Lösningsskisser för TATA41 2020-01-19

1. (a) Partiell integration ger $\int xe^{3x}dx = x\cdot\frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}dx = (\frac{1}{3}x-\frac{1}{9})e^{3x}+C$.

   (b) Variabelbytet $t=e^x$, $dt=e^x dx$, följt av partialbråksuppdelning, ger $\int \frac{e^x\,dx}{4-e^{2x}} = \int \frac{dt}{4-t^2} = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{2+t}+\frac{1}{2-t}\right)dt = \frac{1}{4}\big(\ln|2+t| - \ln|2-t|\big)+C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+e^x}{2-e^x}\right|+C$.

   (c) Med sinus för dubbla vinkeln fås $\int \cos x\sin 2x\,dx = \int 2\sin x\cos^2 x\,dx = -\frac{2}{3}\cos^3 x + C$.

   Ett par alternativ (som ger samma svar på annan form): Produkt-till-summa-omskrivning ger $\int \cos x \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\int(\sin 3x+\sin x)\,dx = -\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos x + C$. Två partialintegrationer ger $I = \int\cos x\sin 2x\,dx = \sin x\sin 2x + 2\cos x\cos 2x + 4I + \text{konstant}$, dvs. $I = -\frac{1}{3}(\sin x\sin 2x + 2\cos x\cos 2x)+C$.

   Svar: Se ovan.

2. (a) $\frac{3x^2-2x-1}{-x^2+4x-3} = \frac{(x-1)(3x+1)}{(x-1)(-x+3)} = \frac{3x+1}{-x+3} \to \frac{3+1}{-1+3} = 2$ då $x\to 1$.

   (b) Förläng med konjugatet: $\frac{\sqrt{1+2\sqrt{x}}-\sqrt{1+3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \frac{(1+2\sqrt{x})-(1+3\sqrt{x})}{\left(\sqrt{1+2\sqrt{x}}+\sqrt{1+3\sqrt{x}}\right)\sqrt{x}} = \frac{-1}{\sqrt{1+2\sqrt{x}}+\sqrt{1+3\sqrt{x}}} \to \frac{-1}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}} = -\frac{1}{2}$ då $x\to 0^+$.

   (c) $\frac{\sqrt{x}+e^{3+\ln x}}{\sqrt{x^2+\ln x}} = [x>0] = \frac{\sqrt{x}+xe^3}{x\sqrt{1+x^{-2}\ln x}} = \frac{e^3+x^{-1/2}}{\sqrt{1+x^{-2}\ln x}} \to \frac{e^3+0}{\sqrt{1+0}} = e^3$ då $x\to\infty$, enligt standardgränsvärde ("hastighetstabell").

   Svar: (a) 2 (b) $-1/2$ (c) e^3.

3. Derivering av $f(x) = \arctan(x-4)+\arctan(1/x)$ (med den angivna definitionsmängden $x>0$) ger

$$f'(x) = \frac{1}{1+(x-4)^2} + \frac{1}{1+(1/x)^2}\cdot\frac{-1}{x^2} = \frac{8x-16}{(1+(x-4)^2)(1+x^2)}$$

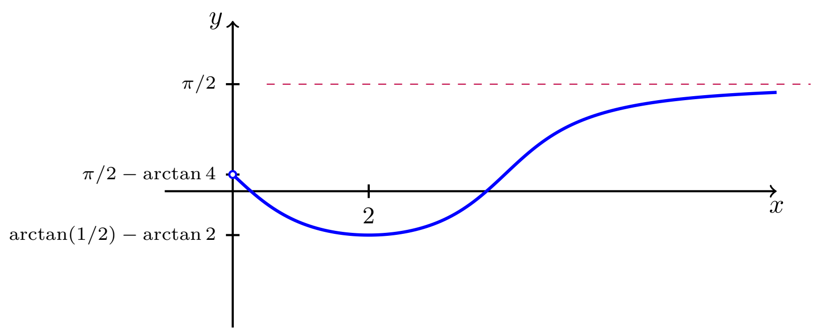
(även här med $x>0$). Nämnaren är alltid positiv, och täljaren har ett nollställe vid $x=2$, med teckenväxlingen $-0+$, så f är strängt avtagande på intervallet $0<x\le 2$ och strängt växande på intervallet $x\ge 2$, med ett lokalt (t.o.m. globalt) minimum $f(2) = -\arctan 2 + \arctan(1/2) < 0$. Relevanta gränsvärden:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\arctan(x-4) + \lim_{t\to\infty}\arctan t = -\arctan 4 + \frac{\pi}{2} > 0$$

och

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}+0 = \frac{\pi}{2},$$

så linjen $y=\pi/2$ är en vågrät asymptot till f:s graf då $x\to\infty$.



Svar: Graf enligt ovan, lokal minimipunkt $x=2$, vågrät asymptot $y=\pi/2$. (Inga lodräta asymptoter.)

