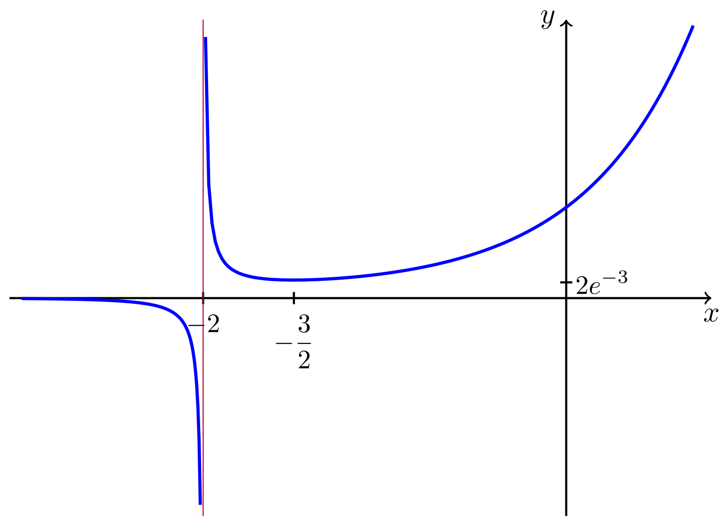
Lösningsskisser för TATA41 240110

1) f är definierad då $x \neq -2$. Standardräkningar (Gör dessa!) ger $f'(x) = \dfrac{2x+3}{(x+2)^2}e^{2x}$.

Teckentabell:

x		-2		$-3/2$	
e^{2x}	$+$		$+$		$+$
$2x+3$	$-$		$-$	0	$+$
$(x+2)^2$	$+$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	ej def.	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	ej def.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Vi ser att $f(x) \to \pm\infty\,,\ x \to -2^{\pm}$, $f(x) \to 0\,,\ x \to -\infty$ och $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{2x} \cdot \dfrac{2}{(1+\frac{2}{x})} \to \infty\,,\ x \to \infty$ enligt ett standardgränsvärde. Vidare är $f(-3/2) = 2e^{-3}$. Detta ger grafen



och direkt avläsning i denna ger att $V_f =]-\infty, 0[\cup [2e^{-3}, \infty[= \mathbf{R} \setminus [0, 2e^{-3}[$.

Svar: Graf enligt ovan. Linjen $x = -2$ är en lodrät asymptot. Linjen $y = 0$ är en vågrät asymptot då $x \to -\infty$. f har en lokal minimipunkt i $x = -3/2$ (med det lokala minimivärdet $f(-3/2) = 2e^{-3}$) och $V_f =]-\infty, 0[\cup [2e^{-3}, \infty[$.

2a) $x - \sqrt{x^2 - 2x} = \dfrac{(x - \sqrt{x^2-2x})(x + \sqrt{x^2-2x})}{x + \sqrt{x^2-2x}} = \dfrac{x^2 - (x^2 - 2x)}{x + \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{2}{x}}} = \dfrac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}} \to 1$ då $x \to \infty$, där vi har använt att $x > 0$ (så att $\sqrt{x^2} = x$).

2b) $\dfrac{x \sin x}{\ln(2x^2+1)} = \dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{1}{\frac{\ln(1+2x^2)}{2x^2} \cdot 2} \to 1 \cdot \dfrac{1}{1 \cdot 2} = \dfrac{1}{2}\,,\ x \to 0$ enligt standardgränsvärden.

2c) f kontinuerlig i 0 om och endast om $a = f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin x}{\ln(2x^2+1)} = \dfrac{1}{2}$ enligt 2b).

Om vi sätter $a = \dfrac{1}{2}$ blir alltså f kontinuerlig i $x = 0$.

Svar: (a) 1 (b) $\dfrac{1}{2}$ (c) $a = \dfrac{1}{2}$.

3a) $\dfrac{d}{dx}\left(e^{\sqrt{2x}}(\sqrt{2x}-1)\right) = e^{\sqrt{2x}}\dfrac{2}{2\sqrt{2x}}(\sqrt{2x}-1) + e^{\sqrt{2x}}\dfrac{2}{2\sqrt{2x}} = e^{\sqrt{2x}}$ vilket ger att $\int e^{\sqrt{2x}}\,dx = e^{\sqrt{2x}}(\sqrt{2x}-1) + C$, där C är en godtycklig konstant.

3b) $\dfrac{d}{dx}\left(\sin x - \dfrac{2}{3}\sin^3 x\right) = \cos x - \dfrac{2}{3}\cdot 3\sin^2 x\cos x = \cos x(1-2\sin^2 x) = \cos x\cos 2x$ vilket ger att $\int \cos x\cos 2x\,dx = \sin x - \dfrac{2}{3}\sin^3 x + C$, där C är en godtycklig konstant.

3c) $\dfrac{d}{dx}\left(x\arccos x - \sqrt{1-x^2}\right) = \arccos x + x\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) - \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \arccos x$ så $\int \arccos x\,dx = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$, där C är en godtycklig konstant.

Svar: (a) $e^{\sqrt{2x}}(\sqrt{2x}-1)+C$ (b) $\sin x - \dfrac{2}{3}\sin^3 x + C$ (c) $x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$.

