Lösningsskisser för TATA41 2018-08-28

1. (a) $\int \arctan 2x\,dx = x\arctan 2x - \int x\,\frac{2}{1+(2x)^2}\,dx = x\arctan 2x - \frac{1}{4}\ln(1+4x^2)+C.$

   (b) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x/\sqrt{2})^2}} = \arcsin(x/\sqrt{2})+C.$

   (c) $\int \frac{dx}{\cos 3x} = \int \frac{\cos 3x\,dx}{\cos^2 3x} = \int \frac{\cos 3x\,dx}{1-\sin^2 3x} = [s=\sin 3x] = \int \frac{(1/3)\,ds}{1-s^2} = \frac{1}{6}\int\left(\frac{1}{1+s}+\frac{1}{1-s}\right)ds = \frac{1}{6}\big(\ln|1+s|-\ln|1-s|\big)+C = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{1+\sin 3x}{1-\sin 3x}\right|+C = \frac{1}{6}\ln\frac{1+\sin 3x}{1-\sin 3x}+C.$

   Svar: Se ovan.

2. (a) $\frac{\ln\left(e^{2x}+\sqrt{x}\right)}{3x+\ln x} = \frac{2x+\ln\left(1+\sqrt{x}/e^{2x}\right)}{3x+\ln x} = \frac{2+\frac{1}{x}\ln\left(1+\sqrt{x}/e^{2x}\right)}{3+\frac{\ln x}{x}} \to \frac{2+0\cdot\ln(1+0)}{3+0} = 2/3$ då $x\to\infty$, enligt standardgränsvärden.

   (b) $(1+3x)^{-1/x} = e^{-3\,\frac{\ln(1+3x)}{3x}} \to e^{-3\cdot 1} = 1/e^3$ då $x\to 0$, enligt ett standardgränsvärde.

   (c) $\frac{\sin 2x}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})\sin 2x}{(x+3)-3} = 2(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})\frac{\sin 2x}{2x} \to 2(\sqrt{3}+\sqrt{3})\cdot 1 = 4\sqrt{3}$ då $x\to 0$, enligt ett standardgränsvärde.

   Svar: Se ovan.

3. Funktionen $f(x) = x^2-20+8\arctan 2x - \frac{13}{4}\ln(1+4x^2)$ är definierad för alla $x\in\mathbf{R}$, med derivatan

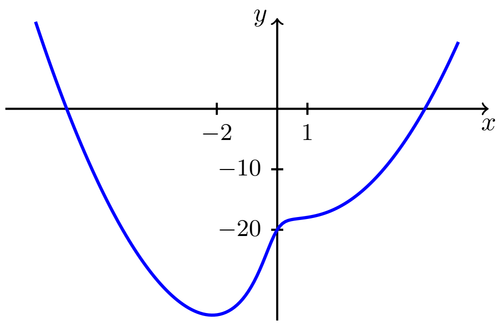
$$f'(x) = 2x + \frac{8\cdot 2}{1+(2x)^2} - \frac{13}{4}\,\frac{8x}{1+4x^2} = \frac{2x(1+4x^2)+16-26x}{1+4x^2}$$
$$= \frac{8x^3-24x+16}{1+4x^2} = \frac{8(x+2)(x-1)^2}{1+4x^2}.$$

Teckentabell:

x		-2		1	
$8(x+2)$	$-$	0	$+$		$+$
$(x-1)^2$	$+$		$+$	0	$+$
$1+4x^2$	$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	terrass-punkt	$\nearrow$

Gränsvärden: $f(x)\to\infty$ då $x\to\pm\infty$, eftersom x^2 är dominerande term:

$$f(x) = x^2\Bigg(1+\underbrace{\frac{-20+8\arctan 2x+\frac{13}{4}\ln(x^2)+\frac{13}{4}\ln(x^{-2}+4)}{x^2}}_{\to 0 \text{ (enl. std.gr.v. } \ln t/t\to 0 \text{ då } t\to\infty)}\Bigg).$$



Svar: Lokalt minimum $f(-2) = -16-8\arctan 4-\frac{13}{4}\ln 17$ (vilket även är globalt minimum). Asymptoter saknas.

