Problem för envar

Övningssamling i envariabelanalys
nedtecknad vid
Matematiska institutionen

2019

LINKÖPINGS UNIVERSITET

P 6.21 Visa att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > 2\sqrt{n} - 2$ för varje heltal $n \geq 1$.

P 6.22 Beräkna $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n+n}{n} \right)^{1/n}$ (använd Riemannsummor).

P 6.23 Man kan visa att $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n2^n} \to \ln 2$ då $N \to \infty$. Bestäm, utgående från detta, något tal N sådant att $\displaystyle 0 < \ln 2 - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n2^n} < 10^{-4}$.

P 6.24 Visa att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \arctan \frac{1}{k} \right) \leq \frac{1}{2}$ för alla heltal $n \geq 1$.

P 6.25 Bestäm $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{p^2 + k^2}$ för varje heltal $p \geq 1$.

P 6.26 Man kan definiera de trigonometriska funktionerna utgående från integraler. Låt v vara längden av bågen på cirkeln $x^2 + y^2 = 1$ från punkten $(1, 0)$ till en punkt (x, y), där $x > 0$, $y > 0$.

(a) Visa att $\displaystyle v = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$.

(b) Definiera $\cos v = x$, $\sin v = y$ och $\tan v = \dfrac{\sin v}{\cos v}$ för dessa x , y och v. Visa att $\sin v < v < \tan v$.

7 Tillämpningar av integraler

P 7.1 Bestäm arean av det område som ligger i första kvadranten och som begränsas av de tre kurvorna $y = 2/x$, $y = 2x$ och $y = x/8$.

P 7.2 Linus och Linnéa tvistar om cirkelns area. De är överens om att $3 < \pi < 4$, men det råder oenighet om huruvida arean är πR^2, $2\pi R^2$ eller $2\pi R$. Förklara varför de felaktiga alternativen är uppenbart orimliga.

P 7.3 Beräkna längden av kurvan $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $R/2 \leq x \leq R$. Kontrollmöjligheter?

P 7.4 Kossan Rosa är bunden med ett snöre vid ett träd. Snöret har längden L och det cylindriska trädet har radien R. I startögonblicket står Rosa med snöret fullt sträckt, rakt radiellt ut från trädet. Rosa börjar vandra runt trädet, hela tiden med sträckt snöre. Hur långt har hon gått då hon kommer in till stammen? (Såväl snörets tjocklek som Rosas utsträckning försummas.)

P 7.5 Området mellan kurvorna $y = (x - 3)/(x + 1)$ och $y = e^{2x}$, $0 \leq x \leq 1$, roteras ett varv kring linjen $x = 2$. Beräkna volymen av den kropp som uppkommer.

P 7.6 Området mellan kurvan $y = 1/(x^2 + 2x + 5)$, $-3 \leq x \leq -1$, och kurvans horisontella tangent roteras ett varv kring y-axeln. Beräkna volymen av den kropp som uppkommer.

P 7.7 Halvcirkeln $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \leq x \leq R$, roteras ett varv kring linjen $x = 2R$. Beräkna arean av den rotationsyta som uppkommer.

P 7.8 Antag att f är en kontinuerligt deriverbar och strängt avtagande funktion på intervallet $[-1, 3]$ samt att $f(-1) = 4$ och $f(3) = -2$. Låt D vara det begränsade område som avgränsas av kurvan $y = f(x)$ och linjerna $x = -1$ och $y = -2$.

(a) Rita en principskiss av D och ange arean av D som en integral.

(b) Låt K_b vara den rotationskropp som uppstår då D roteras ett varv kring linjen $x = -1$. Ange kroppens volym V_b och arean A_b av kroppens begränsningsyta som integraler. Notera att den cirkulära bottenplattans area ingår i A_b, och den behöver inte anges som en integral.

(c) Låt K_c vara den rotationskropp som uppstår då D i stället roteras ett varv kring linjen $y = -3$. Ange kroppens volym V_c och arean A_c av kroppens begränsningsyta som integraler. De triviala delarna av A_c behöver dock inte anges som integraler.

8 Maclaurin- och Taylorutveckling

P 8.1 Bestäm Taylorutvecklingen av ordning 3 kring $x = 4$ till $\sqrt{x}$ med rest i ordoform.

P 8.2 Använd standardutvecklingar för att bestämma Maclaurinutvecklingen till och med grad 4 med restterm i ordoform (d.v.s. $\mathcal{O}(x^5)$ eller högre) till följande funktioner.
(a) e^{-x} (b) $\sin 2x$ (c) $x \arctan x$ (d) $(1+x)^{-1}$ (e) $\cos(x^2)$ (f) $\ln(1-x^2)$.

P 8.3 Bestäm Maclaurinutvecklingen, med rest i ordoform, av $\big(\ln(1+x)\big)^3$. Utveckla så långt att man ser de tre första icke-försvinnande termerna.

P 8.4 Bestäm Maclaurinutvecklingen av ordning 4 med rest i ordoform av
(a) $\sqrt{9+x^2}$ (b) $\ln(2-x)$ (c) $\cos(2x+\pi/2)$ (d) $\exp(1-2x^2)$

P 8.5 Räkna ut (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2)-1}{x^4}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x \sin 2x}{\ln(1-x^2)}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{(\arctan x)^2}$.

P 8.6 Räkna ut (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right)$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x^2-1} - x\cos\frac{1}{x}}{\sin\frac{1}{x} - \tan\frac{1}{x}}$.

P 8.7 Bestäm konstanterna a, b och c så att följande gränsvärden existerar. Beräkna gränsvärdena!
(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - ax}{x^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - bx}{x^3}$ (c) $\displaystyle\frac{\cos x - e^{-x^2} + c\sin^2 x}{\sqrt[3]{1+3x^2} - \sqrt{1+2x^2}}$ då $x \to 0$.

P 8.8 Låt $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x} - \cos x}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$ Bestäm konstanten a så att f blir kontinuerlig i $x = 0$.

Undersök sedan om $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$, d.v.s. $f'(0)$, existerar med detta val av a.

P 8.9 Bestäm konstanterna a och b så att $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+bx) + 2e^x - 2\cos(ax)}{x^3}$ existerar ändligt, samt bestäm gränsvärdet.

P 8.10 Bestäm konstanten a så att gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x+ax^2) - 1 + \ln(1+ax)}{1-\cos x}$ existerar och är ändligt. Beräkna också gränsvärdet.

P 8.11 Undersök $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2} - \sqrt{x^2+2x-3}\right)$.

P 8.12 Är funktionen $f(t) = \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin tx - \ln(1+x)}{e^{tx} - \sqrt{1+2x}}$ kontinuerlig?

P 8.13 Att beräkna långa Maclaurinutvecklingar av sammansatta funktioner kan bli arbetsamt om man inte går systematiskt till väga. Vi ska här utveckla $\ln(1+x^2+\sin x)$ med rest $\mathcal{O}(x^5)$ genom att utveckla $\ln(1+t)$ med $t = x^2 + \sin x$; notera att $x \to 0 \Rightarrow t \to 0$.

(a) Maclaurinutveckla $t = x^2 + \sin x$ till och med grad 4 i x, alltså med rest $\mathcal{O}(x^5)$.

(b) Maclaurinutveckla $\ln(1+t)$ till och med grad 4 i t, alltså med rest $\mathcal{O}(t^5)$.

(c) Bestäm i tur och ordning utvecklingarna för $t^2 = t \cdot t$, $t^3 = t^2 \cdot t$, $t^4 = t^3 \cdot t$, $\mathcal{O}(t^5)$, alla uttryckta i x och med rest $\mathcal{O}(x^5)$.

(d) Bestäm Maclaurinutvecklingen av $\ln(1 + x^2 + \sin x)$ med rest $\mathcal{O}(x^5)$.

P **8.14** Vi ska utveckla $1/\sqrt{1 + x \arctan x}$ med rest $\mathcal{O}(x^8)$ genom att utveckla $(1 + t)^{-1/2}$ med $t = x \arctan x$.

(a) Maclaurinutveckla $t = x \arctan x$ med rest $\mathcal{O}(x^8)$.

(b) Hur långt måste man Maclaurinutveckla $(1 + t)^{-1/2}$, med $t = x \arctan x$, för att få utvecklingen för $1/\sqrt{1 + x \arctan x}$ med rest $\mathcal{O}(x^8)$? Varför räcker den längden?

(c) Maclaurinutveckla $1/\sqrt{1 + x \arctan x}$ med rest $\mathcal{O}(x^8)$. Jämför med uppgift P 8.13.

P **8.15** Bestäm Maclaurinutvecklingen av ordning 5 med restterm i ordoform för $\cos(\sin x)$.

Vilken utveckling för $\displaystyle\int_0^x \cos(\sin t)\, dt$ får man av detta?

P **8.16** Bestäm ett polynom p av lägsta möjliga grad sådant att

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - p(x)}{x^2} = 2$ (b) $\displaystyle\frac{e^{\sin x} - p(x)}{x^5} \to -1$ då $x \to 0$.

