LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen

TATA41
TEN1

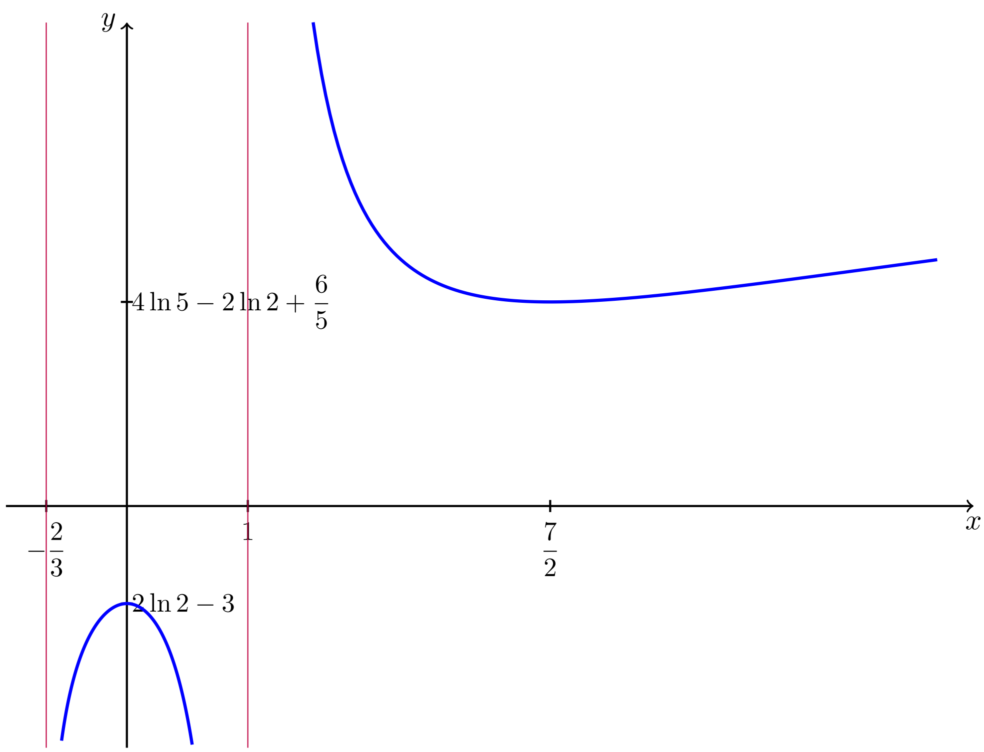
Lösningsskisser för TATA41 230822

1) f är definierad då $x > -\dfrac{2}{3}$ och $x \neq 1$. Standardräkningar (Gör dessa!) ger $f'(x) = \dfrac{3x(2x-7)}{(3x+2)(x-1)^2}$.

Teckentabell:

x	$-2/3$		0		1		$7/2$	
$3x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$2x-7$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$3x+2$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$(x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	ej def.	$+$	0	$-$	ej def.	$-$	0	$+$
$f(x)$	ej def.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	ej def.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Vi ser att $f(x) \to -\infty\,,\ x \to -\dfrac{2}{3}^{+}$, $f(x) \to \pm\infty\,,\ x \to 1^{\pm}$ och $f(x) \to \infty\,,\ x \to \infty$. Vidare är $f(7/2) = 2\ln\dfrac{25}{2} + \dfrac{6}{5} = 4\ln 5 - 2\ln 2 + \dfrac{6}{5}$ och $f(0) = 2\ln 2 - 3$. Detta ger grafen



Svar: Graf enligt ovan. Linjerna $x = -\dfrac{2}{3}$ och $x = 1$ är lodräta asymptoter. Vågräta asymptoter saknas. f har en lokal maximipunkt i $x = 0$ (med det lokala maximivärdet $f(0) = 2\ln 2 - 3$) och en lokal minimipunkt i $x = 7/2$ (med det lokala minimivärdet $f(7/2) = 4\ln 5 - 2\ln 2 + \dfrac{6}{5}$).

2a) $\dfrac{d}{dx}\left(-\dfrac{2x+1}{4}e^{-2x}\right) = -\dfrac{2e^{-2x}-2(2x+1)e^{-2x}}{4} = xe^{-2x}$ så $\displaystyle\int xe^{-2x}\,dx = -\frac{2x+1}{4}e^{-2x}+C$, där C är en godtycklig konstant.

2b) Trig.-ettan, bytet $t=\cos x$, $dt = -\sin x\,dx$ och partialbråksuppdelning ger (I = sökt integral)

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{4-\cos^2 x}\,dx = \int_1^0 \frac{-dt}{4-t^2} = \frac{1}{4}\int_0^1 \left(\frac{1}{2+t}+\frac{1}{2-t}\right)dt = \frac{1}{4}\left[\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{4}\ln 3.$$

Svar: (a) $-\dfrac{2x+1}{4}e^{-2x}+C$ (b) $\dfrac{1}{4}\ln 3$.

