

Tentamen i Envariabelanalys 1

2023-08-22 kl. 8.00–13.00

Penna, radergummi, linjal, passare och gradskiva utan formler på får användas. Inga andra hjälpmedel är tillåtna. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n - 1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar anslås på kursens hemsida.

1. Skissa grafen till funktionen $f(x) = 2 \ln(3x + 2) + \frac{3}{x - 1}$. Ange alla lodräta och vågräta asymptoter samt lokala extrempunkter.

2. Beräkna

$$(a) \int x e^{-2x} dx \quad (b) \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{3 + \sin^2 x} dx.$$

På (a)-uppgiften ska du denna gång **inte** redovisa själva integralkalkylen utan istället redovisa en **kontrollderivering** som visar att ditt svar är rätt.

3. Undersök gränsvärdena

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1} \quad (b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + e^{-x}}{\ln(x^2 + e^{3x})} \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\tan x^2}.$$

4. Beräkna (eller visa divergens)

$$(a) \int_2^{\infty} x^2 e^{-2x^3} dx \quad (b) \int_2^{\infty} \frac{x - 2}{x^3} dx \quad (c) \int_1^{\infty} \frac{|x - 2|}{x^3} dx.$$

5. (a) Hur definieras derivatan av en funktion f i en punkt $x \in \mathbf{R}$?

(b) Bestäm $\frac{d}{dx}(\ln x)$ och $\frac{d}{dx}(xe^x)$ med derivatans definition.

6. I vilken punkt på kurvan $y = x^3$, $x > 0$, ska kurvans tangent och normal läggas för att de båda punkterna där dessa räta linjer skär y -axeln ska hamna så nära varandra som möjligt?

7. Bestäm alla polynom $p(x)$ som är sådana att varje primitiv funktion till $\frac{p(x)}{x^2(1 + x^2)}$, $x > 0$, har ändligt gränsvärde då $x \rightarrow \infty$.