P **8.17** Man kan härleda Maclaurinutvecklingen av ordning 6 för $\tan x$ med restterm i ordoform genom att ansätta en utveckling

$$\tan x = c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \mathcal{O}(x^7)$$

och sedan bestämma koefficienterna i utvecklingen med hjälp av kända utvecklingar och enkla samband.

(a) Motivera varför inga termer med jämna gradtal behövs i ansatsen.

(b) Använd standardutvecklingarna för $\sin x$ och $\cos x$ och identiteten $\cos x \tan x = \sin x$ för att bestämma koefficienterna c_1, c_3, c_5 och därmed utvecklingen för $\tan x$.

(c) Som alternativ till metoden i (b), använd standardutvecklingen för $\arctan x$ och identiteten $\tan(\arctan x) = x$ för att bestämma utvecklingen för $\tan x$.

(d) Använd den i (b) eller (c) erhållna utvecklingen för $\tan x$ för att härleda Maclaurinutvecklingen av ordning 7 för $\ln(\cos x)$ med restterm i ordoform. Ledning: Derivera!

P **8.18** Bestäm Maclaurinutvecklingen av ordning 6 till (a) $\displaystyle\int_0^x \exp(-t^2)\, dt$ (b) $\arcsin x$.

P **8.19** Räkna ut (a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x^2 - (\ln x)^2}{x - \sqrt{x}}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(x^3 \ln \frac{x+2}{x-2} - 4x^2 \right)$.

P **8.20** Visa att funktionen $f(x) = xe^{x^2}$ är inverterbar och bestäm Maclaurinutvecklingen av inversen $f^{-1}(x)$ med rest $\mathcal{O}(x^7)$. (Att f^{-1} är tillräckligt snäll behöver ej motiveras.)

P **8.21** Undersök $f(x)$ med avseende på lokalt extremvärde för $x = 0$ om $f(x)$ ges av

(a) $\cosh x - \cos x$ (b) $\ln(1 - x^2) + \cos x + 3e^x - \arctan 3x$ (c) $\sin^2 2x + 2e^{-2x^2}$.

P **8.22** I många (tillämpade) sammanhang nöjer man sig med att för x nära 0 skriva $\sin x \approx x$ och $\ln(1 + x) \approx x$ och drar slutsatser av det. Viss försiktighet måste dock iakttas. Jämför uppgifterna P 8.6a och P 8.6b. Kommentar?

P **8.23** Undersök om $\displaystyle\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} - \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}$ har gränsvärde (vilket i så fall?) då $n \to \infty$.

P **8.24** Bestäm Taylorutvecklingen av $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 7x - 5$, med rest i Lagranges form,

(a) kring $x = 1$, ordning 2 (b) kring $x = 0$, ordning 2 (c) kring $x = 0$, ordning 4.

P 8.25 Bestäm Taylorutvecklingen av ordning 0 kring a till en allmän funktion f, med restterm i Lagranges form. Hur blir uttrycket för $f(b) - f(a)$? Känns det bekant?

P 8.26 (a) Härled Maclaurinutvecklingen av ordning 4 med restterm i Lagranges form för $\sin x$.

(b) Visa att $\left|\sin x - \left(x - \dfrac{x^3}{6}\right)\right| \leq \dfrac{|x|^5}{120}$ för alla x.

(c) Visa att $\dfrac{x^5}{240} \leq \sin x - \left(x - \dfrac{x^3}{6}\right) \leq \dfrac{x^5}{120}$ då $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}$. Ange speciellt var ξ kan finnas.

(d) Ange en liknande olikhet för $-\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq 0$. Var kan ξ finnas nu?

(e) Visa att $\left|\dfrac{\sin x}{x} - \left(1 - \dfrac{x^2}{6}\right)\right| \leq \dfrac{x^4}{120}$ för alla $x \neq 0$.

P 8.27 (a) Bestäm Maclaurinutvecklingen av ordning 1 till $\arctan x$ med restterm i Lagranges form.

(b) Visa att $\left|\arctan(1/5) - 1/5\right| \leq 1/100$.

P 8.28 Härled Maclaurinutvecklingen av ordning 4 för e^x, med restterm i Lagranges form. Approximera sedan $1/\sqrt{e}$ med hjälp av denna utveckling, och visa att approximationsfelets belopp är mindre än 10^{-3}.

P 8.29 (a) Maclaurinutveckla $f(x) = 5(1 + x)^{1/2}$ till ordning 1, med restterm i Lagranges form. Mellan vilka gränser befinner sig talet ξ?

(b) Använd att $\sqrt{26} = \sqrt{25 + 1} = 5\sqrt{1 + 1/25}$, och utvecklingen i (a), för att finna en rationell approximation till talet $\sqrt{26}$. Var finns ξ nu? Vilken uppskattning av absolutbeloppet av approximationsfelet ger det?

(c) Samma uppgift som i (b), men nu för $\sqrt{24}$.

P 8.30 Som bekant är $\dfrac{\pi}{6} = \arcsin\dfrac{1}{2} = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$. Vi ska använda detta samband för att få ett närmevärde till π.

(a) Maclaurinutveckla $(1 + t)^{-1/2}$ till ordning 2 i t och med restterm i Lagranges form.

(b) Bestäm med hjälp av utvecklingen i (a) ett närmevärde till π och uttryck felet i approximationen som en integral.

(c) Visa att felets absolutbelopp är mindre än 10^{-2}.

P 8.31 Approximera följande tal med fel vars absolutbelopp är högst $\dfrac{1}{100}$: (a) $\cos\dfrac{1}{10}$ (b) $\cos 1$.

P 8.32 Bestäm ett polynom $p(x)$ som approximerar $\cos x$ för $-1/2 \leq x \leq 1/2$ så att felets absolutbelopp blir mindre än 10^{-2} för alla dessa x.

P 8.33 Bestäm ett polynom som approximerar e^{-x^2} för $-1 \leq x \leq 1$ så att felets absolutbelopp blir mindre än 10^{-2} för alla dessa x.

P 8.34 Låt p_1 vara Maclaurinpolynomet av ordning 1 till $f(x) = \dfrac{x^3}{6} + 3(x + 2)\ln\dfrac{x + 2}{2}$.

(a) Bestäm p_1. (b) Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - p_1(x)}{x^2}$.

(c) Visa att $(\sqrt{3} - 1)x^2 \leq f(x) - p_1(x) \leq x^2$ för alla $x \in [-1, 1]$.

P 8.35 Räkna ut ett närmevärde till $\sqrt[5]{33}$ med ett fel av högst 10^{-3}.

P 8.36 I relativitetsteorin talar man om en partikels vilomassa m_0, relativistiska massa m och energi E. Kopplingen är

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx m_0 c^2 + \frac{m_0 v^2}{2},$$

där v är partikelns hastighet och c är ljushastigheten. (De två termerna i approximationen kallas vilo- respektive rörelseenergi.)

(a) Motivera approximationen. För vilka v är den bra?

(b) Uppskatta felet i approximationen då $|v| \leq c/10$ (vilket är ca 30.000 km/s).

P **8.37** Bestäm ett bråktal C sådant att $0 \leq \cosh x - 1 - \dfrac{x^2}{2} \leq Cx^4$ för alla $x \in [-1, 1]$.

P **8.38** Man vill beräkna $\ln 2$ numeriskt med hjälp av Maclaurinutveckling. Att använda utvecklingen för $\ln(1+x)$ med $x = 1$ är en dålig metod (varför?), så i stället utvecklar man

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x), \qquad |x| < 1,$$

och väljer sedan x lämpligt. Approximera $\ln 2$ med ett fel vars belopp är högst 10^{-4}.

9 Differentialekvationer

P **9.1** Betrakta (den homogena) differentialekvationen

$$(*) \qquad y' + 2xy = 0.$$

(a) Rita riktningsfältet (i punkterna $(x, y) = (m, n)$, där $m, n \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$, räcker) och fundera över hur lösningskurvorna kan tänkas se ut.

(b) Bestäm en integrerande faktor och sedan alla lösningar till $(*)$. Rita denna kurvskara (d.v.s. rita ett antal representativa lösningskurvor).

(c) Bestäm den lösningskurva som går genom punkten $(1, 1)$.

P **9.2** Bestäm alla lösningar till de linjära differentialekvationerna

(a) $y' = 3y + x^2$ (b) $y' + 2xy = x$ (c) $y' + 3x^2y = x^2$

(d) $(1+x^2)y' + 2xy = 2x$ (e) $xy' + 2y = \sin x,\ x > 0$ (f) $2xy' - y = 3x^2,\ x > 0$.

P **9.3** Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $2xy' - y = 3x^2$, $x > 0$ (uppgift P 9.2f) sådana att (a) $y(1) = 0$ (b) $y'(4) = 0$ (c) $y(x) \geq y(1)$, $x > 0$ (d) $y(x) \leq y(1)$, $x > 0$.

P **9.4** Betrakta differentialekvationen $y' = 2\dfrac{y}{x}$ på intervallet $x > 0$.

(a) Bestäm en integrerande faktor och sedan alla lösningar till differentialekvationen i det angivna intervallet. Rita lösningssskaran.

