LINKÖPINGS UNIVERSITET TATA41
Matematiska institutionen TEN1

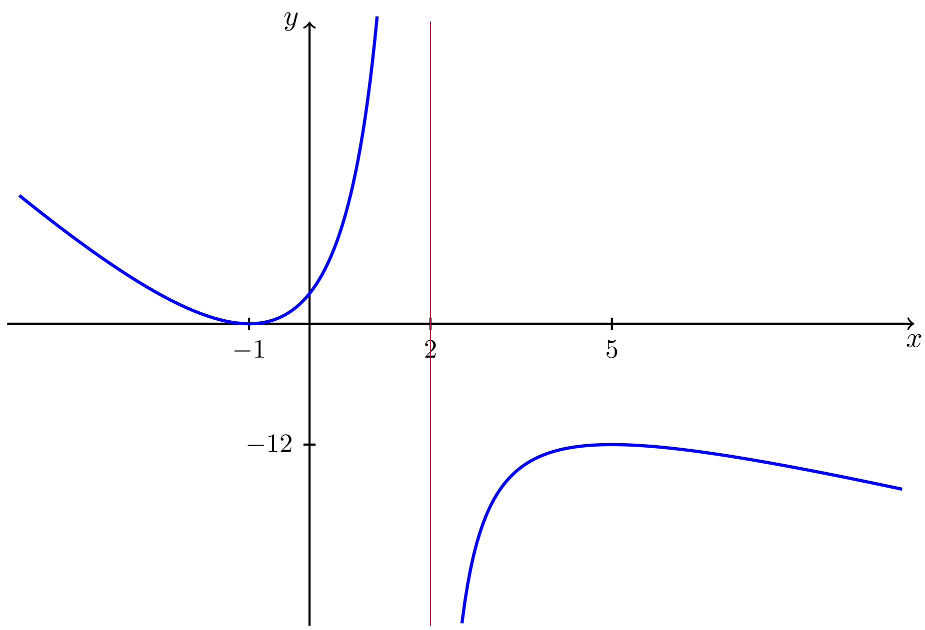
Lösningsskisser för TATA41 240321

1) f är definierad då $x \neq 2$. Standardräkningar (Gör dessa!) ger $f'(x) = \dfrac{(x+1)(5-x)}{(2-x)^2}$.

Teckentabell:

x		-1		2		5	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$5-x$	$+$		$+$		$+$	0	$-$
$(2-x)^2$	$+$		$+$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	ej def.	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	ej def.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

Vi ser att $f(x) = x \cdot \dfrac{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{-1 + \frac{2}{x}} \to \mp\infty\,,\ x \to \pm\infty$, och $f(x) = -\dfrac{(x+1)^2}{x-2} \to \mp\infty\,,\ x \to 2^{\pm}$.
Vidare är $f(-1) = 0$ och $f(5) = -12$. Detta ger grafen



och direkt avläsning i denna ger att $V_f =]-\infty, -12] \cup [0, \infty[= \mathbf{R} \setminus]-12, 0[$.

Svar: Graf enligt ovan. Linjen $x = 2$ är en lodrät asymptot. Vågräta asymptoter saknas. f har en lokal minimipunkt i $x = -1$ (med det lokala minimivärdet $f(-1) = 0$) och en lokal maximipunkt i $x = 5$ (med det lokala maximivärdet $f(5) = -12$). $V_f =]-\infty, -12] \cup [0, \infty[$.

2a) $\dfrac{x^2 + x - 6}{4 - x^2} = \dfrac{(x-2)(x+3)}{(2-x)(2+x)} = -\dfrac{x+3}{x+2} \to -\dfrac{5}{4}$ då $x \to 2$.

2b) Bytet $t = 3/x$ ger $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\ln(x^2+3x) - 2\ln x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} x \ln\left(1 + \dfrac{3}{x}\right) = \lim\limits_{t\to 0^+} 3 \cdot \dfrac{\ln(1+t)}{t} = 3$ enligt ett standardgränsvärde.

2c) $\dfrac{x^2-2^{x+2}}{x^2+2^{x-2}} = \dfrac{2^x\left(-2^2+\frac{x^2}{2^x}\right)}{2^x\left(2^{-2}+\frac{x^2}{2^x}\right)} = \dfrac{-4+\frac{x^2}{2^x}}{\frac{1}{4}+\frac{x^2}{2^x}} \to \dfrac{-4+0}{\frac{1}{4}+0} = -16\,,\ x\to\infty$ (standardgränsvärde).

