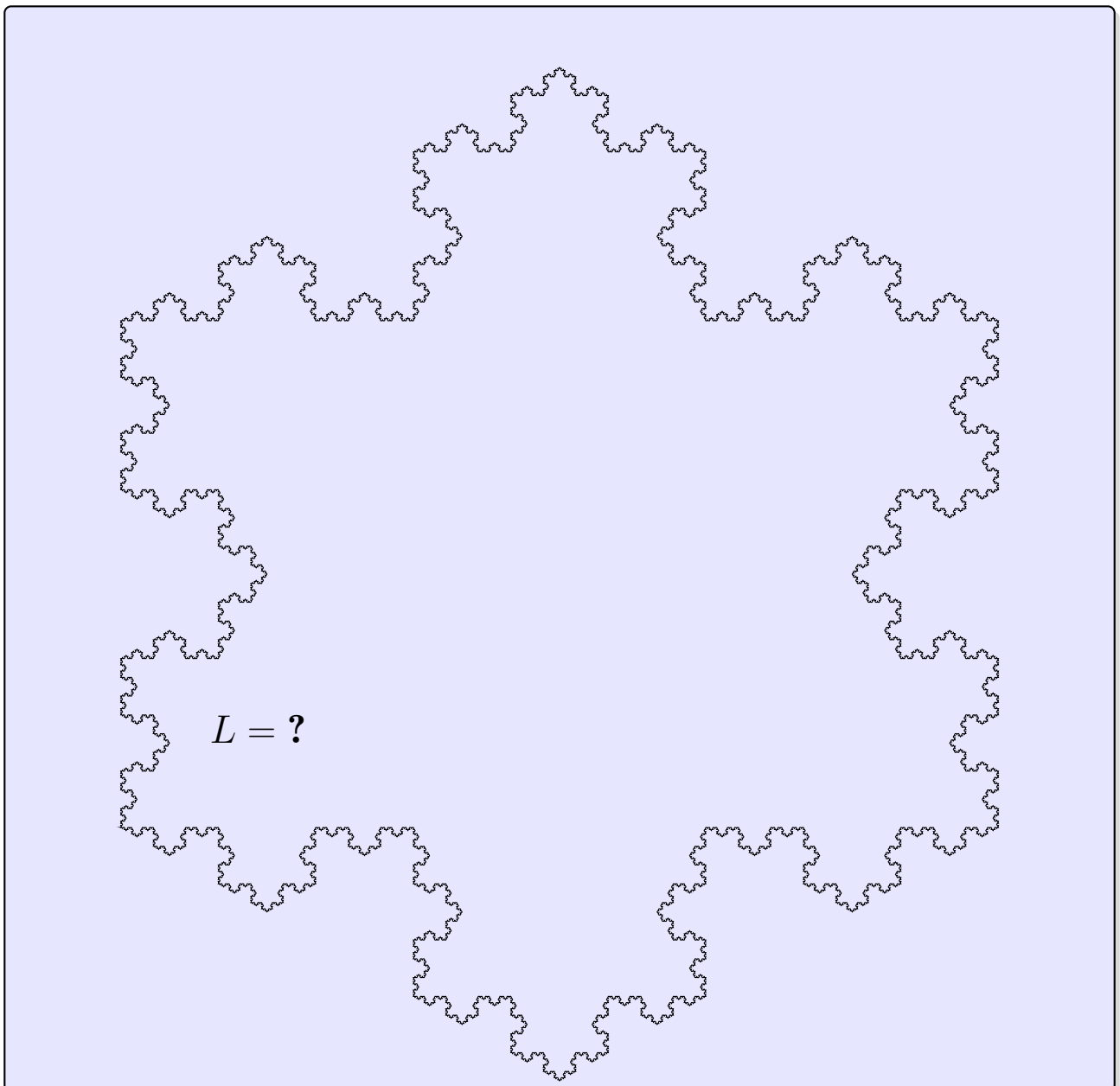


TATA42: Envariabelanalys 2 VT 2025

Föreläsningsanteckningar (D, KB, TB)