(b) Bestäm den lösningskurva som går genom punkten $(2, -3)$.

P **9.5** Bestäm alla funktioner $y(x)$ sådana att $(x+1)y' - y = \ln x$, $x > 0$. Uppfyller någon av dessa villkoret $y'(x) \to 1$ då $x \to \infty$?

P **9.6** Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $(x^2 + x)y'(x) - y(x) = \ln x$, $x > 0$.

P **9.7** Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $(x^2 + x)y' - y = x^3 \cos x$, $x > 0$. Finns någon lösning som dessutom uppfyller villkoret att y/x^3 har ändligt gränsvärde då $x \to 0+$? Bestäm i så fall även denna lösning och tillhörande gränsvärde.

P **9.8** Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{x}{1+x^2}, \qquad x > 0,$$

som har ett ändligt gränsvärde (vilket?) då $x \to 0$.

P **9.9** Lös differentialekvationen

$$y' - (\tan x)y = \cos^2 x, \qquad |x| < \pi/2.$$

Ange också den lösning som är udda, d.v.s. för vilken $y(-x) = -y(x)$, $|x| < \pi/2$.

P **9.10** (a) Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y' - \frac{2y}{x} = \frac{5x}{x^2+2x+5}, \qquad x > 0,$$

för vilken $\lim_{x\to\infty} y(x)/x^2 = 0$.

(b) Låt y vara lösningen i (a). Visa att $y(x) < 0$ för alla $x > 0$.

P **9.11** (a) En kropp med temperaturen $T(0) = 60$ grader placeras i ett rum med konstant temperatur $T_0 = 20$ grader. Efter 20 minuter är kroppens temperatur $T(20) = 40$ grader. Bestäm kroppens temperatur efter ytterligare 20 minuter. Vad händer då $t \to \infty$? Matematisk modell: Avsvalningshastigheten antas vara proportionell mot skillnaden mellan kroppens och omgivningens temperatur.

(b) En allmän situation: Låt begynnelsetemperaturen $T(0)$, den konstanta rumstemperaturen $T_0 < T(0)$ och kroppens temperatur $T(t_1)$ vid tiden $t = t_1 > 0$ vara givna, där $T_0 < T_1 < T(0)$. Bestäm då temperaturen $T(t)$ för $0 \le t < \infty$.

P **9.12** Bestäm alla kontinuerligt deriverbara kurvor genom origo sådana att normalen i en godtycklig punkt (a, b) på kurvan skär y-axeln i punkten $(0, b+2)$.

P **9.13** Betrakta differentialekvationen

$$y' + g(x)y = h(x),$$

där g och h är kontinuerliga funktioner och $g(a) \neq 0$, där a är en given konstant. Till varje lösningskurva dras tangenten i lösningskurvans skärningspunkt med linjen $x = a$. Visa att alla dessa tangenter har en gemensam punkt, och bestäm denna.

P **9.14** Visa att $y = 2\ln x$ är en lösning till differentialekvationen $x(y' + e^y) = x^3 + 2$, $x > 0$.

P **9.15** Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' + 4x^3y^2 = 0$ som är sådan att

(a) $y(1) = 1/2$ (b) $y(1) = 1$ (c) $y(1) = -1/15$ (d) $y(1) = 0$.

P **9.16** Bestäm den lösning till differentialekvationen $x^2y' = y^2 + 2y + 1$ för vilken gäller

(a) $y(-1) = 1$ (b) $y(-1) = -1$.

P **9.17** Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' = \dfrac{1+y}{x^2+x}$ för vilken gäller

(a) $y(-2) = 1$ (b) $y(1) = -1$ (c) $y(1) = -2$ (d) $y(-1/2) = 0$.

För vilka x existerar lösningarna? Rita lösningskurvorna!

P **9.18** Differentialekvationen $y' = 2\dfrac{y}{x}$, $x > 0$, från uppgift P 9.4a är också separabel. Lös den med separation och jämför med din tidigare lösning.

P **9.19** Bestäm den lösning till $y' = \cos^2 y$ för vilken $y(1) = \pi$. Rita lösingskurvan.

P **9.20** Lös differentialekvationen $e^y(1 + y') = 1$ under bivillkoret $y(0) = \ln 3$.

P **9.21** Bestäm lösningen till differentialekvationen $y' = xy^2 + x$, $y(0) = 1$. I vilket största intervall kring 0 existerar lösningen? Rita lösningskurvan.

P **9.22** Lös $(1 + x^2)^2y' = xe^{2y}$, $y(0) = \ln 2$. För vilka x existerar lösningen?

P **9.23** Lös differentialekvationen $y' = \dfrac{y - y^3}{x^3 - x}$, $0 < x < 1$, med villkoret $y(1/2) = 1/2$.

P **9.24** Låt $y(x)$ vara lösningen till differentialekvationen

$$y' = 2x\sqrt{3-2y-y^2}, \qquad y(0) = 0.$$

För vilka reella konstanter a existerar $\lim_{x\to 0} \dfrac{y(x)-ax^2}{x^4}$ ändligt? Beräkna också gränsvärdet.

P **9.25** Lös differentialekvationen

$$\frac{y'}{\sqrt{y+2}} = \frac{y+1}{1+x^2}, \qquad y(0) = -\frac{7}{4}.$$

Tips: Bestäm konstanten omedelbart när den dyker upp, och jämför gärna med vad som händer om du i stället bestämmer den på slutet.

P **9.26** (a) Den i uppgifterna P 9.4 och P 9.18 undersökta differentialekvationen $y' = 2y/x$, $x > 0$, har formen

$$y' = f\big(\frac{y}{x}\big),$$

där f är kontinuerlig (här är $f(t) = 2t$). Bestäm alla lösningar genom att först lösa den differentialekvation som den nya obekanta funktionen $z(x) = y(x)/x$ satisfierar.

(b) Lös differentialekvationen $y' = \dfrac{y-x}{y+x}$, $y(1) = 1$. Lösningen får ges i implicit form.

P **9.27** Lös differentialekvationen $y' = (x+y)^2$, $y(0) = 1$ genom att först bestämma den differentialekvation som en ny obekant funktion $z(x) = y(x) + x$ satisfierar. I vilket största intervall omkring $x = 0$ existerar lösningen? Vad händer då x går mot detta intervalls ändpunkter?

P **9.28** Differentialekvationen $2xy' - y = 3x^2$, $x > 0$, i uppgift P 9.2f är också en så kallad Eulerekvation (se boken) och kan lösas genom att byta variabel: $t = \ln x$. Visa att ekvationen i den nya variabeln blir

$$2\frac{dy}{dt} - y = 3e^{2t},$$

och lös sedan ekvationen.

P **9.29** Lös integralekvationerna

(a) $y(x) = 3 + \displaystyle\int_0^x y(t)\,dt$ (b) $y(x) = 3 + \displaystyle\int_x^4 y(t)\,dt$ (c) $y(x) = 3 + \displaystyle\int_0^4 y(t)\,dt$.

P **9.30** Lös integralekvationen $x - y(x) = \displaystyle\int_x^0 \frac{2t\,y(t)}{1+t^2}\,dt$.

P **9.31** Antag att funktionen f är kontinuerlig och att y har kontinuerlig derivata för alla reella x. Visa att olikheten

$$y'(x) + f(x)y(x) \le 0 \qquad \text{för alla } x$$

är ekvivalent med olikheten

$$y(b) \le y(a)\exp\left(-\int_a^b f(t)\,dt\right) \qquad \text{för alla } a,\ b,\ b \ge a.$$

P **9.32** Bestäm alla deriverbara funktioner på hela $\mathbb{R}$ som där uppfyller

(a) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (b) $f(x+y) = f(x)f(y)$.

P 9.33 (a) Beteckna med $y_1(x)$ lösningen till differentialekvationen $y' + f(x)y = g(x)$, $y(0) = C_1$ och med $y_2(x)$ lösningen till differentialekvationen $y' + f(x)y = g(x)$, $y(0) = C_2$, där f och g är kontinerliga funktioner definierade på hela reella axeln. Visa att

$$y_1(x) - y_2(x) = (C_1 - C_2)\exp\left(-\int_0^x f(t)\,dt\right).$$

(En liten ändring av begynnelsevärdet ger alltså på begränsade intervall en liten ändring av lösningen.)

(b) Beteckna med $y_1(x)$ lösningen till differentialekvationen $y' + y = g_1(x)$, $y(0) = A$ och med $y_2(x)$ lösningen till differentialekvationen $y' + y = g_2(x)$, $y(0) = A$, där högerleden g_1, g_2 är kontinerliga funktioner definierade på hela reella axeln och är sådana att skillnaden $g = g_1 - g_2$ är begränsad: $|g(x)| \le M < \infty$ för alla reella x. Visa olikheten

$$|y_1(x) - y_2(x)| \le M|1 - e^{-x}|.$$

(En liten ändring av högerledet ger alltså på begränsade intervall en liten ändring av lösningen.)