3a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2+x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{x+1} = \frac{1\cdot(1-1)}{1+1} = 0.$

3b) $\dfrac{x+e^{-x}}{\ln(x^2+e^{3x})} = \dfrac{x+e^{-x}}{\ln e^{3x}+\ln\left(1+\frac{x^2}{e^{3x}}\right)} = \dfrac{1+\frac{1}{x}e^{-x}}{3+\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{x^2}{e^{3x}}\right)} \to \dfrac{1+0\cdot 0}{3+0\cdot 0} = \dfrac{1}{3}$, $x\to\infty$ enligt ett standardgränsvärde.

3c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\tan x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2\cdot 9x^2\cdot\frac{\cos x^2}{\sin x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2\cdot 9\cdot\frac{\cos x^2}{\frac{\sin x^2}{x^2}} = 1^2\cdot 9\cdot\frac{\cos 0}{1} = 9$ enligt ett standardgränsvärde och p g a att cos är kontinuerlig.

Svar: (a) 0 (b) $\dfrac{1}{3}$ (c) 9.

4a) Bytet $t=2x^3$, $x^2\,dx = \dfrac{1}{6}dt$ ger (I_1 = sökt integral) $\displaystyle I_1 = \int_{16}^{\infty}\frac{1}{6}e^{-t}\,dt = \frac{1}{6}\lim_{a\to\infty}\left[-e^{-t}\right]_{16}^{a} =$ $\displaystyle\frac{1}{6}\lim_{a\to\infty}(e^{-16}-e^{-a}) = \frac{e^{-16}}{6}$, så $\displaystyle\int_2^{\infty} x^2e^{-2x^3}$ är konvergent med värdet $\dfrac{e^{-16}}{6}$.

4b) En standardprimitiv ger (I_2 = sökt integral) $\displaystyle I_2 = \int_2^{\infty}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)dx = \lim_{a\to\infty}\left[-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right]_2^a =$ $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$, d v s $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{x-2}{x^3}\,dx$ är konvergent med värdet $\dfrac{1}{4}$.

4c) Betrakta först $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{|x-2|}{x^3}\,dx = /\text{ty } x-2\geq 0/ = \int_2^{\infty}\frac{x-2}{x^3}\,dx = \frac{1}{4}$ enligt (b). Eftersom denna integral är konvergent får vi dela upp sökta integralen I_3: $\displaystyle I_3 = \int_1^2\frac{|x-2|}{x^3}\,dx + \int_2^{\infty}\frac{|x-2|}{x^3}\,dx$ ty den första av dessa integraler är inte generaliserad. För $1\leq x\leq 2$ är $x-2\leq 0$ d v s $|x-2| = -(x-2) = 2-x$. Detta ger

$$I_3 = \int_1^2\frac{|x-2|}{x^3}\,dx + \int_2^{\infty}\frac{|x-2|}{x^3}\,dx = \frac{1}{4}+\int_1^2\left(\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{1}{4}+\left[-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right]_1^2 = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

d v s $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{|x-2|}{x^3}\,dx$ är konvergent med värdet $\dfrac{1}{2}$.

Svar: (a) $\dfrac{e^{-16}}{6}$ (b) $\dfrac{1}{4}$ (c) $\dfrac{1}{2}$.

5a) Se kursboken eller föreläsningsanteckningarna.

5b) Det gäller att

$$\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{x} \to 1 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}\,, \ h \to 0$$

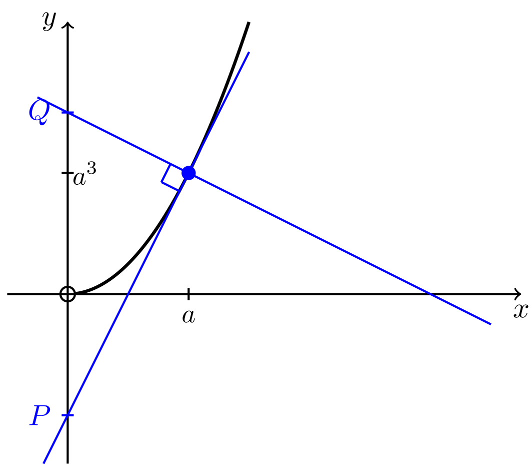
och

$$\frac{(x+h)e^{x+h}-xe^x}{h} = e^{x+h} + xe^x\frac{e^h-1}{h} \to e^{x+0}+xe^x \cdot 1 = (x+1)e^x\,, \ h \to 0,$$

där vi har använt två standardgränsvärden samt att exponentialfunktionen är kontinuerlig.

