

Tentamen i Envariabelanalys 1

2023-06-05 kl. 14.00-19.00

Penna, radergummi, linjal, passare och grad-/radianskiva utan formler på får användas. Inga andra hjälpmedel är tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n - 1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar publiceras på kursens hemsida senast dagen efter tentan.

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = 4 \ln |x| - \ln(4x^2 + 1) - 6 \arctan 2x$. Ange alla lokala extrempunkter samt lodräta och vågräta asymptoter.

2. Beräkna

$$(a) \int \frac{x^2}{x^2 + x - 2} dx \quad (b) \int \sin x \sin 2x dx \quad (c) \int_0^3 e^{\sqrt{x+1}} dx.$$

3. Undersök gränsvärdena

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{10x - 2x^2 - 8}{x^2 - 1} \quad (b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 7x} \right) \quad (c) \lim_{x \rightarrow \infty} x (\ln(x + 3) - \ln x).$$

4. Beräkna $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ och $\int_4^{\infty} \frac{dx}{x(\sqrt{x} + 3)}$ eller visa divergens.

5. (a) Är någon/några av funktionerna $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \arctan x$, $f_3(x) = -\frac{1}{x}$, $f_4(x) = x^3$ och $f_5(x) = |x| + 2x$ strängt växande? Vilken/vilka i så fall? Endast svar ska anges. Inga motiveringar ska lämnas in.

- (b) Formulera medelvärdessatsen för derivator.

- (c) Antag att f är definierad på ett intervall I och att $f'(x) > 0$ för alla $x \in I$. Visa att f är strängt växande på I .

6. Visa att $\sum_{k=1}^{1000} ke^{-k^2} < \frac{3}{2e}$.

7. Antag att $f'(x) = \frac{1}{x^2 + f(x)^2}$ för $x \geq 1$. Visa att f är begränsad för $x \geq 1$.