Svar: (a) $-\dfrac{5}{4}$ (b) 3 (c) $a=-16$.

3a) Polynomdivision ger $\displaystyle\int \frac{x^2}{x+2}\,dx = \int \left(x-2+\frac{4}{x+2}\right)dx = \frac{x^2}{2}-2x+4\ln|x+2|+C$, där C är en godtycklig konstant.

3b) Bytet $t=1+x^2$, $dt=2x\,dx \Leftrightarrow x\,dx = \frac{1}{2}dt$ ger $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t}+C = \sqrt{1+x^2}+C$, där C är en godtycklig konstant.

3c) Bytet $t=\cos x$, $dt=-\sin x\,dx$ ger $\displaystyle\int e^{\cos x}\sin 2x\,dx = \int e^{\cos x}2\cos x\sin x\,dx = -2\int te^t\,dt = -2\left(te^t-\int e^t\,dt\right) = 2(1-t)e^t+C = 2(1-\cos x)e^{\cos x}+C$, där vi partialintegrerat i tredje likheten och C är en godtycklig konstant.

Svar: (a) $\dfrac{x^2}{2}-2x+4\ln|x+2|+C$ (b) $\sqrt{1+x^2}+C$ (c) $2(1-\cos x)e^{\cos x}+C$.

4) Partialbråksuppdelning (gör detaljerna) och räkningar som i Ex 5.21 ger (I = sökt integral)

$$I = \int_1^3 \left(\frac{2}{x}-\frac{2x-4}{(x-1)^2+4}\right)dx = [2\ln|x|]_1^3 - \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{x-2}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}\,dx = \Big/\, t=\frac{x-1}{2},\ dt=\frac{1}{2}\,dx,\ t(1)=0,$$

$$t(3)=1 \Big/ = 2\ln 3 - \int_0^1 \frac{2t-1}{t^2+1}\,dt = 2\ln 3 - \left[\ln(t^2+1)-\arctan t\right]_0^1 = 2\ln 3-\ln 2+\frac{\pi}{4}.$$

Svar: $2\ln 3-\ln 2+\dfrac{\pi}{4}$.

5a) Se kursboken eller föreläsningsanteckningarna.

5b) Sätt $I(a) = \displaystyle\int_1^a \left(\frac{1}{x}-\arctan\frac{1}{x}\right)dx$ för $a>1$. Partialintegration av en etta i andra termen ger

$$I(a) = \left[\ln|x| - x\arctan\frac{1}{x}\right]_1^a + \int_1^a \frac{x}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx = \ln a - a\arctan\frac{1}{a}+\frac{\pi}{4} - \int_1^a \frac{x}{x^2+1}dx$$

$$= \ln a - a\arctan\frac{1}{a}+\frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_1^a = \frac{\pi}{4} - a\arctan\frac{1}{a} - \frac{1}{2}\left(\ln(a^2+1)-2\ln a\right)+\frac{1}{2}\ln 2$$

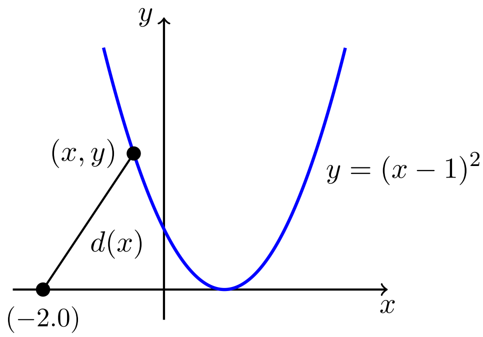
$$= \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\arctan(1/a)}{1/a} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{a^2}\right) \to \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2 - 1\,,\ a\to\infty,$$

enligt ett standardgränsvärde.

Alltså är $\displaystyle\int_1^\infty \left(\frac{1}{x}-\arctan\frac{1}{x}\right)dx$ konvergent och $\displaystyle\int_1^\infty \left(\frac{1}{x}-\arctan\frac{1}{x}\right)dx = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2-1$.

Svar: (a) Se ovan. (b) $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\ln 2-1$.

