Lösningsskisser för TATA41 2019-01-18

1. Funktionen

$$f(x) = 2\ln(x+1) - \ln(x^2+1) + \frac{x}{x+1}, \quad x > -1,$$

har derivatan

$$f(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x+1)^2(x^2+1)}, \quad x > -1,$$

vilket ger följande teckentabell:

x		-1		$\sqrt{3}$	
$\frac{-(x+\sqrt{3})}{(x+1)^2(x^2+1)}$	$\cdots$	ej def.	$-$		$-$
$x-\sqrt{3}$	$\cdots$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	ej def.	ej def.	$+$	0	$-$
$f(x)$	ej def.	ej def.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

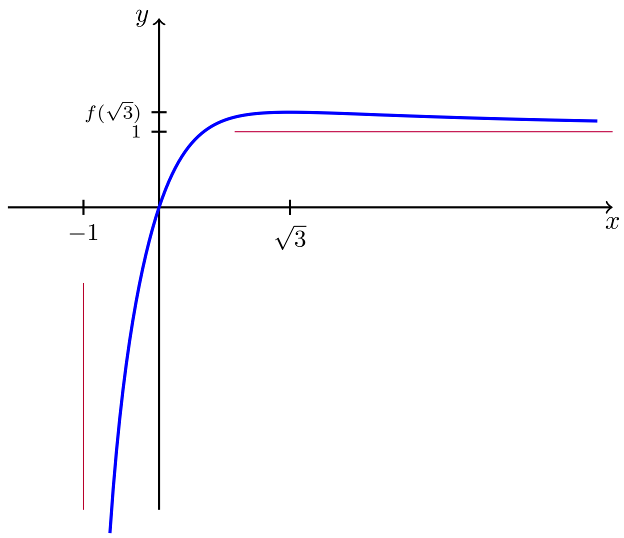
Gränsvärde då $x \to \infty$:

$$f(x) = \ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1} + \frac{x}{x+1} = \ln\frac{(1+\frac{1}{x})^2}{1+\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \to \ln\frac{(1+0)^2}{1+0} + \frac{1}{1+0} = 1.$$

Och då $x \to (-1)^+$:

$$f(x) = \underbrace{2\ln(x+1)}_{\to -\infty} - \underbrace{\ln(x^2+1)}_{\to \ln 2} + \underbrace{\underbrace{x}_{\to -1} \cdot \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{\to \infty}}_{\to -\infty} \to -\infty.$$

Det kan möjligen även vara värt att notera att $f(0) = 0$. Grafen ser alltså ut såhär:



Svar: Funktionen har ett lokalt maximum $f(\sqrt{3}) = 2\ln(1+\sqrt{3}) - \ln 4 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$ (vilket f.ö. även är globalt maximum). Linjen $x = -1$ är en lodrät asymptot, och linjen $y = 1$ är en vågrät asymptot.

2. (a) $\int \frac{dx}{x^2-4x+3} = \int \frac{dx}{(x-3)(x-1)} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1}\right)dx = \frac{\ln|x-3|-\ln|x-1|}{2} + C.$

   (b) $\int \frac{(x+3)\,dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{(x+3)\,dx}{(x+1)^2+4} = \int \frac{(x+1)\,dx}{(x+1)^2+4} + \int \frac{2\,dx}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + \arctan\frac{x+1}{2} + C.$

   (c) Med $t = \sqrt{x}$, och alltså $dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, fås $\int \frac{\sin^3(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \sin^3 t\,dt = 2\int(1-\cos^2 t)\sin t\,dt = \frac{2}{3}\cos^3 t - 2\cos t + C = \frac{2}{3}\cos^3(\sqrt{x}) - 2\cos(\sqrt{x}) + C.$

   Svar: Se ovan.

3. (a) $\frac{x^2+x-2}{2x^2+x-3} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(2x+3)} = \frac{x+2}{2x+3} \to \frac{1+2}{2+3} = \frac{3}{5}$ då $x \to 1$.

   (b) $\frac{\sqrt{2x+e^x}-1}{x} = \frac{2x+e^x-1}{x(\sqrt{2x+e^x}+1)} = \frac{2+(e^x-1)/x}{\sqrt{2x+e^x}+1} \to \frac{2+1}{\sqrt{0+1}+1} = \frac{3}{2}$ då $x \to 0$, enligt ett standardgränsvärde.

   (c) $\frac{1}{x^2} + \ln x = \frac{1}{x^2}(1 + x^2\ln x) \to \infty$ då $x \to 0^+$, eftersom $\frac{1}{x^2} \to \infty$ och $1 + x^2\ln x \to 1 + 0 > 0$ (enligt standardgränsvärdet $x^a \ln x \to 0$ då $x \to 0^+$ om a är en positiv konstant).

   Svar: (a) $3/5$ (b) $3/2$ (c) ∞.

4. Integralen är generaliserad i både ∞ och $-\infty$, så vi måste dela upp den, lämpligen vid $x = 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-|x|}\,dx = \int_{-\infty}^{0} x^2 e^{-(-x)}\,dx + \int_{0}^{\infty} x^2 e^{-x}\,dx,$$

   där integralen räknas som konvergent om och endast om båda delintegralerna är konvergenta. Av symmetriskäl är delintegralerna lika, så det räcker att undersöka den ena; upprepad partiell integration ger

$$\int_0^{\omega} x^2 e^{-x}\,dx = \Big[-(x^2+2x+2)e^{-x}\Big]_0^{\omega} = 2 - \frac{\omega^2+2\omega+2}{e^{\omega}},$$

   vilket går mot $2 - 0 = 2$ då $\omega \to \infty$ (standardgränsvärde, ”hastighetstabell”). Den integral som frågan gällde är alltså konvergent, med värdet $2 + 2 = 4$.