P 9.34 Betrakta differentialekvationen

$$(*) \qquad xy' = 2y.$$

Visa följande:

(a) Om I är ett intervall som inte innehåller punkten $x = 0$, så ges alla lösningar till $(*)$ på I av $y = Cx^2$, C konstant. (Jämför med uppgift P 9.4a.)

(b) Om $y(x)$ är en lösning till $(*)$ på hela $\mathbb{R}$, så är $y(0) = 0$ och det finns konstanter A och B (som inte behöver vara lika) sådana att

$$y(x) = \begin{cases} Ax^2, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ Bx^2, & x < 0. \end{cases}$$

(c) Funktionerna i (b) är verkligen lösningar till $(*)$ på $\mathbb{R}$, d.v.s.: $y'(x)$ existerar för alla $x \in \mathbb{R}$ och $(*)$ är uppfylld för alla $x \in \mathbb{R}$.

(d) Genom varje punkt (a, b), där $a \neq 0$, går oändligt många lösningar till $(*)$ på hela $\mathbb{R}$.

P 9.35 Betrakta differentialekvationen

$$(**) \qquad xy' = y.$$

Visa följande (jämför med uppgift P 9.34):

(a) Om $0 \notin I$ så är $y(x)$ lösning till $(**)$ på intervallet I precis då $y = Cx$, C konstant.

(b),(c) $y(x)$ är lösning till $(**)$ på hela $\mathbb{R}$ precis då $y = Cx$, C konstant. (Det måste alltså vara samma konstant för $x > 0$ och för $x < 0$, varför?)

(d) Genom varje punkt (a, b), där $a \neq 0$, går precis en lösning till $(**)$ på hela $\mathbb{R}$.

P 9.36 Betrakta differentialekvationen

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}.$$

Det är trivialt att för varje $a \in \mathbb{R}$ är $y = 0$ en lösning som går genom $(a, 0)$. Visa att även

$$y(x) = \begin{cases} (x - a_1)^3, & x < a_1, \\ 0, & a_1 \le x \le a_2, \\ (x - a_2)^3, & x > a_2, \end{cases}$$

där a_1, a_2 är konstanter sådana att $a_1 \le a \le a_2$, är lösningar som går genom $(a, 0)$. Finns det ännu fler sådana lösningar? Ange någon i så fall! (Allmänna frågor om existens och entydighet tas upp i kursen TATA71 Ordinära differentialekvationer och dynamiska system.)

P 9.37 Lös differentialekvationen (a) $y'' + 2y' + 5y = 0$ (b) $y'' + 2y = 0$.
Bestäm speciellt de lösningar som uppfyller villkoren $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

P 9.38 Bestäm alla lösningar till differentialekvationerna
(a) $y' - 3y = 0$ (b) $y'' + 2y' = 0$ (c) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$ (d) $y^{(4)} - y'' = 0$.

P 9.39 Lös differentialekvationen $y^{(4)} = y$.

P 9.40 Bestäm den allmänna lösningen till $y^{(5)} + y^{(4)} + y^{(3)} + y^{(2)} + y' + y = 0$.

P 9.41 Visa att $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \sin x$ är en lösning till Bessels differentialekvation, d.v.s. till

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \big(1 - \frac{1}{4x^2}\big)y = 0, \qquad x > 0.$$

P 9.42 Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + 4y' + 3y = x^2 + 1$ som uppfyller villkoret $y(0) = 0 = y'(0)$.

P 9.43 Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y'' + 3y' - 4y = e^x + 4x - 7$.

P 9.44 Bestäm den lösning till differentialekvationen $y''+2y'+3y = 0$ som har ett lokalt extremvärde $y = 1$ i $x = 0$ och avgör på enklaste sätt om detta extremvärde är ett lokalt maximum eller minimum.

P 9.45 Bestäm y så att $y''(x) = 1/x$ för $x > 0$ och $y(x) \geq y(1) = 0$ för alla $x > 0$.
(Var noga med att visa att din lösning verkligen uppfyller olikheten.)

P 9.46 Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + 2y = \sin x - \cos x$ som uppfyller villkoret $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

P 9.47 Lös differentialekvationen $y''' + y'' + y' + y = x + 1 + \cos x$.

P 9.48 Lös differentialekvationen $y'' + y = h(x)$ då
(a) $h(x) = 6\cos 2x - 3\sin 2x$ (b) $h(x) = \cos x$ (c) $h(x) = \sin x$
(d) $h(x) = 6\cos x - 3\sin x$ (e) $h(x) = x\cos x$ (f) $h(x) = \cos x \sin x$

P 9.49 (a) Verifiera att $y = x^2 \ln x$ är *en* lösning till $y'' + 2y' + 2y = (2x^2 + 4x + 2)\ln x + 2x + 3$.
(b) Bestäm *alla* lösningar till $y'' + 2y' + 2y = (2x^2 + 4x + 2)\ln x + 2x + 3$.
(c) Bestäm alla lösningar till $y'' + 2y' + 2y = (2x^2 + 4x + 2)\ln x$.

P 9.50 Ange en differentialekvation som har den allmänna lösningen
(a) $y = Ae^{3x} + Be^{-4x}$ (b) $y = Ae^{3x} + Be^{-4x} - \cos x$
(c) $y = (A + x)e^x + (B + Cx)e^{-x}$ (d) $y = Ae^{-2x} + e^{-x}(1 + B\cos 3x + C\sin 3x)$.

P 9.51 Bestäm de lösningar till differentialekvationen $y'' - 2y' - 15y = e^{-3x} + 1$ som är begränsade på intervallet $x \geq 0$.

P 9.52 Betrakta differentialekvationen $y'' + 2y' + y = 2\sin x$.

(a) Bestäm den lösningskurva som tangerar x-axeln i origo.
(b) Vilka lösningar har lokalt maximum för $x = 0$?

P 9.53 Betrakta differentialekvationen $y'' + 3y' + 2y = x + e^{-x}$.
(a) Bestäm den lösning som går genom origo och som har horisontell tangent där.
(b) Avgör om lösningen i (a) har extremvärde i origo.

P 9.54 Lös differentialekvationen $y^{(3)} - 3y' + 2y = \cosh x$.

P 9.55 Bestäm alla lösningar till differentialekvationen i uppgift P 9.54 som har strängt lokalt maximum då $x = 0$ och som uppfyller $e^{2x}y(x) \to 0$ då $x \to -\infty$.

P 9.56 Bestäm den lösningskurva till differentialekvationen $y''' + 2y'' + y' = (x+1)e^x$ som tangerar x-axeln i origo och där har andraderivatan lika med 0.

P 9.57 Har differentialekvationen $y'' - 4y' + 8y = xe^{2x}\sin 2x$ någon lösning som har lokalt extremvärde 1 för $x = 0$? Avgör i så fall om detta är ett lokalt maximum eller lokalt minimum och om lösningen har ett största eller minsta värde för $-\infty < x < \infty$.

P 9.58 Lös differentialekvationen $y'' + 4y' + 5y = 5 - 2e^{-x} + 3e^{-2x}\cos 2x$.

P 9.59 (a) Betrakta differentialekvationen

$$(*) \qquad y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x),$$

där funktionerna a, b, f är kontinuerliga. Eftersom koefficienterna inte är konstanta duger inte de tidigare framtagna lösningsmetoderna. Följande fungerar dock:
Antag att man har funnit en lösning $y = v(x)$ till den *homogena* ekvationen

$$(*_h) \qquad y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

(en sådan kan man ofta finna i serieform). Gör i $(*)$ ansatsen $y = v \cdot z$, härled differentialekvationen för den nya obekanta funktionen z och ange hur den kan lösas.

(b) Lös differentialekvationen i uppgift P 9.41 genom att tillämpa ovanstående metod.

P 9.60 (a) Visa att varje homogen linjär differentialekvation av ordning 3 med konstanta reella koefficienter har minst en lösning av formen $y = e^{cx}$, c reell.

(b) Hur generaliseras detta till ekvationer av godtycklig ordning?

(c) Visa att varje lösning till den linjära differentialekvationen $P_n(D)(y) = 0$ med konstanta koefficienter har gränsvärdet 0 då $x \to +\infty$ om och endast om alla rötter till den karakteristiska ekvationen har realdel < 0.

(d) Hur ser villkoret på den karakteristiska ekvationens rötter ut om ”har gränsvärdet 0 då $x \to +\infty$” byts mot ”är begränsad då $x \to +\infty$”?

P 9.61 Betrakta de två differentialekvationerna
(1) $y'' + (\cos x)y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ (2) $y'' + y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.
För små värden på variabeln x skiljer sig de båda differentialekvationerna endast lite från varandra, och man kan då förmoda att deras lösningar har samma egenskap. Vilken är den första termen i Maclaurinutvecklingen av lösningen till (1) som skiljer sig från motsvarande i (den kända) Maclaurinutvecklingen av lösningen till (2)? Att lösningen till (1) har Maclaurinutveckling av godtycklig ordning får användas utan bevis.

