Lösningsskisser för TATA41 2019-06-10

1. Man kan notera att funktionen $f(x) = (x^3 + 4)\,e^{-x}$ har exakt ett reellt nollställe, nämligen $x = -\sqrt[3]{4}$, där f växlar från att vara negativ till att bli positiv. (Då har man redan svaret till (b)-uppgiften i fallet $k = 0$: ekvationen $f(x) = 0$ har *en* lösning.)

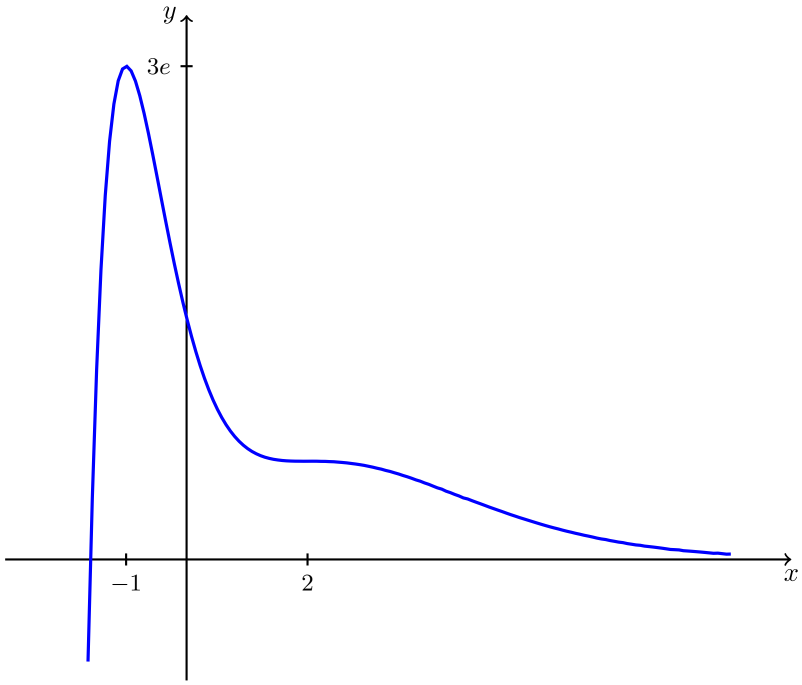
   Derivatan

   $$f'(x) = 3x^2\,e^{-x} + (x^3+4)\,(-e^{-x}) = -(x^3-3x^2+4)\,e^{-x} = -(x+1)(x-2)^2\,e^{-x}$$

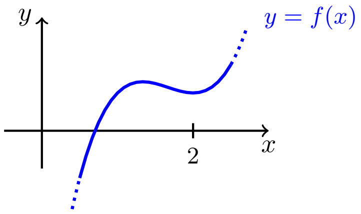
   ger följande teckentabell:

x		-1		2	
-1	$-$		$-$		$-$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$(x-2)^2$	$+$		$+$	0	$+$
e^{-x}	$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	terrass-punkt	$\searrow$

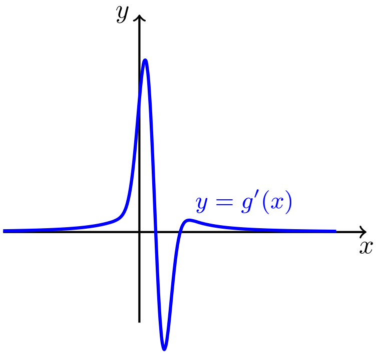
   Gränsvärden: $f(x) \to -\infty$ då $x \to -\infty$ (uppenbart) och $f(x) = \frac{x^3+4}{e^x} \to 0$ då $x \to \infty$ (standardgränsvärde, e^x växer snabbare än polynom). Vi kan nu rita grafen $y = f(x)$ och läsa av svaren därifrån:

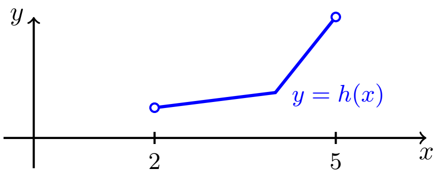


   Svar: (a) $V_f =]-\infty, 3e]$. (b) Ekvationen $f(x) = k$ har en lösning om $k \leq 0$ eller $k = 3e$, två lösningar om $0 < k < 3e$, och ingen lösning om $k > 3e$.

2. (a) T.ex. 

(där $f(x) \to -\infty$ då $x \to -\infty$).

(b) 

(c) T.ex. 

3. Ställ upp differenskvoten $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ och beräkna gränsvärdet då $h \to 0$:

(a) $\frac{\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}}{h} = \frac{x^2-(x+h)^2}{h(x+h)^2x^2} = \frac{-2xh-h^2}{h(x+h)^2x^2} = \frac{-2x-h}{(x+h)^2x^2} \to \frac{-2x-0}{(x+0)^2x^2} = \frac{-2}{x^3}$.

(b) $\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \frac{\ln\frac{x+h}{x}}{h} = \frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{h} = \frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}\,\frac{1}{x} \to 1 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$.