Svar: (a) Se ovan (b) $\dfrac{d}{dx}(\ln x) = \dfrac{1}{x}$ och $\dfrac{d}{dx}(xe^x) = (x+1)e^x$.

6) Låt (a, a^3) vara en godtycklig punkt på den givna kurvan. Figur:



Tangenten till kurvan i punkten (a, a^3) får ekvationen $y - a^3 = 3a^2(x-a) \Leftrightarrow y = 3a^2x - 2a^3$och skär y-axeln i $P : (0, -2a^3)$. Kurvnormalen i samma punkt är vinkelrät mot tangenten och har riktningskoefficienten $-\dfrac{1}{3a^2}$ vilket ger ekvationen $y - a^3 = -\dfrac{1}{3a^2}(x-a) \Leftrightarrow y = a^3 + \dfrac{1}{3a} - \dfrac{1}{3a^2}x$ och skärningspunkten $Q : \left(0, a^3 + \dfrac{1}{3a}\right)$ med y-axeln.

Låt $f(a)$ vara längden av sträckan PQ, d v s $f(a) = a^3 + \dfrac{1}{3a} - (-2a^3) = 3a^3 + \dfrac{1}{3a} = \dfrac{9a^4+1}{3a}$, $a > 0$. Vi söker den/de punkter där f antar sitt minsta värde (om ett sådant finns). Derivering ger $f'(a) = 9a^2 - \dfrac{1}{3a^2} = \dfrac{27a^4-1}{3a^2}$, så $f'(a) < 0$ om $0 < a < 3^{-3/4}$, $f'(a) = 0$ om $a = 3^{-3/4}$ och $f'(a) > 0$ om $a > 3^{-3/4}$. f är alltså strängt avtagande på $]0, 3^{-3/4}]$ och strängt växande på $[3^{-3/4}, \infty[$ vilket visar att punkterna P och Q hamnar närmast varandra då $a = 3^{-3/4}$.

Det minimala avståndet mellan P och Q blir då $f(3^{-3/4}) = \dfrac{9 \cdot (3^{-3/4})^4 + 1}{3 \cdot 3^{-3/4}} = \dfrac{4}{3\sqrt[4]{3}}$.

Svar: Punkterna hamnar så nära varandra som möjligt om punkten på kurvan är $(3^{-3/4}, 3^{-9/4})$.

7) Vi studerar först fallet att grad $p \geq 4$. Efter polynomdivision samt partialbråksuppdelning av divisionens rest får vi att alla primitiver till den givna funktionen ges av

$$\int \frac{p(x)}{x^2(1+x^2)}\,dx = \int \left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{1+x^2} \right) dx$$

$$= x^{n+1} \left(\frac{a_n}{n+1} + \frac{a_{n-1}}{nx} + \ldots + \frac{a_1}{2x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} + A\frac{\ln|x|}{x^{n+1}} - \frac{B}{x^{n+2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{C}{2} \cdot \frac{2\ln|x| + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^{n+1}} + D\frac{\arctan x}{x^{n+1}} + \frac{K}{x^{n+1}} \right),$$

där A, B, C, D, $a_0, \ldots, a_n$ är konstanter och n är gradtalet på kvoten vid polynomdivisionen så att $a_n \neq 0$. K är en godtycklig konstant. I uttrycket inom parentes går alla termer utom den första mot noll (standard) och då första termen är $\neq 0$ går alla dessa primitiver mot ∞ eller $-\infty$ då $x \to \infty$. I detta fall har alltså ingen primitiv alls ändligt gränsvärde då $x \to \infty$.

Återstår fallet att $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ för godtyckliga konstanter a, b, c och d.

Partialbråksansatsen $\dfrac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{x^2(1+x^2)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{Cx+D}{1+x^2}$ ger primitiven

$$\int \frac{p(x)}{x^2(1+x^2)}\,dx = A\ln|x| - \frac{B}{x} + \frac{C}{2}\ln(1+x^2) + D\arctan x + K = /A = -C + (A+C)/$$

$$= (A+C)\ln|x| - \frac{B}{x} + \frac{C}{2}\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + D\arctan x + K,$$

där K är en godtycklig konstant. Vi ser att alla termer utom den första har ändliga gränsvärden då $x \to \infty$. Multiplicera ansatsen ovan med x och låt $x \to \infty$ så fås $A + C = a$ så alla primitiver har ändligt gränsvärde om och endast om $a = 0$. $p(x)$ är alltså ett godtyckligt polynom av grad högst 2.

Svar: $p(x) = bx^2 + cx + d$ för godtyckliga konstanter b, c och d.