Johan Thim, MAI



Innehåll

1	Maclaurinutvecklingar	7
1.1	Introduktion	7
1.2	Expansion av snälla funktioner	7
1.3	Resttermen	9
1.4	Standardutvecklingar	14
1.5	Taylorutvecklingar	16
1.6	Tillämpningar	18
2	Tillämpningar av Maclaurinutvecklingar	19
2.1	Entydighet	19
2.2	Utvecklingar från derivatan	19
2.3	Utvecklingar via ansatser	21
2.4	Gränsvärden	21
2.5	Gränsvärden mot oändligheten	22
2.6	Asymptoter	22
2.7	Extrempunkter	23
3	Restterm på Lagranges form	25
3.1	Lagranges form för resttermen	25
3.2	Tillämpningar	26
3.2.1	Uppskattningar av funktionsvärden	28
3.2.2	Integralkalkyl	30
3.2.3	Konvergens?	31
4	Taylorutvecklingar – en återblick	33
4.1	Taylorpolynom	33
4.2	Resttermen	34
4.3	När använder vi de olika formerna?	35
4.3.1	Lokala egenskaper	35
4.3.2	Globala egenskaper	37
5	DE av ordning 1	39
5.1	Introduktion	39
5.2	Linjära DE av första ordningen	40
5.3	Separabla DE	42
5.4	Linjära DE av ordning 1 med komplexa koefficienter	46
5.5	Integralekvationer	47

6	Linjära DE av högre ordning	49
6.1	Partikulärlösningar	49
6.2	Differentialoperatorer	50
6.3	Generell Lösningsstruktur	51
6.4	Lösningar till homogena ekvationer	52
6.5	Lösningar till icke-homogena ekvationer	54
6.6	Allmänna lösningar	55
7	Linjära DE av högre ordning II	57
7.1	Olika typer av partikulärlösningar	57
7.1.1	Polynom	57
7.1.2	Exponentialfunktioner	58
7.1.3	Sinus och cosinus	59
7.1.4	Superposition	60
7.2	Förskjutningsregeln	61
7.3	Ekvationer med icke-konstanta koefficienter	65
7.4	Kontroll av lösningar	66
7.5	Generell struktur	67
7.6	Ansatser för partikulärlösningar	67
8	Differentialekvationer – en återblick	69
8.1	Differentialekvationer	69
8.2	Linjär ordning 1	69
8.3	Ickelinjär ordning 1	70
8.4	Linjär högre ordning	72
8.4.1	Konstanta koefficienter	72
8.4.2	Variabla koefficienter	74
8.5	Integralekvationer	75
9	Generaliserade integraler	77
9.1	Generaliserade integraler	77
9.2	Absolutkonvergens	80
9.3	Jämförelsesatser	82
9.4	Jämförelse på gränsvärdesform	85
9.5	Sammanfattning	89
10	Serier ("generaliserade summor")	91
10.1	Numeriska serier	91
10.2	Positiva serier	95
10.2.1	Första jämförelsesatsen	95
10.2.2	Cauchys integralkriterium	96
10.2.3	Jämförelsesats på gränsvärdesform	97
10.3	Absolutkonvergens	98
10.4	Alternerande serier	98
10.5	Divergenstest?	101

11 Potensserier	103
11.1 Konvergens av potensserier	103
11.2 Termvis derivering och integrering	107
11.3 Feluppskattning	108
11.3.1 Alternnerande serier	109
12 Tillämpningar av potensserier	111
12.1 Lösningar till DE på serieform	111
12.2 Maclaurinserier	116
12.3 Modifierade serieansatser	118
13 Oändlig summering – en återblick	121
13.1 Generaliserade integraler	121
13.1.1 Jämförelsesatser	121
13.2 Numeriska Serier	123
13.3 Potensserier	126
13.4 Uppskattningar	127
13.5 DE med potensserieansats	128
14 Kurvlängd, area och volym	131
14.1 Kurvlängd	131
14.2 Plan area	135
14.2.1 Area i polära koordinater	136
14.3 Volym	137
14.3.1 Rotationsvolym via skivor	137
14.3.2 Rotationsvolym via cylindrar	140
15 Rotationsarea och tyngdpunkter	143
15.1 Rotationsarea	143
15.1.1 Rotationsarea kring x -axeln	143
15.1.2 Rotationsarea för rotationer kring y -axeln	145
15.2 Tyngdpunkter	146
15.3 Repetition	148
15.4 Sammanfattande exempel för rotationsvolym	148
16 Inför tentan...	151
16.1 Maclaurin- och Taylorutvecklingar	151
16.1.1 Tillämpningar med rest på ordo-form	151
16.1.2 Restterm på Lagranges form	152
16.2 Generaliserade integraler	152
16.3 Serier	153
16.4 Potensserier	154
16.5 Differentialekvationer	155
16.5.1 Linjära ekvationer av ordning ett	155
16.5.2 Separabla ekvationer	155
16.5.3 Linjära DE av ordning två och högre med konstanta koefficienter	155
16.5.4 Ekvationer av Eulertyp	156
16.5.5 Integralekvationer	156
16.5.6 Analytiska lösningar (potensserier)	156