(c) $\frac{\sqrt{2(x+h)}-\sqrt{2x}}{h} = \frac{2(x+h)-2x}{h(\sqrt{2(x+h)}+\sqrt{2x})} = \frac{2}{\sqrt{2(x+h)}+\sqrt{2x}} \to \frac{2}{\sqrt{2x}+\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}$.

4. (a) $\int_0^1 \frac{x^2(1-x)^2}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \left(x^2 - 2x + \frac{2x}{1+x^2}\right) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + \ln(1+x^2)\right]_0^1 = -\frac{2}{3} + \ln 2$.

(b) $\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x^2+4x}\,dx = \int_{-3}^{-2} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+4}\right) dx = \frac{1}{4}\big[\ln|x| - \ln|x+4|\big]_{-3}^{-2} = \frac{1}{4}\big((\ln 2 - \ln 2) - (\ln 3 - \ln 1)\big) = -\frac{1}{4}\ln 3$.

(c) $\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx = 4\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = 4\big[-\cos x\big]_0^{\pi/2} = 4\big(0-(-1)\big) = 4$.

Svar: Se ovan.

Anm.: Som rimlighetskontroll, notera att integralen i (b) måste bli negativ, eftersom $\frac{1}{x^2+4x} = \frac{1}{x(x+4)} < 0$ i det aktuella intervallet $-3 \le x \le 2$ (faktorn x är negativ och faktorn $x+4$ är positiv). Och integralen i (c) måste mycket uppenbart bli positiv, pga. absolutbeloppet.

I (a)-uppgiften är tecken hos svaret $-\frac{2}{3} + \ln 2$ kanske inte lika uppenbart, om man inte råkar minnas att $\ln 2 \approx 0{,}69$. Men man kan vända på resonemanget och säga att eftersom $\frac{x^2(1-x)^2}{1+x^2} > 0$ för $0 < x < 1$ så måste integralen bli positiv, och denna uträkning utgör därför ett bevis för att $\ln 2 > \frac{2}{3}$. Den som är road av sådant kan på liknande sätt bevisa att $\pi < \frac{22}{7}$ genom att beräkna $\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx$. Testa får du se!

5. Om bottenkanternas längder är x och $2x$, så måste höjden vara $\frac{3}{x\cdot 2x}$ om volymen ska bli 3, så summan av kantlängderna är (eftersom det finns fyra kanter av varje typ)

$$f(x) = 4\left(x + 2x + \frac{3}{2x^2}\right) = 12\left(x + \frac{1}{2x^2}\right), \qquad x > 0.$$

Derivatan är

$$f'(x) = 12\left(1 - \frac{1}{x^3}\right) = \frac{12(x^3-1)}{x^3}, \qquad x > 0,$$

vilket är negativt för $0 < x < 1$ och positivt för $x > 1$. Så $f(1) = 18$ är minsta värdet.

Svar: Minsta möjliga värdet för summan av de 12 kanternas längder är 18 (då kanterna är 1, 2 och 3/2).

6. Ekvationen $f(x) = 1/2$, dvs. $\cos x = 1/2$ där $\pi \le x \le 2\pi$, har lösningen $x = 5\pi/3$, så $g(1/2) = 5\pi/3$. Inversens derivata är därmed

$$g'(1/2) = \frac{1}{f'(g(1/2))} = \frac{1}{f'(5\pi/3)} = \frac{1}{-\sin(5\pi/3)} = \frac{1}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

(Förutsättningarna för satsen om derivata av invers funktion är uppfyllda eftersom $f'(g(1/2)) \neq 0$ och g är kontinuerlig på $[-1, 1]$.)

Alternativt kan man beräkna $g(x) = f^{-1}(x) = 2\pi - \arccos x = 3\pi/2 + \arcsin x$ och derivera direkt: $g'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ ger $g'(1/2) = 1/(\sqrt{3}/2)$.

Svar: $2/\sqrt{3}$.

7. Olikheten $|\sin u - \sin v| \le |u - v|$ för alla reella u och v fås med medelvärdessatsen för derivator (jfr. övn. 4.27(a) i kursboken, dvs. Forsling & Neymark, andra upplagan):

$$|\sin u - \sin v| = |\cos\xi \cdot (u - v)| = \underbrace{|\cos\xi|}_{\le 1}\,|u - v| \le |u - v|$$

(där ξ är något tal mellan u och v).

Alternativt, gör som i övning 2.42 i boken:

$$|\sin u - \sin v| = \left|2\cos\tfrac{u+v}{2}\sin\tfrac{u-v}{2}\right| = 2\underbrace{\left|\cos\tfrac{u+v}{2}\right|}_{\le 1}\underbrace{\left|\sin\tfrac{u-v}{2}\right|}_{\le\left|\frac{u-v}{2}\right|} \le |u - v|.$$

Detta ger

$$\left|\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}\right| \le \left|\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right|,$$

och eftersom

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \to 0 \quad \text{då } x \to \infty,$$

följer det från instängningsregeln att även

$$\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x} \to 0 \quad \text{då } x \to \infty.$$

Svar: 0.