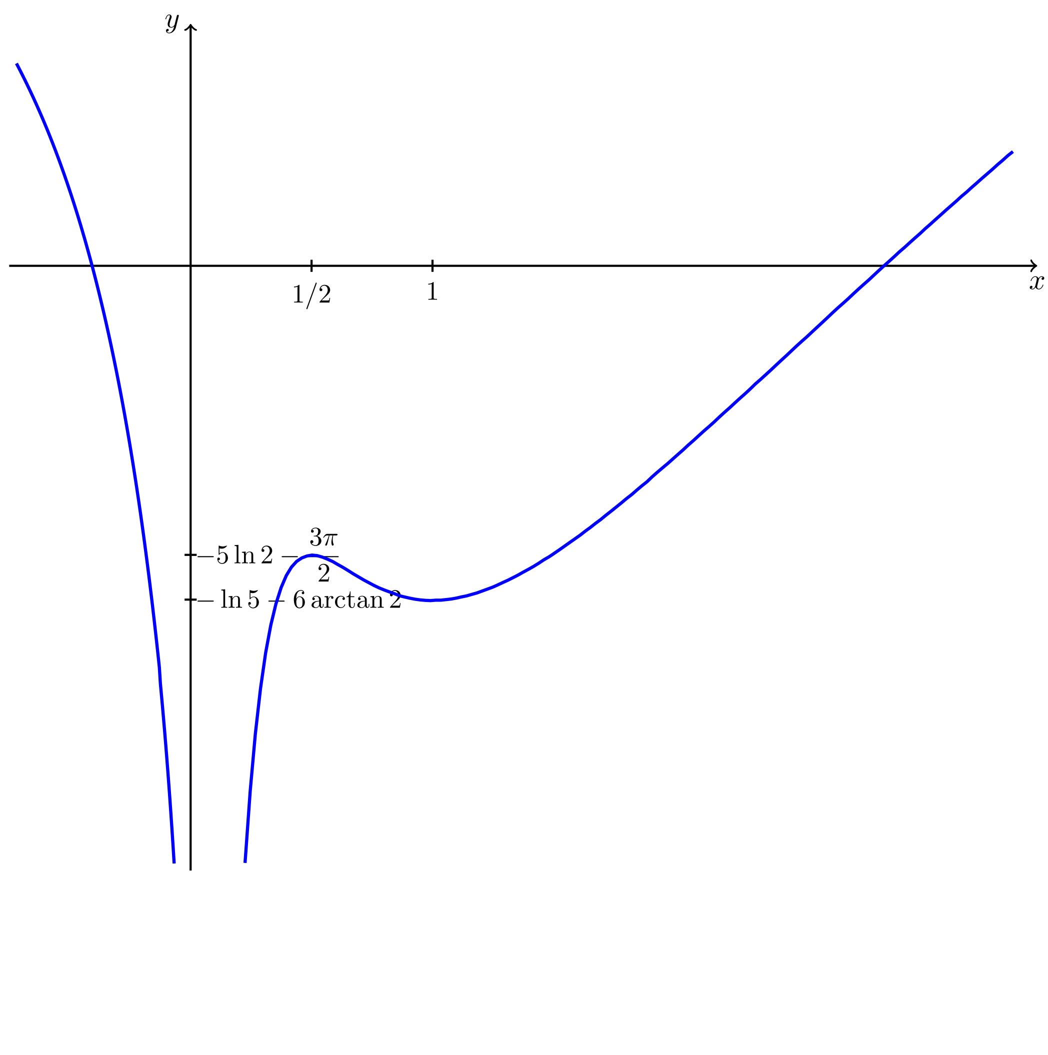
Lösningsskisser för TATA41 230605

1) f definierad för $x \neq 0$. Standardräkningar (Gör dessa!) ger $f'(x) = \dfrac{4(x-1)(2x-1)}{x(4x^2+1)}$.