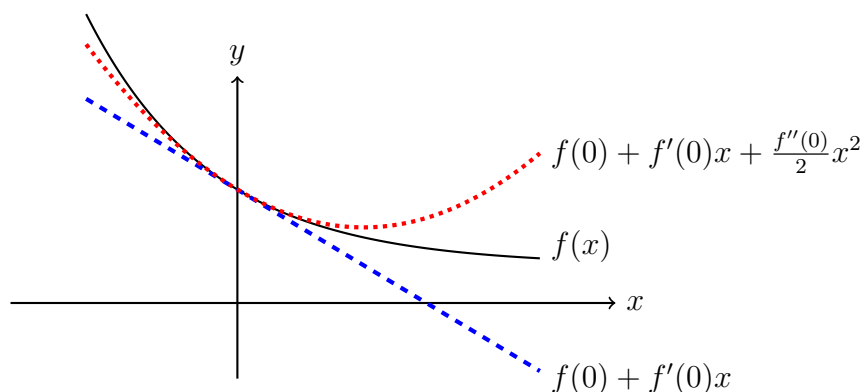
16.6	Längd, area och volym	157
A	Guldins regler	159
A.1	Pappos-Guldins regler	159
A.1.1	Rotationsvolym	159
A.1.2	Rotationsarea	160
A.1.3	Pappos-Guldin lokalt och baklänges	161
A.1.4	Tyngdpunkt för område definierat av en funktionsgraf	162
A.1.5	Lutande rotationsaxel	163
A.2	Rotationsvolym och rotationsarea i polära koordinater	164
A.2.1	Rotationsvolym	164
A.2.2	Rotationsarea	166
	Index	167

Kapitel 1

Maclaurinutvecklingar

1.1 Introduktion

Tänk er följande situation. En snäll funktion f är given, men vi skulle vilja approximera den på något sätt med ett uttryck av enklare slag (polynom) som åtminstone är giltigt nära en given punkt $x = a$. Vanliga metoder som vi redan känner till inkluderar att bara approximera f med en konstant $f(a)$ (f :s värde i $x = a$) eller kanske med hjälp av tangenten till f i $x = a$. Båda metoderna är vettiga, men om vi behöver en bättre approximation då? Konstanten är ett polynom av grad noll och tangenten ett polynom av grad 1. Hur hittar vi en approximation av godtycklig grad n ? Vi söker alltså ett polynom $p(x)$ som stämmer överens med f nära en punkt $x = a$. Låt oss illustrera vad vi menar.



Det verkar rimligt att välja koefficienterna i polynomet $p(x)$ så att $p(a) = f(a)$, $p'(a) = f'(a)$ och så vidare (att uttrycken har samma derivatorer upp till önskad ordning i $x = a$). Detta är också precis vad vi kommer att göra!

1.2 Expansion av snälla funktioner

Vi kan göra detta systematiskt när $x = 0$ med hjälp av en så kallad Maclaurinutveckling. Vi kommer hela tiden att kräva att funktioner är tillräckligt snälla (deriverbara) för vårt ändamål. I allmänhet kräver vi att f är kontinuerligt deriverbar $n + 1$ gånger om vi vill approximera med ett polynom av grad n . Vi skriver detta lite kortare som $f \in C^{n+1}$, underförstått att detta gäller nära origo. Vi kan utläsa detta som ” f tillhör klassen av $(n + 1)$ -gånge kontinuerligt deriverbara funktioner.” Detta betyder att funktionen f , första derivatan f' , andra derivatan f'' och så vidare till och med $f^{(n+1)}$ existerar och är kontinuerliga funktioner.