4) Integralen är bara generaliserad i ∞ ty $2e^x - 3 - 2e^{-x} = e^{-x}(e^x-2)(2e^x+1) > 0$ för $x \geq 1$. Bytet $t = e^x$, $dt = e^x\,dx$ följt av en partialbråksuppdelning ger (I = sökt integral)

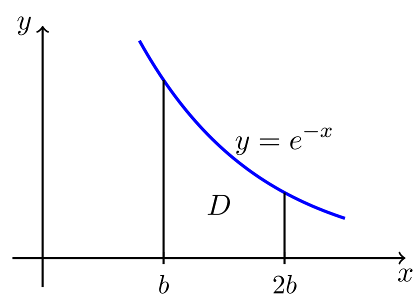
$$I = \int_1^\infty \frac{e^x}{2e^{2x}-3e^x-2}\,dx = \frac{1}{2}\int_e^\infty \frac{dt}{(t-2)(t+1/2)} = \frac{1}{5}\int_e^\infty \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+1/2}\right) = \frac{1}{5}\lim_{a\to\infty}\left[\ln\left|\frac{t-2}{t+1/2}\right|\right]_e^a$$

$$= \frac{1}{5}\lim_{a\to\infty}\left(\ln\left|\frac{1-\frac{2}{a}}{1+\frac{1}{2a}}\right| - \ln\left(\frac{e-2}{e+1/2}\right)\right) = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{2e+1}{2e-4}\right),$$

så $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{2e^x-3-2e^{-x}}$ är konvergent med värdet $\dfrac{1}{5}\ln\left(\dfrac{2e+1}{2e-4}\right)$.

Svar: $\dfrac{1}{5}\ln\left(\dfrac{2e+1}{2e-4}\right)$.

5) Kalla det begränsade området D och rita en figur:



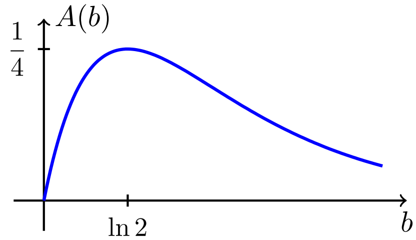
Tolkningen av integraler av positiva funktioner som 'arean under grafen' ger att

$$A(b) = \int_b^{2b} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_b^{2b} = e^{-b} - e^{-2b},\ b \geq 0.$$

Derivering ger $A'(b) = -e^{-b} + 2e^{-2b} = -e^{-2b}(e^b - 2)$. Teckentabell:

b	0		$\ln 2$	
$-e^{-2b}$		$-$		$-$
$e^{b}-2$		$-$	0	$+$
$A'(b)$	ej def.	$+$	0	$-$
$A(b)$	0	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

Då $A(\ln 2) = \dfrac{1}{4}$ och $A(b) \to 0\,,\ b \to \infty$ får $A(b)$ grafen



och direkt avläsning ger att $A(b)$ kan anta alla värden i intervallet $[0, 1/4]$.

Svar: $A(b)$ kan anta alla värden i intervallet $[0, 1/4]$.

6a) Se kursboken eller föreläsningsanteckningarna.

6b) Derivatans definition ger $f(x+h)-f(x) = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot h \to f'(x)\cdot 0 = 0\,,\ h \to 0$. Alltså är $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$, så f är kontinuerlig i x enligt definitionen av kontinuitet.

6c) Då $-\dfrac{\pi}{2} < \arctan\dfrac{1}{x} < \dfrac{\pi}{2}$ för alla $x \neq 0$ är $\arctan\dfrac{1}{x}$ begränsad. Enligt Sats 3.1 gäller då att $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x\arctan\dfrac{1}{x} = 0 = f(0)$ varför f är kontinuerlig i $x = 0$.

Betrakta $\dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \dfrac{h\arctan\frac{1}{h} - 0}{h} = \arctan\dfrac{1}{h}$. Detta ger $\dfrac{f(h)-f(0)}{h} \to \dfrac{\pi}{2}\,,\ h \to 0^+$ och $\dfrac{f(h)-f(0)}{h} \to -\dfrac{\pi}{2}\,,\ h \to 0^-$. f:s höger- och vänsterderivata i $x = 0$ är alltså olika, så f är ej deriverbar i $x = 0$.

Svar: Se ovan.

7a) Då $a_k > 0$ för jämna k men < 0 för udda k kan vi skriva $a_k = (-1)^k b_k$ där $b_k > 0$ för alla k. Att $|a_{k+1}| \le |a_k|$ för alla k ger då att $b_{k+1} \le b_k$ för alla k. För $n = 0, 1, 2, \ldots$ gäller då

$$s_{n+1} - s_n = \sum_{k=0}^{2(n+1)} a_k - \sum_{k=0}^{2n} a_k = \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k b_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k b_k = b_{2n+2} - b_{2n+1} \le 0,$$

ty $b_{2n+2} = b_{(2n+1)+1} \le b_{2n+1}$. Det följer att $s_{n+1} \le s_n$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$ vilket skulle visas.

7b) $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} a_k = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k b_k = (b_0 - b_1) + (b_2 - b_3) + \ldots + (b_{2n-2} - b_{2n-1}) + b_{2n}$. Enligt ovan är alla parenteserna ≥ 0 och sista termen $b_{2n} > 0$ vilket ger att $s_n > 0$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$.

7c) $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ är enligt 7a) en avtagande följd och enligt 7b) en nedåt begränsad följd. Enligt följdsatsen till Sats 3.16 existerar därför $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ ändligt.

Svar: (a), (b) Se ovan. (c) $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ existerar ändligt.