10 Serier och generaliserade integraler

P 10.1 Visa att (a) $0 \le \displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^4} \le \frac{1}{3}$ (b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} \le \frac{4}{3}$ (c) $\displaystyle\int_0^9 \frac{dx}{2\sqrt{x} + |\sin x|} \le 3$

(d) $\dfrac{3}{4} \le \displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2 + |\cos x|} \le 1$ (e) $\ln 2 \le \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x + e^x} \le 1$ (ledning: $e^x \ge 1 + x$)

P 10.2 Visa att $\displaystyle\int_\pi^b \frac{\cos x}{x}\,dx = \frac{\sin b}{b} + \int_\pi^b \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ för alla $b > \pi$, och visa sedan med hjälp av detta samband att $\displaystyle\int_\pi^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx$ är konvergent.

P 10.3 Om serierna $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty a_k$ och $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty b_k$ båda är konvergenta, så är som bekant även serien $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty (a_k + b_k)$ konvergent, men vad kan sägas om konvergensen hos $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty (a_k + b_k)$ om

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent men $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är divergent?

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ båda är divergenta?

P **10.4** Vi ska undersöka den positiva serien $\sum_{k=2}^{\infty}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)$.

(a) Beräkna delsummorna s_n, $n \geq 2$, och visa med hjälp av dem att serien är divergent.

(b) Klarar Divergenstestet att visa att serien är divergent?

P **10.5** Betrakta den positiva serien $s = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$, där $a_k = \dfrac{2^k}{5^k + 10^k}$.

(a) Genom att använda att $5^k \geq 0$, visa att $s \leq 5/4$.

(b) Vilken övre gräns för s får man om man i stället använder att $10^k \geq 5^k$ då $k \geq 0$?

(c) Visa på enklast möjliga sätt att $s > 5/8$.

(d) Visa att felet i approximationen $s \approx a_0 + a_1 + a_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{15} + \dfrac{4}{125}$ är högst $\dfrac{1}{100}$.

P **10.6** (a) Beräkna $\displaystyle\int_1^b \frac{dx}{x^2+2x}$ för $b > 1$ och $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+2k}$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$

(b) Använd (a) för att räkna ut $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x}$ och $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+2k}$. Notera att de blir olika!

(c) Illustrera med areor i en figur varför det är uppenbart att $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+2k} \geq \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x}$.

(d) Rita en ny figur som illustrerar olikheten $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2+2k} \leq \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x}$.

(e) Rita en figur som illustrerar olikheten $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+2k} \leq \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x}$. Är den användbar?

P **10.7** Låt $f(x) = \dfrac{x}{(12+x^2)^2}$ och sätt $a_k = f(k) = \dfrac{k}{(12+k^2)^2}$.

(a) Rita kurvan $y = f(x)$ för $x \geq 0$. Notera speciellt var f är avtagande.

(b) För vilket minsta heltal $n \geq 1$ kan man i en figur se att $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} a_k \geq \int_n^{\infty} f(x)\,dx$?

(c) För vilket minsta heltal $m \geq 1$ kan man i en figur se att $\displaystyle\sum_{k=m}^{\infty} a_k \leq \int_n^{\infty} f(x)\,dx$? (Samma n som i (b).)

(d) Använd (b) och (c) för att finna tal A_1 och A_2 sådana att $A_1 \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq A_2$.

P **10.8** Studera serien $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} a_k = a_3 + a_4 + a_5 + \ldots$, där $a_k = (-1)^k \dfrac{\ln k}{\sqrt{k}}$.

(a) Visa att $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} a_k$ inte är absolutkonvergent, d.v.s. att $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} |a_k|$ är divergent.

(b) Bestäm ett heltal $n \geq 3$ sådant att $\sum_{k=n}^{\infty} a_k$ är en Leibnizserie, och motivera sedan att $\sum_{k=3}^{\infty} a_k$ är konvergent. Ledning: Studera $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ för $x \geq 3$, så att $|a_k| = f(k)$.

P **10.9** Visa att $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ *inte* är absolutkonvergent genom att först visa att

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \frac{2}{(n+1)\pi}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(Den är dock konvergent, och man kan med komplex analys visa att värdet är $\pi/2$.)

P **10.10** (a) Lös differentialekvationen $y'' = y$ med bivillkoren $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, på samma sätt som i uppgift P 9.37 (inte med potensserier). Hur många funktioner löser detta problem?

(b) Verifiera att potensserien $y = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ har oändlig konvergensradie och löser problemet i (a). Använd detta för att beräkna potensseriens summa.

(c) Beräkna på liknande sätt $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$ och $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.

P **6.12** (a) $\dfrac{3\pi}{10} - \dfrac{3\ln 2}{5}$ (b) $\dfrac{\pi}{12} - \dfrac{20}{9} + \dfrac{9\ln 5}{2} + \dfrac{13\ln 2}{3} - \dfrac{\arctan 3}{3}$

(c) $\dfrac{5\pi}{16}$ (d) $1 - \dfrac{\pi}{4}$

(e) $\dfrac{\pi}{2}$ (f) $\dfrac{5}{36}$

(g) $\dfrac{\pi}{2} - 1$ (h) $\dfrac{2\pi}{3}$

(i) $\dfrac{\pi^2}{4}$ (j) $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\ln 2}{2}$

(k) $4\ln\left(\sqrt{2}-1\right) - 10 + 4\sqrt{2}$ (l) $6\left(\sqrt{3} - \sqrt{2} - \dfrac{\pi}{3} + \arctan\sqrt{2}\right)$

(m) $\sqrt{2} - 1 - \ln(1+\sqrt{2})$ (n) $\sqrt{2} + 3\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(o) $2\sqrt{5} - \sqrt{2} + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9+4\sqrt{5}}{3+2\sqrt{2}}$

P **6.14** 0

P **6.15** $230\sqrt{3} \approx 400\ V$

P **6.16** (a) divergent (b) 1 (c) $4(\ln 2 - 1)$

P **6.17** (a) divergent (b) $\ln 2$ (c) divergent (d) $\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

P **6.20** (a) $t = \dfrac{4}{3}$ (b) $t = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ (c) $t = \dfrac{1+\sqrt{7}}{3}$

P **6.22** $4/e$

P **6.23** $N = 10$ räcker

P **6.25** 1.

Tillämpningar av integraler

P **7.1** $4\ln 2$

P **7.2** Vad blir arean av en kvadrat som omsluter cirkeln? Vad får uttrycken för dimension?

P **7.3** $\displaystyle\int_{R/2}^{R} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,dx = \frac{\pi}{3}R$

P **7.4** $\displaystyle\frac{\pi L}{2} + \int_0^{L/R} (L - R\varphi)\,d\varphi = \frac{\pi L}{2} + \frac{L^2}{2R}$

P **7.5** $\dfrac{\pi}{2}(3e^2 - 27 + 48\ln 2)$

P **7.6** $\pi(2 - \ln 2 - \pi/4)$

P **7.7** $\displaystyle 2\pi\int_{-R}^{R} (2R - x)\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\,dx = 4\pi^2R^2$

P **7.8** (a) Arean av D är $\displaystyle\int_{-1}^{3} \big(f(x) + 2\big)dx$

(b) $\displaystyle V_b = \int_{-1}^{3} 2\pi(x+1)\big(f(x)+2\big)\,dx,\ \ A_b = \int_{-1}^{3} 2\pi(x+1)\sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\,dx + \pi\cdot 4^2$

(c) $V_c = \int_{-1}^{3} \Big(\pi\big(f(x)+3\big)^2 - \pi\cdot 1^2\Big)\,dx = \int_{-1}^{3} 2\pi\left(\frac{f(x)-2}{2}+3\right)\big(f(x)+2\big)\,dx,$

$A_c = \int_{-1}^{3} 2\pi\big(f(x)+3\big)\sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\,dx + 2\pi\cdot 1\cdot 4 + (\pi\cdot 7^2 - \pi\cdot 1^2)$

Maclaurin- och Taylorutveckling

P **8.1** $\sqrt{x} = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3 + \mathcal{O}\big((x-4)^4\big)$

P **8.2** (a) $1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^5)$ (b) $2x - \frac{4x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5)$ (c) $x^2 - \frac{x^4}{3} + \mathcal{O}(x^6)$

(d) $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \mathcal{O}(x^5)$ (e) $1 - \frac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^8)$ (f) $-x^2 - \frac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^6)$

P **8.3** $\big(\ln(1+x)\big)^3 = x^3 - \frac{3x^4}{2} + \frac{7x^5}{4} + \mathcal{O}(x^6)$

P **8.4** (a) $3 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{216} + \mathcal{O}(x^6)$ (b) $\ln 2 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{24} - \frac{x^4}{64} + \mathcal{O}(x^5)$ (c) $-2x + \frac{4x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5)$

(d) $e - 2ex^2 + 2ex^4 + \mathcal{O}(x^6)$

P **8.5** (a) $-1/2$ (b) -2 (c) $1/2$

P **8.6** (a) 0 (b) $1/2$ (c) $1/3$

P **8.7** (a) $a = 1$, gränsvärde 0 (b) $b = 1$, gränsvärde $-1/6$ (c) $c = -1/2$, gränsvärde $7/12$