Maclaurinutveckling

Om $f \in C^{n+1}$ så gäller att

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r(x),$$

där *resten* $r(x)$ är liten nära noll. Polynomet

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

kallas för Maclaurinpolynomet för f av ordning n .

Observera att graden för p_n är högst n (det kan hända att termer försvinner på grund av att någon derivata är noll i origo).

Bevis. Vi utnyttjar upprepade partiell integration. Genom ett smart val av primitiv funktion, $\frac{d}{dt}(t-x) = 1$, erhåller vi att

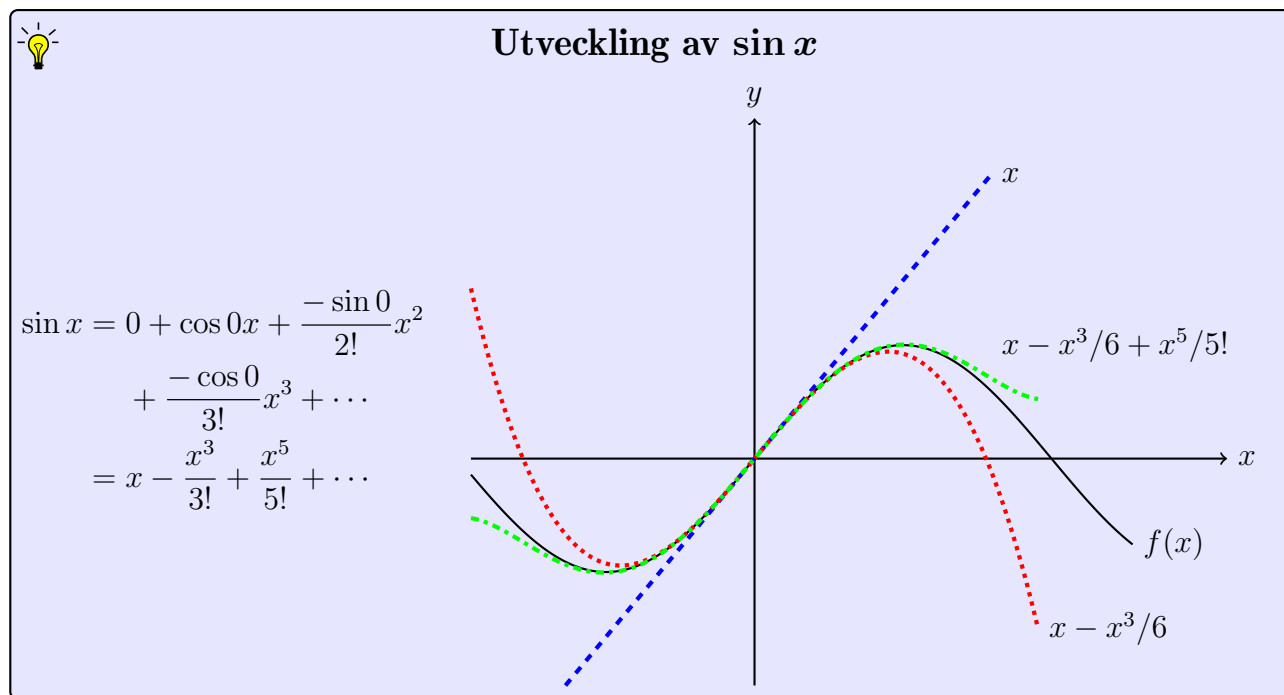
$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t) dt = f(0) + \int_0^x 1 \cdot f'(t) dt \\ &= f(0) + \left[(t-x)f'(t) \right]_0^x - \int_0^x (t-x)f''(t) dt = f(0) + xf'(0) - \int_0^x (t-x)f''(t) dt \\ &= f(0) + xf'(0) - \left[\frac{(t-x)^2}{2} f''(t) \right]_0^x + \int_0^x \frac{(t-x)^2}{2} f^{(3)}(t) dt \\ &= f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \int_0^x \frac{(t-x)^2}{2} f^{(3)}(t) dt \\ &= f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \left[\frac{(t-x)^3}{3!} f^{(3)}(t) \right]_0^x - \int_0^x \frac{(t-x)^3}{3!} f^{(4)}(t) dt \\ &= f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f^{(3)}(0) - \int_0^x \frac{(t-x)^3}{3!} f^{(4)}(t) dt \\ &= \cdots = p_n(x) + (-1)^n \int_0^x \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt. \end{aligned}$$