6) Låt $d(x)$ vara avståndet mellan $(-2, 0)$ och en punkt (x, y) på kurvan $y = (x-1)^2$. Figur:

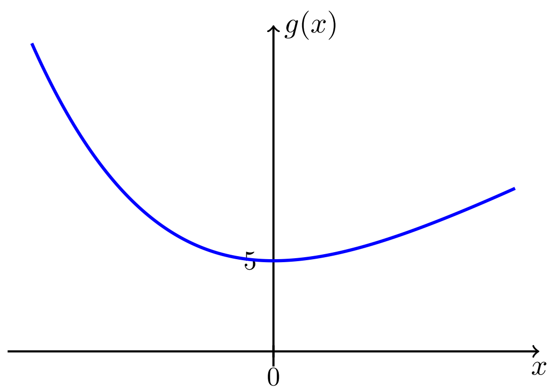


Det förenklar räkningarna att minimera $g(x) = d(x)^2$ istället för $d(x)$. Avståndsformeln ger att $g(x) = (x - (-2))^2 + (y - 0)^2 = (x+2)^2 + (x-1)^4$ med $D_g = \mathbf{R}$.

Derivering ger $g'(x) = 2(x+2) + 4(x-1)^3 = 2x(2x^2 - 6x + 7)$ och vi ser att $2x^2 - 6x + 7 = 2\left(\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}\right) > 0$. Teckentabell:

x		0	
$2x$	$-$	0	$+$
$2x^2 - 6x + 7$	$+$		$+$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Då $g(0) = 5$ och $g(x) \to \infty\,,\ x \to \pm\infty$ får $g(x)$ grafen



och direkt avläsning ger att g:s minsta värde är $g(0) = 5$, d v s d:s minsta värde är $\sqrt{5}$.

Svar: Minsta avståndet mellan $(-2, 0)$ och kurvan $y = (x-1)^2$ är $\sqrt{5}$.

7a) Sätt t ex $f(x) = \int_0^x 2|t|\,dt = \begin{cases} x^2 & , \quad x \geq 0 \\ -x^2 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$. Enligt analysens huvudsats är då $f'(x) = 2|x|$ som är kontinuerlig så f är kontinuerligt deriverbar. f' är dock inte deriverbar i $x = 0$ ty $\frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = \frac{2|h| - 2|0|}{h} = 2\frac{|h|}{h}$ saknar gränsvärde då $h \to 0$ eftersom $\frac{|h|}{h} = 1$ för $h > 0$ och $\frac{|h|}{h} = -1$ för $h < 0$. f är alltså inte 2 gånger deriverbar.

7b) Sätt t ex $f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$ för $x \neq 0$ och $f(0) = 0$. Då är $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^2 \sin\frac{1}{h} - 0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} h\sin\dfrac{1}{h} = 0$ enligt Sats 3.1 i kursboken ty $\sin\dfrac{1}{h}$ är begränsad för $h \neq 0$. Vidare är $f'(x) = 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$ för $x \neq 0$. Nu gäller att $2x\sin\dfrac{1}{x} \to 0\,,\ x \to 0$ enligt Sats 3.1 men $\cos\dfrac{1}{x}$ saknar gränsvärde då $x \to 0$. Det följer att f är deriverbar för alla x ty $f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$ men f' är inte kontinuerlig i 0 eftersom $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ inte existerar enligt ovan.

7c) Sätt t ex $f(x) = \dfrac{\sin(x^2)}{x}$, $x > 0$. Då är $f(x) = \sin(x^2) \cdot \dfrac{1}{x}$ och då $\dfrac{1}{x} \to 0\,,\ x \to \infty$ och $\sin(x^2)$ är begränsad ger Sats 3.1 att $f(x) \to 0\,,\ x \to \infty$. Vidare är $f'(x) = 2\cos(x^2) - \dfrac{\sin(x^2)}{x^2}$ där första termen saknar gränsvärde och andra termen $\to 0\,,\ x \to \infty$ återigen enligt Sats 3.1 (samma resonemang som ovan). Det följer att $f'(x)$ saknar gränsvärde då $x \to \infty$.

Svar: (a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \geq 0 \\ -x^2 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$ (c) $f(x) = \dfrac{\sin(x^2)}{x}$.