Teckentabell:

x		0		1/2		1	
$4(x-1)$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$2x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$4x^2+1$	$+$		$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	ej def.	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	ej def.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Vi ser att $f(x) = \ln \dfrac{x^4}{4x^2+1} - 6 \arctan 2x \to -\infty\,,\ x \to 0$ ty $\ln t \to -\infty\,,\ t \to 0^+$ och $\arctan 0 = 0$. Vidare: $f(x) = \ln \dfrac{x^2}{4 + \frac{1}{x^2}} - 6 \arctan 2x \to \infty\,,\ x \to \pm\infty$ ty $\arctan 2x \to \pm\dfrac{\pi}{2}\,,\ x \to \pm\infty$, och $f(1/2) = -5\ln 2 - \dfrac{3\pi}{2}$ och $f(1) = -\ln 5 - 6 \arctan 2$. Detta ger grafen



Svar: Graf enligt ovan. Linjen $x = 0$ är lodrät asymptot och vågräta asymptoter saknas. f har en lokal maximipunkt i $x = \dfrac{1}{2}$ (med det lokala maximivärdet $f(1/2) = -5\ln 2 - \dfrac{3\pi}{2}$) och en lokal minimipunkt i $x = 1$ (med det lokala minimivärdet $f(0) = -\ln 5 - 6\arctan 2$).

2a) Polynomdivision följt av partialbråksuppdelning ger (C är en godtycklig konstant)

$$\int \frac{x^2}{x^2+x-2}\,dx = \int \left(1 + \frac{1/3}{x-1} - \frac{4/3}{x+2}\right) dx = x + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{4}{3}\ln|x+2| + C.$$

2b) Trig.-omskrivning följt av bytet $t = \sin x$, $dt = \cos x\,dx$ ger (C är en godtycklig konstant)

$$\int \sin x \sin 2x\,dx = 2\int \sin^2 x\cos x\,dx = 2\int t^2\,dt = \frac{2}{3}t^3 + C = \frac{2}{3}\sin^3 x + C.$$

2c) Bytet $t = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow x = t^2 - 1\,,\ t \geq 0$, $dx = 2t\,dt$ ger

$$\int_0^3 e^{\sqrt{x+1}}\,dx = 2\int_1^2 te^t\,dt = 2\left[te^t\right]_1^2 - 2\int_1^2 e^t\,dt = 4e^2 - 2e - 2\left[e^t\right]_1^2 = 2e^2.$$

Svar: (a) $x + \dfrac{1}{3}\ln|x-1| - \dfrac{4}{3}\ln|x+2| + C$ (b) $\dfrac{2}{3}\sin^3 x + C$ (c) $2e^2$.

3a) $\dfrac{10x-2x^2-8}{x^2-1} = \dfrac{(x-1)(8-2x)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{8-2x}{x+1} \to \dfrac{8-2\cdot 1}{1+1} = 3\,,\ x \to 1.$

3b) $x - \sqrt{x^2-7x} = \dfrac{x^2-(x^2-7x)}{x+\sqrt{x^2}\sqrt{1-\frac{7}{x}}} = \dfrac{7}{1+\sqrt{1-\frac{7}{x}}} \to \dfrac{7}{1+\sqrt{1}} = \dfrac{7}{2}\,,\ x \to \infty$ ty $\sqrt{x^2} = x$ eftersom vi kan anta att $x > 0$.

3c) $t = 1/x$ ger $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(\ln(x+3) - \ln x\right) = \lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{3}{x}\right) = \lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(1+3t)}{3t}\cdot 3 = 1\cdot 3 = 3,$ enl. ett standardgränsvärde.

Svar: (a) 3 (b) $\dfrac{7}{2}$ (c) 3.

4) $\displaystyle\int_1^a \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_1^a = 2 - \frac{2}{\sqrt{a}} \to 2\,,\ a \to \infty$, så $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ är konvergent med värdet 2.

Bytet $t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2\,,\ t \geq 0$, $dx = 2t\,dt$ samt en partialbråksuppdelning ger sedan

$$\int_4^\infty \frac{dx}{x(\sqrt{x}+3)} = \lim_{a\to\infty}\int_4^a \frac{dx}{x(\sqrt{x}+3)} = /b = \sqrt{a}/ = \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{2}{t(t+3)}\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_2^b \left(\frac{2/3}{t} - \frac{2/3}{t+3}\right) dt$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{2}{3}\ln\left(1+\frac{3}{t}\right)\right]_2^b = \frac{2}{3}\lim_{b\to\infty}\left(\ln\frac{5}{2} - \ln\left(1+\frac{3}{b}\right)\right) = \frac{2}{3}\ln\frac{5}{2}.$$

vilket visar att $\displaystyle\int_4^\infty \frac{dx}{x(\sqrt{x}+3)}$ är konvergent med värdet $\dfrac{2}{3}\ln\dfrac{5}{2}$.