Här får vi "på köpet" en representation av resten $r(x)$, nämligen att

$$r(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Detta brukar kallas Lagranges restterm på integralform; vi återkommer till detta!

Det finns nu flera frågor. Vad menas med att resten är liten nära noll? Vad händer om vi är intresserade kring en punkt $x = a$ och $a \neq 0$? Innan vi svarar på dessa frågor, låt oss betrakta ett exempel.



Desto fler termer vi tar med (ju högre grad polynomet p_n har), desto bättre stämmer polynomet överens med funktionen nära noll. Precis som önskat. Resttermen är helt enkelt felet

$$r(x) = f(x) - p_n(x).$$

Tydligt är att detta fel beror på både x och gradtalet n (och självklart funktionen f).

1.3 Resttermen

Hur hanterar vi resttermen? Ett sätt är att jämföra med uttryck av typen x^n som vi vet hur de beter sig nära noll. På grund av konstruktionen måste r uppfylla att

$$r(0) = r'(0) = r''(0) = \dots = r^{(n)}(0) = 0$$

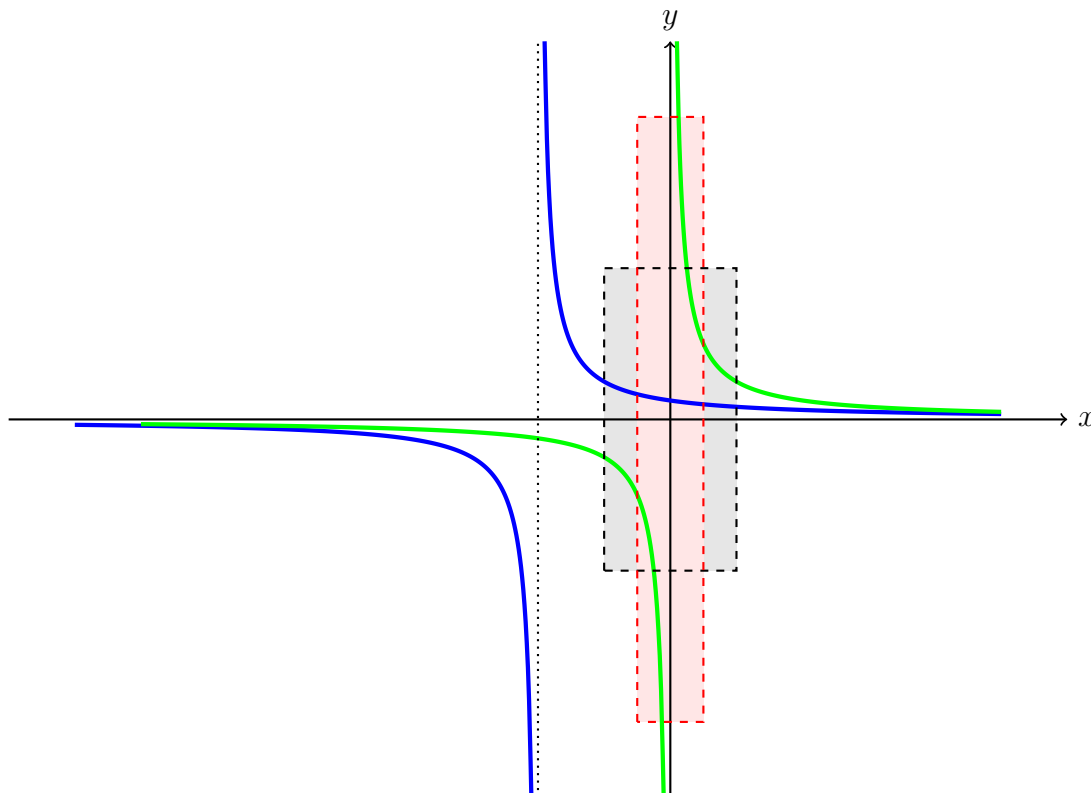
eftersom koefficienterna i $p_n(x)$ valts för just detta ändamål (visa detta!). Vidare följer det att $r^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$ (föresatt att $f^{(n+1)}$ är definierad) eftersom $p_n^{(n+1)}(x)$ blir identiskt lika med noll. Det finns flera följder av denna likhet, och en variant som gör det enkelt för oss att räkna är att uttrycka resttermen med hjälp av stora ordo.