4. Se kurslitteraturen.

5. Partiell integration ger

$$\int x \cdot \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\,dx = x \cdot \frac{-1}{e^x+1} - \int 1 \cdot \frac{-1}{e^x+1}\,dx$$
$$= \frac{-x}{e^x+1} + \int \frac{e^{-x}\,dx}{1+e^{-x}} = \frac{-x}{e^x+1} - \ln(1+e^{-x}) + C$$

så att

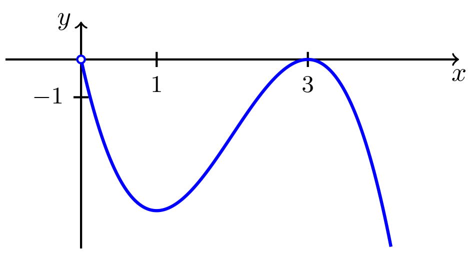
$$\int_0^\infty \frac{xe^x}{(e^x+1)^2}\,dx = \lim_{\omega\to\infty}\left[\frac{-x}{e^x+1} - \ln(1+e^{-x})\right]_0^\omega = (0-0)-(0-\ln 2) = \ln 2.$$

Svar: $\ln 2$.

6. Arean av rektangeln är

$$A(x) = x\,f(x) = e^{-x^3+6x^2-9x}, \qquad x > 0.$$

Uttrycket i exponenten, kalla det $g(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$, har derivatan $g'(x) = -3x^2 + 12x - 9 = -3(x-1)(x-3)$, så enligt en enkel teckentabell får grafen $y = g(x)$ följande utseende för $x > 0$ (där $g(x) \to -\infty$ då $x \to \infty$):



För $x > 0$ antar $g(x)$ alltså all värden från $g(3) = 0$ och neråt, och $A(x) = e^{g(x)}$ antar därmed alla positiva värden mindre än eller lika med $e^0 = 1$.

Svar: Arean kan anta alla värden i intervallet $]0, 1]$.

7. Med $t = 1/x$ erhålls

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\left(\frac{2x+1}{x}\right)^{\frac{x}{2x+1}} - \sqrt{2}\right) = \lim_{t\to 0^+} \frac{(2+t)^{1/(2+t)} - \sqrt{2}}{t}$$
$$= \sqrt{2}\lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{(2+t)^{1/(2+t)}}{\sqrt{2}} - 1}{t}$$
$$= \sqrt{2}\lim_{t\to 0^+} \frac{e^{g(t)} - 1}{t}$$
$$= \sqrt{2}\lim_{t\to 0^+} \frac{e^{g(t)} - 1}{g(t)} \frac{g(t)}{t},$$

om vi sätter

$$g(t) = \ln\frac{(2+t)^{1/(2+t)}}{\sqrt{2}} = \frac{\ln(2+t)}{2+t} - \frac{\ln 2}{2}.$$

Vi ser att

$$\frac{g(t)}{t} = \frac{1}{t}\cdot\frac{2\ln(2+t) - (2+t)\ln 2}{2(2+t)} = \frac{\frac{2}{t}(\ln(2+t) - \ln 2) - \frac{1}{t}\,t\ln 2}{2(2+t)}$$
$$= \frac{\frac{\ln(1+t/2)}{t/2} - \ln 2}{2(2+t)} \to \frac{1-\ln 2}{4} \qquad \text{då } t \to 0,$$

vilket även medför att $g(t) \to 0$ då $t \to 0$ och att $g(t) \neq 0$ i en punkterad omgivning av $t = 0$. Detta ger att gränsvärdet som vi skulle undersöka blir

$$\sqrt{2}\lim_{t\to 0^+} \frac{e^{g(t)} - 1}{g(t)} \frac{g(t)}{t} = \sqrt{2}\cdot 1\cdot\frac{1-\ln 2}{4}.$$

Svar: $\dfrac{1-\ln 2}{2\sqrt{2}}$.

Alternativ lösning: Känn igen gränsvärdet (efter bytet $x = 1/t$) som definitionen av en derivata, nämligen

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{(2+t)^{1/(2+t)} - \sqrt{2}}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t} = f'_+(0),$$

där

$$f(t) = (2+t)^{1/(2+t)} \qquad (t > -2).$$

Vanliga deriveringsregler ger

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{d}{dt}\ln f(t) = \frac{d}{dt}\frac{\ln(2+t)}{2+t} = \frac{\frac{1}{2+t}\cdot(2+t) - \ln(2+t)\cdot 1}{(2+t)^2} = \frac{1-\ln(2+t)}{(2+t)^2},$$

varefter insättning av $t = 0$ ger svaret

$$f'(0) = f(0)\cdot\frac{1-\ln(2+0)}{(2+0)^2} = \sqrt{2}\cdot\frac{1-\ln(2)}{4}.$$