LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen

TATA41
TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1
2024-01-10 kl. 8.00-13.00

Penna, radergummi, linjal, passare och grad-/radianskiva utan formler på får användas. Inga andra hjälpmedel är tillåtna. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och innehålla ett tydligt utskrivet svar till varje uppgift. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Tentamen består av tre delar: A1, A2 och B.

- **Del A1** består av 2 uppgifter, numrerade 1 och 2, värda 3p var.
- **Del A2** består av 2 uppgifter, numrerade 3 och 4, värda 3p var.
- **Del B** består av 3 uppgifter, numrerade 5–7, värda 3p var.

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2p.
För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) räcker krav K1, K2 och K3, där

- **K1:** Minst 2 poäng på del A1.
- **K2:** Minst 2 poäng på del A2.
- **K3:** Minst 3/4/5 godkända uppgifter och minst 8/12/16 poäng totalt.

Del A1 - Differentialkalkyl

1. Skissa grafen till den funktion f som ges av

$$f(x) = \frac{1}{x+2} e^{2x}.$$

   Ange specifikt alla lodräta och vågräta asymptoter, lokala extrempunkter, samt värdemängden till f.

2. (a) Undersök $\lim_{x \to \infty} (x - \sqrt{x^2 - 2x})$.

   (b) Undersök $\lim_{x \to 0} \dfrac{x \sin(x)}{\ln(2x^2+1)}$.

   (c) Bestäm $a \in \mathbb{R}$ så att funktionen f, som ges av

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x \sin(x)}{\ln(2x^2+1)}, & \text{då } x \neq 0, \\ a, & \text{då } x = 0, \end{cases}$$

   blir kontinuerlig i punkten $x = 0$.

Var god vänd!

Del A2 - Integralkalkyl

3. Beräkna

   (a) $\displaystyle\int e^{\sqrt{2x}}\,dx\,,$ (b) $\displaystyle\int \cos(x)\cos(2x)\,dx\,,$ (c) $\displaystyle\int \arccos(x)\,dx\,.$

   Redovisa denna gång **inte** din kalkyl, utan redovisa i stället en ***kontrollderivering*** som visar att ditt svar är rätt.

4. Bestäm $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{2e^x - 3 - 2e^{-x}}dx.$

Del B

5. Låt $A(b)$ beteckna arean av det begränsade område i xy-planet som innesluts av kurvorna $y = 0$, $x = b$, $x = 2b$ och $y = e^{-x}$. Vilka värden kan $A(b)$ anta för $b \geq 0$?

6. (a) Definera vad det betyder att en funktion f är deriverbar i en punkt $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Visa att om en funktion är deriverbar i en punkt x så är den också kontinuerlig där.

   (c) Låt $f(x) = \begin{cases} x\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{då } x \neq 0, \\ 0, & \text{då } x = 0. \end{cases}$

   Visa att f är kontinuerlig, men ej deriverbar, i $x = 0$.

7. Låt $(a_k)_{k=0}^\infty$ vara en följd sådan att $\begin{cases} a_{2k} > 0, \\ a_{2k+1} < 0, \end{cases}$ samt $|a_{k+1}| \leq |a_k|$ för alla $k \in \mathbb{N}$,

   och betrakta föjden $(s_n)_{n=0}^\infty$, där $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} a_k.$

   (a) Visa att $(s_n)_{n=0}^\infty$ är avtagande, det vill säga att $s_{n+1} \leq s_n$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Visa att $s_n > 0$ för all $n \in \mathbb{N}$.

   (c) Existerar gränsvärdet $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ (som ett reellt tal)? Ge bevis eller motexempel.
