Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA41
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2018-01-13 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Skissa grafen för $f(x) = \dfrac{e^{-x^2/4}}{x-3}$. Ange alla eventuella lodräta och vågräta asymptoter samt lokala extrempunkter.

2. Beräkna den generaliserade integralen $\displaystyle\int_3^\infty \frac{dx}{x^3 - 3x^2 + 2x}$ (eller visa divergens).

3. Undersök följande gränsvärden:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{4x - x^3}{8 - 6x + x^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x + \ln(x^2 e^x)}{\sqrt{x^2 + 3x + 7}}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\tan x} - 1}{\sin 2x}$.

4. Beräkna de bestämda respektive obestämda integralerna

   (a) $\displaystyle\int_0^2 e^{\sqrt{x}}\, dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x \cos 2x\, dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2 + x + 1}\, dx$.

5. En konservburk består av en cirkulär cylinder samt två identiska cirkelskivor, vilka precis passar på cylindern, som botten respektive lock. Burkens totala area är given. Hur stor andel av denna area ska utgöras av cylindern för att burkens volym ska bli så stor som möjligt? (Motivera noga att volymen blir maximal.)

6. Fixera konstanter $0 < b < c$. Definiera $f(\alpha) = \displaystyle\int_b^c t^\alpha\, dt$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Visa att f är kontinuerlig.

7. För vilka $\alpha \in \mathbf{R}$ är den generaliserade integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\cos x + (1-\alpha)\sin x}{x^\alpha}\, dx$ konvergent? Beräkna integralens värde för dessa α.