   Svar: 4.

5. Ekvationen $\ln x = k/\sqrt{x}$ är ekvivalent med $f(x) = k$, där $f(x) = \sqrt{x}\ln x$ för $x > 0$. Teckenstudium av derivatan

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \sqrt{x}\,\frac{1}{x} = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}, \qquad x > 0,$$

   visar att f är strängt avtagande på intervallet $0 < x \le e^{-2}$ och strängt växande på intervallet $x \ge e^{-2}$, med globalt minimum $f(e^{-2}) = -2e^{-1}$. Vidare gäller $f(x) \to 0$ då $x \to 0^+$ (samma standardgränsvärde som i uppgift 2(c)) och $f(x) \to \infty$ då $x \to \infty$ (uppenbart). Från grafen $y = f(x)$ avläser man sedan enkelt antalet lösningar.

   Svar: Ekvationen har två reella lösningar om $-2/e < k < 0$, en lösning om $k = -2/e$ eller $k \ge 0$, och ingen lösning om $k < -2/e$.

6. (a) See kursboken (Forsling & Neymark), sats 6.5.

   (b) Låt $x > 0$. Eftersom $\cos(t^2)$ är en kontinuerlig funktion finns det enligt medelvärdessatsen ett tal ξ sådant att $x < \xi < 3x$ och

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_x^{3x} \cos(t^2)\, dt = \frac{1}{x} \cdot (3x - x) \cos(\xi^2) = 2\cos(\xi^2).$$

Instängningen medför att $\xi \to 0$ då $x \to 0^+$, vilket gör att $g(x) \to 2\cos(0^2) = 2$ då $x \to 0^+$.

(Detta argument är lite handviftande, eftersom ξ inte är en funktion av x. Om man vill vara noggrannare kan man göra såhär: Låt $\varepsilon > 0$. Eftersom $2\cos(t^2)$ är en kontinuerlig funktion finns det ett $\delta > 0$ sådant att $\left|2\cos(t^2) - 2\right| < \varepsilon$ närhelst $|t| < \delta$. För godtyckligt x med $0 < x < \delta/3$ kan man hitta ett ξ enligt ovan, som då kommer att uppfylla $0 < \xi < 3x < \delta$, så att $|g(x) - 2| = \left|2\cos(\xi^2) - 2\right| < \varepsilon$. Detta visar att $g(x) \to 2$ då $x \to 0^+$.)

Alternativt: eftersom $\cos(t^2)$ är strängt avtagande för små $t > 0$ gäller

$$\cos(x^2) > \cos(t^2) > \cos((3x)^2)$$

för $x < t < 3x$, om $x > 0$ är tillräckligt litet. Monotonicitetsegenskapen hos integralen medför, för sådana x, att

$$\int_x^{3x} \cos(x^2)\, dt > \int_x^{3x} \cos(t^2)\, dt > \int_x^{3x} \cos((3x)^2)\, dt,$$

dvs. (efter beräkning av integralerna i ytterleden samt division med det positiva talet x)

$$2\cos(x^2) > \frac{1}{x} \int_x^{3x} \cos(t^2)\, dt > 2\cos((3x)^2).$$

Ytterleden går här mot 2 då $x \to 0^+$, så enligt instängningsregeln går även funktionen i mittenledet mot 2.

Svar: 2.

7. Linjen måste luta snett neråt för att den del som ligger i första kvadranten ska ha ändlig längd, så det räcker att undersöka fallet med negativ riktningskoefficient. Linjens ekvation är då $y = 8 - k(x - 1)$ med $k > 0$, så den skär axlarna i punkterna $(x, y) = (1 + \frac{8}{k}, 0)$ och $(x, y) = (0, 8 + k)$. Enligt Pythagoras' sats är längden av linjesegmentet mellan dessa punkter lika med $L(k) = \sqrt{f(k)}$, där

$$f(k) = \left(1 + \frac{8}{k}\right)^2 + (8 + k)^2 = (8 + k)^2 \left(\frac{1}{k^2} + 1\right), \quad k > 0.$$

Derivatan av f är

$$f'(k) = 2(8 + k)\left(\frac{1}{k^2} + 1\right) + (8 + k)^2 \left(\frac{-2}{k^3}\right) = \frac{2(8 + k)(k^3 - 8)}{k^3}, \quad k > 0,$$

där alla faktorer är positiva för $k > 0$, utom $k^3 - 8$ som är negativ för $0 < k < 2$ och positiv för $k > 2$ (eftersom k^3 är strängt växande). Detta medför att f är strängt avtagande på intervallet $0 < k \leq 2$ och strängt växande på intervallet $k \geq 2$, så f har globalt minimum $f(2) = (1 + 4)^2 + (8 + 2)^2 = 125$, och linjesegmentets minimala längd är därmed $L(2) = \sqrt{f(2)} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$.

Svar: $5\sqrt{5}$.