P **8.8** $a = 2$, vilket ger $f'(0) = 5/2$

P **8.9** $a = \pm 1$, $b = -2$; gränsvärdet blir $-7/3$ (i båda fallen)

P **8.10** $a = -1$; gränsvärdet blir -2

P **8.11** Gränsvärdet existerar och är 1

P **8.12** Nej, ty $f(t) = 1$ om $t \neq 1$ men $f(1) = 1/2$

P **8.13** (a) $t = x^2 + \sin x = x + x^2 - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)$ (b) $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \mathcal{O}(t^5)$

(c) $t^2 = x^2 + 2x^3 + \frac{2x^4}{3} + \mathcal{O}(x^5)$, $t^3 = x^3 + 3x^4 + \mathcal{O}(x^5)$, $t^4 = x^4 + \mathcal{O}(x^5)$, $\mathcal{O}(t^5) = \mathcal{O}(x^5)$

(d) $\ln(1 + x^2 + \sin x) = \ln(1+t) = \ldots = x + \frac{x^2}{2} - \frac{5x^3}{6} + \frac{5x^4}{12} + \mathcal{O}(x^5)$

P **8.14** (a) $t = x\arctan x = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{5} + \mathcal{O}(x^8)$

(b) $(1+t)^{-1/2} = 1 - \frac{t}{2} + \frac{3t^2}{8} - \frac{5t^3}{16} + \mathcal{O}(t^4)$ räcker, ty $\mathcal{O}(t^4) = \mathcal{O}(x^8)$

(c) $1/\sqrt{1 + x\arctan x} = (1+t)^{-1/2} = \ldots = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{13x^4}{24} - \frac{53x^6}{80} + \mathcal{O}(x^8)$,

ty $t^2 = t\cdot t = x^4 - \frac{2x^6}{3} + \mathcal{O}(x^8)$, $t^3 = t^2\cdot t = x^6 + \mathcal{O}(x^8)$, $\mathcal{O}(t^4) = \mathcal{O}(x^8)$

P **8.15** $\cos(\sin x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \mathcal{O}(x^6)$, $\int_0^x \cos(\sin t)\,dt = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^5 + \mathcal{O}(x^7)$

P **8.16** (a) $p(x) = x - 2x^2$ (b) $p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{14x^5}{15}$

P **8.17** (a) $\tan x$ är udda (b,c) $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \mathcal{O}(x^7)$ (d) $\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + \mathcal{O}(x^8)$

P **8.18** (a) $x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{10} + \mathcal{O}(x^7)$ (b) $x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^5}{40} + \mathcal{O}(x^7)$

P **8.19** (a) 4 (b) 16/3

P **8.20** $x - x^3 + \dfrac{5x^5}{2} + \mathcal{O}(x^7)$

P **8.21** (a) Lokalt minimum $(f(x) = x^2 + \mathcal{O}(x^4))$
(b) Inget lokalt extremvärde $(f(x) = 4 + 19x^3/2 + \mathcal{O}(x^4))$
(c) Lokalt maximum $(f(x) = 2 - 4x^4/3 + \mathcal{O}(x^6))$

P **8.23** Gränsvärdet existerar och är e

P **8.24** (a) $-2 - (x-1) - 3(x-1)^2 + (4\xi - 2)(x-1)^3$, där ξ ligger mellan 1 och x
(b) $-5 + 7x - 3x^2 + (4\xi - 2)x^3$, där ξ ligger mellan 0 och x
(c) $-5 + 7x - 3x^2 - 2x^3 + x^4$ (resttermen blir alltså noll i detta fall)

P **8.25** $f(x) = f(a) + f'(\xi)(x-a)$, där ξ ligger mellan a och x,
$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$, där ξ ligger mellan a och b (medelvärdessatsen!)

P **8.26** (a) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{\cos\xi}{120}x^5$ för något $\xi = \xi(x)$ mellan 0 och x
(b) $\sin x - \left(x - \dfrac{x^3}{6}\right) = \dfrac{\cos\xi}{120}x^5$, tag absolutbelopp ($|\cos\xi| \le 1$ för alla ξ)
(c) $0 \le \xi \le \pi/3$, vilket medför att $1/2 \le \cos\xi \le 1$; notera att $x^5 \ge 0$ för aktuella x
(d) $\dfrac{x^5}{120} \le \sin x - \left(x - \dfrac{x^3}{6}\right) \le \dfrac{x^5}{240}$; $-\pi/3 \le \xi \le 0$, så $1/2 \le \cos\xi \le 1$ även nu

P **8.27** (a) $\arctan x = x - \dfrac{\xi}{(1+\xi^2)^2}\,x^2$ för något $\xi = \xi(x)$ mellan 0 och x
(b) $\left|\arctan\dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{5}\right| = \left|-\dfrac{\xi}{(1+\xi^2)^2}\cdot\dfrac{1}{5^2}\right| = \dfrac{|\xi|}{(1+\xi^2)^2}\cdot\dfrac{1}{25} \le \dfrac{1/5}{(1+0^2)^2}\cdot\dfrac{1}{25} = \dfrac{1}{125} \le \dfrac{1}{100}$,
ty $\xi = \xi(1/5)$ finns någonstans mellan 0 och 1/5, så $|\xi| \le 1/5$ och $1 + \xi^2 \ge 1 + 0^2$

P **8.28** $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{e^\xi x^5}{120}$, där ξ ligger mellan 0 och x,
$\dfrac{1}{\sqrt{e}} = e^{-1/2} = 1 + (-\tfrac{1}{2}) + \dfrac{(-1/2)^2}{2} + \dfrac{(-1/2)^3}{6} + \dfrac{(-1/2)^4}{24} + \dfrac{e^\xi(-1/2)^5}{120}$, där $-\dfrac{1}{2} \le \xi \le 0$,
så $\dfrac{1}{\sqrt{e}} \approx \dfrac{233}{384}$ $(= 0{,}606\,7\ldots)$ med $|\text{felet}| \le \dfrac{e^0}{2^5\cdot 120} = \dfrac{1}{32\cdot 120} < 10^{-3}$ $(= 0{,}001)$

P **8.29** (a) $f(x) = 5 + \dfrac{5x}{2} - \dfrac{5x^2}{8(1+\xi)^{3/2}}$ för något $\xi = \xi(x)$ som ligger mellan 0 och x
(b) $\sqrt{26} = f(\tfrac{1}{25}) = \dfrac{51}{10} - \dfrac{1}{1000(1+\xi)^{3/2}}$, där $0 \le \xi \le \dfrac{1}{25}$, så $\sqrt{26} \approx \dfrac{51}{10}$
med $|\text{felet}| = \dfrac{1}{1000(1+\xi)^{3/2}} \le \dfrac{1}{1000\cdot 1^{3/2}} = \dfrac{1}{1000}$
(c) $\sqrt{24} = f(-\tfrac{1}{25}) = \dfrac{49}{10} - \dfrac{1}{1000(1+\xi)^{3/2}}$, där $-\dfrac{1}{25} \le \xi \le 0$, så $\sqrt{24} \approx \dfrac{49}{10}$
med $|\text{felet}| = \dfrac{1}{1000(1+\xi)^{3/2}} \le \dfrac{1}{1000(24/25)^{3/2}} = \dfrac{\sqrt{24}}{8\cdot 24^2} < \dfrac{5}{8\cdot 24^2} = \dfrac{5}{512\cdot 9} < \dfrac{1}{900}$

P **8.30** (a) $(1+t)^{-1/2} = 1 - \dfrac{t}{2} + \dfrac{3t^2}{8} - \dfrac{5(1+\xi)^{-7/2}\cdot t^3}{16}$ för något $\xi = \xi(t)$ mellan 0 och t

(b) $\pi \approx 6\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6\cdot 2^3}+\frac{3}{40\cdot 2^5}\right)=\frac{2009}{640}$ $(=3{,}139\ldots)$, med fel $= 6\cdot\frac{5}{16}\int_0^{1/2}\frac{x^6\,dx}{\big(1+\xi(x)\big)^{7/2}}$,
där $\xi(x)$ ligger mellan 0 och $-x^2$

(c) $|\text{felet}| \le \frac{15}{8}\cdot\frac{1}{\big(1-(1/2)^2\big)^{7/2}}\cdot\frac{(1/2)^7}{7}=\frac{5\sqrt{3}}{2^3\cdot 3^3\cdot 7}=\frac{5\sqrt{3}}{1512}<10^{-2}$ $(=0{,}01)$

P **8.31** (a) $\cos\frac{1}{10}\approx 1$ med fel $=-\frac{\cos\xi}{2!}\cdot(\frac{1}{10})^2$ för något ξ mellan 0 och $\frac{1}{10}$, så $|\text{felet}|\le\frac{1}{200}<\frac{1}{100}$

(b) $\cos 1\approx 1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}=\frac{13}{24}$ med $|\text{felet}|\le\frac{1^6}{6!}=\frac{1}{720}<\frac{1}{100}$

P **8.32** $p(x)=1-\frac{x^2}{2}$, fel $=\frac{\cos\xi}{4!}x^4$ för något ξ mellan 0 och x; $|\text{felet}|\le\frac{1}{4!}\cdot(1/2)^4=\frac{1}{16\cdot 24}<10^{-2}$

P **8.33** $1-x^2+\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^8}{24}$ $\left(\text{felet}(x)=-\frac{e^{\xi}x^{10}}{120}\text{, där } -x^2\le\xi\le 0\text{, så } |\text{felet}|\le\frac{e^0 1^{10}}{120}<10^{-2}\right)$

P **8.34** (a) $p_1(x)=3x$ (b) $3/4$

P **8.35** $\sqrt[5]{33}\approx 2+\frac{1}{80}=\frac{161}{80}$, med $|\text{felet}|=\frac{4}{25(1+\xi)^{9/5}}\cdot\frac{1}{2^{10}}\le\frac{4}{25\cdot 1^{9/5}}\cdot\frac{1}{2^{10}}<2^{-10}<10^{-3}$
(ξ mellan 0 och 1/32).