Svar: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x}} = 2$ och $\displaystyle\int_4^\infty \frac{dx}{x(\sqrt{x}+3)} = \frac{2}{3}\ln\frac{5}{2}$.

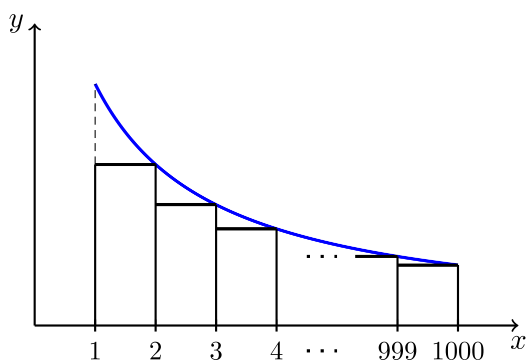
5a) f_2, f_4 och f_5 är strängt växande. f_1 och f_3 är *ej* strängt växande.

5b) Se kursboken eller föreläsningsanteckningarna.

5c) Om $x_1\,,\ x_2 \in I$, där $x_2 > x_1$, ger medelvärdessatsen att det finns ett tal ξ med $x_1 < \xi < x_2$ (så $\xi \in I$, d v s $f'(\xi) > 0$) sådant att $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) > 0$ vilket visar att $f(x_2) > f(x_1)$. Det följer att f är strängt växande på I eftersom $x_1\,,\ x_2 \in I$ var godtyckliga.

Svar: (a) f_2, f_4 och f_5 är strängt växande. (b) Se kursboken (c) Se ovan.

6) Sätt $f(x) = xe^{-x^2}$. Då är $f'(x) = (1-2x^2)e^{-x^2} < 0$ för $x \geq 1$ så f är strängt avtagande på $[1,\infty[$. Då $f(x) = \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{x^2}{e^{x^2}} \to 0\cdot 0 = 0\,,\ x \to \infty$ och $f(1) = \dfrac{1}{e}$ kan vi rita f:s graf (Gör detta!!!):



Figuren ger att $2e^{-2^2}\cdot 1 + 3e^{-3^2}\cdot 1 + 4e^{-4^2}\cdot 1 + \ldots 999e^{-999^2}\cdot 1 + 1000e^{-1000^2}\cdot 1 = \displaystyle\sum_{k=2}^{1000} ke^{-k^2}$

är en undersumma till $\displaystyle\int_1^{1000} xe^{-x^2}\,dx$, så att $\displaystyle\sum_{k=2}^{1000} ke^{-k^2} < \int_1^{1000} xe^{-x^2}\,dx$. Detta ger

$$\sum_{k=1}^{1000} ke^{-k^2} = \frac{1}{e} + \sum_{k=2}^{1000} ke^{-k^2} < \frac{1}{e} + \int_1^{1000} xe^{-x^2}\,dx = \frac{1}{e} + \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_1^{1000} = \frac{1}{e} + \frac{1}{2e} - \frac{1}{2}e^{-10^6} < \frac{3}{2e},$$

vilket skulle visas.

Svar: Se ovan.

7) $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + f(x)^2} > 0$ på $[1,\infty[$ och f' är också kontinuerlig på $[1,\infty[$ ty f är deriverbar och därmed kontinuerlig där. Detta ger att f är strängt växande på $[1,\infty[$ enligt sats. Med $C = f(1)$ fås enligt insättningsformeln att

$$C \leq f(x) = C + \int_1^x f'(t)\,dt = C + \int_1^x \frac{dt}{t^2 + f(t)^2} \leq C + \int_1^x \frac{dt}{t^2} = C + 1 - \frac{1}{x} < C + 1,$$

för $x \geq 1$. Detta visar att f är begränsad på $[1,\infty[$.