4. Variabelbytet $t = \sqrt{x}$, med $x = t^2$ och $dx = 2t\,dt$, ger

$$\begin{aligned}
\int_4^\infty \frac{dx}{\sqrt{x} + x + x\sqrt{x}} &= \int_2^\infty \frac{2t\,dt}{t + t^2 + t^3} = \int_2^\infty \frac{2\,dt}{1 + t + t^2} \\
&= \int_2^\infty \frac{2\,dt}{(t + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \left[s = t + \tfrac{1}{2},\ ds = dt\right] \\
&= \int_{5/2}^\infty \frac{2\,ds}{s^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{3/4} \int_{5/2}^\infty \frac{1\,ds}{1 + (2s/\sqrt{3})^2} \\
&= \lim_{\omega\to\infty} \left[\frac{2}{3/4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \arctan \frac{2s}{\sqrt{3}}\right]_{5/2}^{\omega} \\
&= \frac{4}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{5}{\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}$$

Svar: Se ovan.

5. Kalla ekvationens vänsterled för $f(x)$:

$$f(x) = (x^3 - 6x^2 + 9x)\ln x - \tfrac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 9x.$$

Definitionsmängden är $x > 0$, och derivatan är

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (3x^2 - 12x + 9)\ln x + (x^3 - 6x^2 + 9x) \cdot \frac{1}{x} - x^2 + 6x - 9 \\
&= (3x^2 - 12x + 9)\ln x = 3(x-3)(x-1)\ln x.
\end{aligned}$$

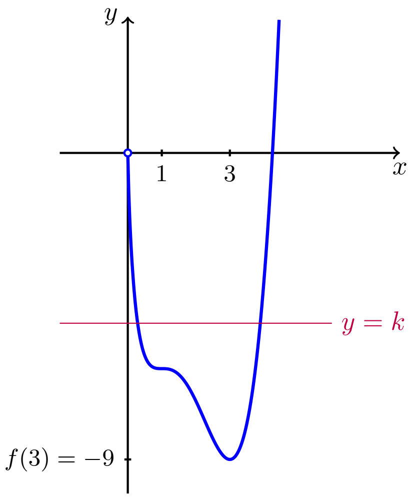
Teckentabell:

x	0		1		3	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$
$\ln x$		$-$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	ej def.	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	ej def.	$\searrow$	terrass-punkt	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Relevanta gränsvärden: $f(x) \to 0$ då $x \to 0^+$ (enligt standardgränsvärdet $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a \ln x = 0$ för $a > 0$) samt

$$f(x) = \underbrace{x^3 \ln x}_{\to\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} + \frac{-\frac{1}{3} + \frac{3}{x} - \frac{9}{x^2}}{\ln x}\right)}_{\to 1} \to \infty \quad \text{då } x \to \infty.$$

Nu kan vi rita grafen $y = f(x)$ och räkna antalet lösningar till ekvationen $f(x) = k$ genom att läsa av hur många gånger linjen $y = k$ skär kurvan för olika värden på k:



Svar: Inga lösningar om $k < -9$, en lösning om $k = -9$ eller $k \geq 0$, två lösningar om $-9 < k < 0$.

6. Om radien är r och öppningsvinkeln är φ (där $0 < \varphi < 2\pi$) så är omkretsen $L = 2r + r\varphi$ och arean $A = \frac{1}{2}\varphi r^2$. Arean uttryckt enbart i vinkeln blir

$$A = \tfrac{1}{2}\,\varphi \left(\frac{L}{2+\varphi}\right)^2 = \tfrac{1}{2}L^2\,\varphi\,(2+\varphi)^{-2} = f(\varphi), \qquad 0 < \varphi < 2\pi.$$

Derivatan blir

$$f'(\varphi) = \tfrac{1}{2}L^2\big(1\cdot(2+\varphi)^{-2} + \varphi\cdot(-2)(2+\varphi)^{-3}\big) = \tfrac{1}{2}L^2\,\frac{2-\varphi}{(2+\varphi)^3},$$

vilket uppenbarligen är positivt för $0 < \varphi < 2$ och negativt för $2 < \varphi < 2\pi$, så att funktionens största värde är $f(2) = \frac{1}{2}L^2 \cdot 2 \cdot (2+2)^{-2} = \frac{1}{16}L^2$.

Alternativt kan man uttrycka arean enbart i radien:

$$A = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{L-2r}{r}\cdot r^2 = \tfrac{1}{2}Lr - r^2 = g(r), \qquad \frac{L}{2+2\pi} < r < \frac{L}{2}.$$

(Inskränkningarna på r krävs för att φ ska ligga i intervallet $0 < \varphi < 2\pi$.) Om man gör så behöver man inte ens derivera för att bestämma största värdet, utan det räcker att kvadratkomplettera:

$$g(r) = -(r^2 - \tfrac{1}{2}Lr) = -(r - \tfrac{1}{4}L)^2 + \tfrac{1}{16}L^2 \leq \tfrac{1}{16}L^2.$$

Största värdet är alltså $g(\frac{1}{4}L) = \frac{1}{16}L^2$ (eftersom $r = \frac{1}{4}L$ ligger i det tillåtna intervallet).

Svar: Största möjliga area är $L^2/16$ (då öppningsvinkeln är 2 radianer).

7. Enligt förutsättning är f deriverbar i a. Ifall även f^{-1} vore deriverbar i $b = f(a)$ skulle man kunna använda kedjeregeln för att derivera sambandet $f^{-1}(f(x)) = x$ i punkten $x = a$, vilket ger $(f^{-1})'(b)\cdot f'(a) = 1$, och i så fall kan ju $f'(a)$ omöjligt vara lika med noll. Förutsättningen $f'(a) = 0$ medför alltså att f^{-1} inte kan vara deriverbar i b, vilket skulle visas.