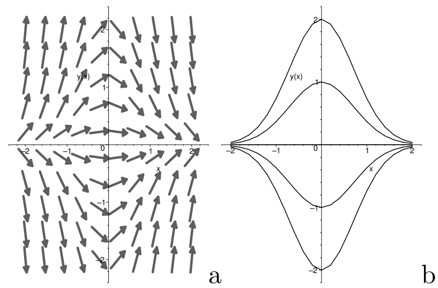
P **8.36** (b) $|\text{felet}|=\frac{3m_0c^2}{8(1+\xi)^{5/2}}\frac{v^4}{c^4}\le\frac{3m_0c^2}{80.000\,(99/100)^{5/2}}$ (ξ mellan 0 och $-v^2/c^2$).
Approximationen blir bra då $|v|$ är liten i förhållande till c

P **8.37** Varje bråktal $C\ge\frac{\cosh 1}{4!}$ duger, exempelvis $C=\frac{1}{12}$

P **8.38** $\ln 2=f(\frac{1}{3})\approx\frac{2}{1\cdot 3^1}+\frac{2}{3\cdot 3^3}+\frac{2}{5\cdot 3^5}+\frac{2}{7\cdot 3^7}+\frac{2}{9\cdot 3^9}$ $(=0{,}693\,14\ldots)$, med fel $\frac{f^{(11)}(\xi)}{11!}\cdot(\frac{1}{3})^{11}$
där $0\le\xi\le\frac{1}{3}$, så $|\text{felet}|=\frac{1}{11\cdot 3^{11}}\left(\frac{1}{(1+\xi)^{11}}+\frac{1}{(1-\xi)^{11}}\right)\le\frac{1}{11}\left(\frac{1}{3^{11}}+\frac{1}{2^{11}}\right)<10^{-4}$

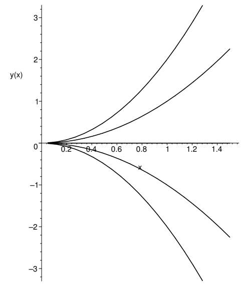
Differentialekvationer

P **9.1** (b) Integrerande faktor t.ex. $\exp(x^2)$,
allmän lösning $y=C\exp(-x^2)$
(c) $y=\exp(1-x^2)$


a b

P **9.2** (a) $y=Ce^{3x}-\frac{9x^2+6x+2}{27}$ (b) $y=\frac{1}{2}+C\exp(-x^2)$ (c) $y=\frac{1}{3}+C\exp(-x^3)$
(d) $y=1+\frac{C}{1+x^2}$ (e) $y=-\frac{\cos x}{x}+\frac{\sin x}{x^2}+\frac{C}{x^2}$ (f) $y=x^2+C\sqrt{x}$

P **9.3** (a) $y=x^2-\sqrt{x}$ (b) $y=x^2-32\sqrt{x}$ (c) $y=x^2-4\sqrt{x}$ (d) Lösning saknas



P 9.4 (a) Integrerande faktor $\frac{1}{x^2}$; allmän lösning $y = Cx^2$, $x > 0$

(b) $y = -\frac{3x^2}{4}$, $x > 0$

P 9.5 Allmän lösning $y = x \ln x - (x+1)\ln(x+1) + C(x+1)$; villkoret uppfylls med $C = 1$

P 9.6 $y = (Cx - 1 - \ln x)/(x+1)$

P 9.7 $y = \frac{x}{x+1}(x \sin x + \cos x + C)$; med $C = -1$ får man att $\frac{y}{x^3} \to \frac{1}{2}$ då $x \to 0+$

P 9.8 $y = 1 - \frac{\arctan x}{x}$, $x \neq 0$; gränsvärdet är 0

P 9.9 $y(x) = \frac{C + \sin x - (1/3)\sin^3 x}{\cos x}$; $C = 0$ ger den udda lösningen

P 9.10 (a) $y(x) = \frac{x^2}{2}\left(\ln \frac{x^2}{x^2+2x+5} - \arctan \frac{x+1}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$

(b) Använd differentialekvationen: Funktionen y/x^2 har positiv derivata (varför?)

P 9.11 (a) $T(40) = 30$ grader. $T(t) = 20 + 40 \exp\left(-t\frac{\ln 2}{20}\right)$, gränsvärdet $\lim_{t\to+\infty} T(t) = 20$ grader

(b) $T(t) = T_0 + \big(T(0) - T_0\big) \exp\left(\frac{t}{t_1} \ln \frac{T_1 - T_0}{T(0) - T_0}\right)$

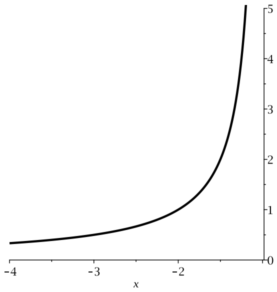
P 9.12 $y = x^2/4$

P 9.13 Den gemensamma punkten är $\left(a + \frac{1}{g(a)}, \frac{h(a)}{g(a)}\right)$

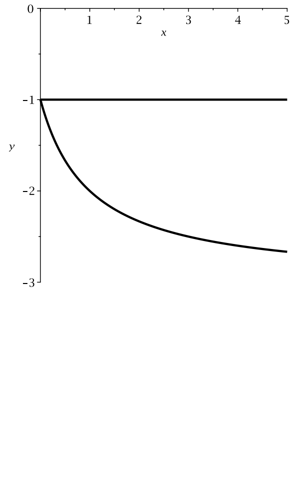
P 9.15 (a) $y = \frac{1}{x^4+1}$, $x \in \mathbb{R}$ (b) $y = \frac{1}{x^4}$, $x > 0$ (c) $y = \frac{1}{x^4 - 16}$, $|x| < 2$ (d) $y = 0$, $x \in \mathbb{R}$

P 9.16 (a) $y(x) = -\frac{x+2}{3x+2}$, $x < -\frac{2}{3}$ (b) $y(x) = -1$

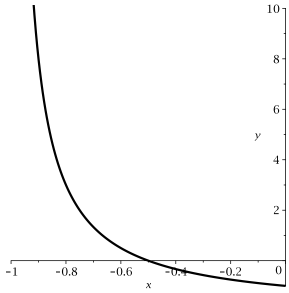
P 9.17 (a) $y = -\frac{1}{x+1}$, $x < -1$ (b) $y = -1$, $x > 0$ (c) $y = -\frac{3x+1}{x+1}$, $x > 0$ (d) $y = -\frac{2x+1}{x+1}$, $-1 < x < 0$



a

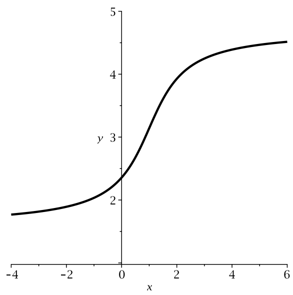


bc



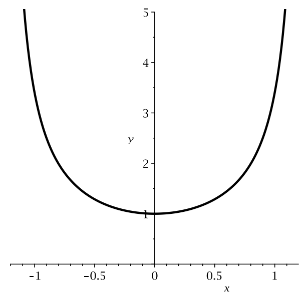
d

P **9.19** $y(x) = \arctan(x-1) + \pi, \quad x \in \mathbb{R}$



P **9.20** $y = \ln(2e^{-x} + 1)$.

P **9.21** $y(x) = \tan\left(\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{4}\right), \quad |x| < \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (\approx 1{,}25)$



P **9.22** $y(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{4(1+x^2)}{1-3x^2}, \quad |x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$

P **9.23** $y = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+8x^2}}$

P **9.24** Gränsvärdet existerar för $a = \sqrt{3}$ och är lika med $-1/2$ $\quad \big(y(x) = 2\sin(x^2 + \pi/6) - 1\big)$

P **9.25** $y(x) = \left(\frac{3 - e^{\arctan x}}{3 + e^{\arctan x}}\right)^2 - 2.$

P **9.26** (a) $xz' = z$, $x > 0$; $z = Cx$; $y = Cx^2$ $\qquad$ (b) $\arctan \frac{y}{x} + \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$

P **9.27** $y = \tan(x + \pi/4) - x, \quad -3\pi/4 < x < \pi/4$

P **9.28** $y = e^{2t} + Ce^{t/2} = x^2 + C\sqrt{x}$

P **9.29** (a) $y(x) = 3\,e^x$ $\qquad$ (b) $y(x) = 3\,e^{4-x}$ $\qquad$ (c) $y(x) = -1$ (konstant funktion)

P **9.30** $y(x) = (1+x^2)\arctan x$

P **9.32** (a) $f(x) = cx$, c konstant $\qquad$ (b) $f(x) = e^{cx}$, och $f(x) = 0$, c konstant

P **9.35** (b),(c) $y'(0)$ existerar inte annars

P **9.36** Ja!

P **9.37** (a) $y = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$, speciellt $A = 1$, $B = -1/2$
(b) $y = A\cos\big(x\sqrt{2}\big) + B\sin\big(x\sqrt{2}\big)$, speciellt $A = 1$, $B = -\sqrt{2}$

P **9.38** (a) $y = Ae^{3x}$ (b) $y = A + Be^{-2x}$ (c) $y = (A + Bx + Cx^2)e^{-x}$ (d) $y = A + Bx + Ce^x + De^{-x}$

P **9.39** $y = A\cos x + B\sin x + Ce^x + De^{-x}$ $\quad (= A\cos x + B\sin x + E\cosh x + F\sinh x)$

P **9.40** $y = Ae^{-x} + e^{x/2}\left(B\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + e^{-x/2}\left(D\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + E\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$
(den karakteristiska ekvationen är $r^6 - 1 = 0$, $r \neq 1$, en binomisk ekvation)

P **9.42** $y = -(3/2)e^{-x} + (11/54)e^{-3x} + (1/27)(9x^2 - 24x + 35)$

P **9.43** $y = Ae^{-4x} + (B + x/5)e^x - x + 1$

P **9.44** $y = e^{-x}(\cos x\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x\sqrt{2})$ har lokalt maximum i $y = 1$ (vad blir $y''(0)$?)

P **9.45** $y = x \ln x - x + 1$

P **9.46** $y = 2\cos(x\sqrt{2}) - (\sqrt{2}/2)\sin(x\sqrt{2}) + \sin x - \cos x$

P **9.47** $y = Ae^{-x} + B\cos x + C\sin x + x + x(\sin x - \cos x)/4$

P **9.48** $y = y_h + y_p$, där $y_h = A\cos x + B\sin x$ i samtliga deluppgifter och
(a) $y_p = -2\cos 2x + \sin 2x$ (b) $y_p = (x\sin x)/2$ (c) $y_p = -(x\cos x)/2$
(d) $y_p = (3x\cos x + 6x\sin x)/2$ (e) $y_p = (x^2\sin x + x\cos x)/4$ (f) $y_p = -(\sin 2x)/6$

P **9.49** (b) $y = e^{-x}(A\cos x + B\sin x) + x^2\ln x$ (c) $y = e^{-x}(A\cos x + B\sin x) + x^2\ln x - x - 1/2$

P **9.50** (a) $y'' + y' - 12y = 0$ (b) $y'' + y' - 12y = 13\cos x + \sin x$
(c) $y''' + y'' - y' - y = 4e^x$ (d) $y''' + 4y'' + 14y' + 20y = 9e^{-x}$

P **9.51** $y = (A - x/8)e^{-3x} - 1/15$

P **9.52** (a) $y = (x + 1)e^{-x} - \cos x$ (b) $y = C(x + 1)e^{-x} - \cos x$, $C > 1$ (jämför uppgift P 8.21)

P **9.53** (a) $y = xe^{-x} + \frac{3}{4}e^{-2x} + \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$ $\left(y = (A + x)e^{-x} + Be^{-2x} + \frac{x}{2} - \frac{3}{4},\ y(0) = 0 = y'(0)\right)$
(b) Lokalt minimum (ty $y''(0) = 1 > 0$; hur får man det enkelt ur differentialekvationen?)

P **9.54** $y = e^x(A + Bx + x^2/12) + e^{-x}/8 + Ce^{-2x}$

P **9.55** $C = 0$, $B = \frac{1}{8} - A$ och $A > \frac{13}{24}$ i lösningen till uppgift P 9.54.

P **9.56** $y = (1/4)\big((x + 1)e^{-x} + (x - 1)e^x\big)$

P **9.57** Ja, lösningen är $y = e^{2x}\left(\cos 2x - \sin 2x - \frac{x^2}{8}\cos 2x + \frac{x}{16}\sin 2x\right)$ (hur ser du på enklaste sätt att det är fråga om ett lokalt maximum?); största/minsta värde saknas

P **9.58** $y = 1 - e^{-x} + e^{-2x}(A\cos x + B\sin x - \cos 2x)$

P **9.59** (a) $vz'' + (2v' + av)z' = f$ (b) $y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}(A\cos x + B\sin x)$

P **9.61** x^4-termen, ty (1): $y = 1 - x^2/2 + x^4/12 + \mathcal{O}(x^6)$, (2): $y = 1 - x^2/2 + x^4/24 + \mathcal{O}(x^6)$

Serier och generaliserade integraler

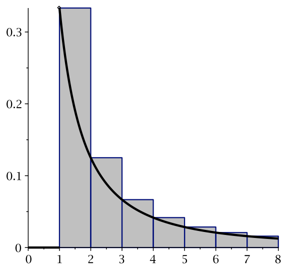
P **10.3** (a) Serien är divergent (annars vore $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty}\big((a_k+b_k)-a_k\big)$ konvergent, en motsägelse)
(b) Ingenting säkert; serien är konvergent om t.ex. $b_k = -a_k$, divergent om t.ex. $a_k = b_k$

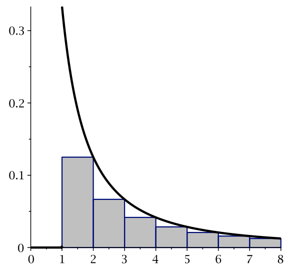
P **10.4** (a) $s_n = \sum_{k=2}^{n}\big(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\big) = \sqrt{n+1} - \sqrt{2}$ då $n \geq 2$, så $s_n \to \infty$ då $n \to \infty$
(b) Nej, ty termerna $= \sqrt{k+1} - \sqrt{k} = 1/\big(\sqrt{k+1} + \sqrt{k}\big) \to 0$ då $k \to \infty$

P **10.5** (b) $s \leq 5/6$ (c) redan $a_0 + a_1 > 5/8$ (d) $0 <$ felet $= \sum_{k=3}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=3}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^k = \frac{(1/5)^3}{1 - 1/5} = \frac{1}{100}$

P 10.6 (a) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3b}{b+2}$ respektive $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2(n+1)}-\dfrac{1}{2(n+2)}$

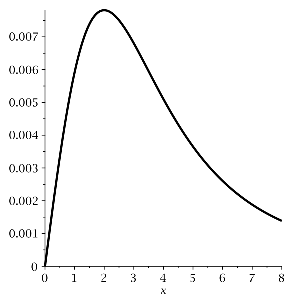
(b) $\dfrac{\ln 3}{2}$ respektive $\dfrac{3}{4}$

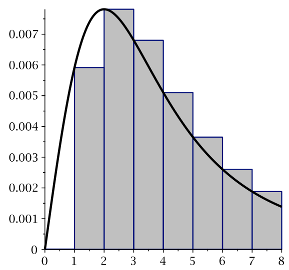
(c) 

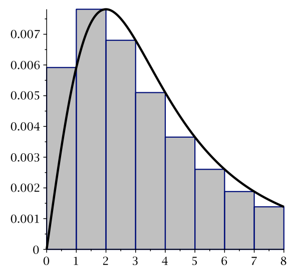
(d) 

(e) Nej, eftersom integralen är divergent

P 10.7







(a) f är avtagande på $[2,\infty[$ (b) $n=2$ (c) $m=3$

(d) $A_1=\dfrac{1}{169}+\dfrac{1}{32}$, $A_2=\dfrac{1}{169}+\dfrac{1}{128}+\dfrac{1}{32}$ ($a_1=\dfrac{1}{169}$, $a_2=\dfrac{1}{128}$, $\displaystyle\int_2^\infty f(x)\,dx=\frac{1}{32}$)

P 10.8 (a) T.ex. är $|a_k|\geq\dfrac{1}{\sqrt{k}}\geq 0$ då $k\geq 3$ och $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}$ är divergent, så $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty}|a_k|$ är också divergent.

(b) $n=9$ duger, ty $f(x)\to 0$ då $x\to\infty$ och $f'(x)=\dfrac{2-\ln x}{2x^{3/2}}<0$ då $x>e^2$, så f är avtagande mot noll åtminstone på $[9,\infty[$; således, $|a_k|=f(k)\searrow 0$ då $9\leq k\to\infty$.

P 10.10 (a) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh x$, och detta är alltså den enda funktionen som löser problemet

(b) $\cosh x$ $(R=\infty)$ (c) $\dfrac{\cosh x+\cos x}{2}$ resp. $\dfrac{1}{3}e^x+\dfrac{2}{3}e^{-x/2}\cos\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$ ($R=\infty$ för båda)