Stora ordo

Definition. Vi säger att $f(x) = O(x^n)$ då x är nära noll om det finns en begränsad funktion $B(x)$ så att $f(x) = B(x)x^n$ för x nära noll.

En funktion begränsad nära noll är något som inte "exploderar" när vi befinner oss nära origo. Skissar man en graf ska man kunna rita in grafen i en rektangel. Till exempel $\frac{1}{x}$ är **inte** begränsad nära origo. Men $\frac{1}{x+1}$ är begränsad nära nollan (men **inte** nära -1). Man bör alltså precisera i vilket område man menar när man säger att något är begränsat.



I figuren kan man se att det går att stänga in $1/(x+1)$ nära origo (svart rektangel), men det är omöjligt att rita en rektangel som täcker $1/x$ oavsett hur liten sidlängd man väljer parallellt med x -axeln (röda försöket). En bra sak att komma ihåg är att alla funktioner som är kontinuerliga nära origo är begränsade nära origo. Däremot behöver så klart inte en begränsad funktion vara kontinuerlig.

Vi kommer att ägna oss en hel del åt så kallade ordo-kalkyler. Följande samband gäller.



Egenskaper för stora ordo

För x nära noll och $m, n \geq 0$ gäller:

- (i) $O(x^n) \pm O(x^m) = O(x^m)$ om $m \leq n$ ("lägst vinner");
- (ii) $O(x^n)O(x^m) = O(x^{m+n})$;
- (iii) Om $f(x) = O(x^n)$ och $m \leq n$ så är $f(x) = O(x^m)$ (vi kan *sänka* exponenten);
- (iv) $B(x)O(x^n) = O(x^n)$ om $B(x)$ är begränsad;
- (v) $O(x^m)^n = O(x^{mn})$ och $O((O(x^m))^n) = O(x^{mn})$;
- (vi) $O(x^n) \rightarrow 0$ då $x \rightarrow 0$ om $n > 0$.

Observera speciellt fallet (i) med $n = m$ och minus; vi har alltså

$$O(x^n) - O(x^n) = O(x^n).$$

Ordo-termer tar **aldrig** ut varandra eftersom det kan vara olika funktioner $B(x)$ i de olika uttrycken. Vi kan även ha negativa exponenter som till exempel $O\left(\frac{1}{x}\right)$, då ofta underförstått

att detta gäller när $x \rightarrow \infty$ istället för nära noll (annars är ordo-termen inte liten). Vi kan även tänka oss uttryck som $O(|x|^\alpha)$ för α som inte är heltal. Viss försiktighet krävs dock så att allt är definierat ($\alpha = 1/2$ ger en kvadratroten som inte är så pigg på negativa tal som bekant, därav beloppet i uttrycket ovan). Ett annat speciellt fall är $O(1)$. Detta är alltså endast en begränsad funktion. I normala fall kan vi inte göra så mycket med detta uttryck så om det dyker upp behöver vi antagligen göra något annorlunda.



Exempel

Till exempel så gäller

$$\frac{x^2 + x^4 + O(x^5)}{x + x^3 + O(x^3)} = \frac{x^2(1 + x^2 + O(x^3))}{x + O(x^3)} = \frac{x^2(1 + x^2 + O(x^3))}{x(1 + O(x^2))} = x \cdot \frac{1 + x^2 + O(x^3)}{1 + O(x^2)},$$

och då bråket är begränsat nära noll (varför?) så är alltså allt lika med $O(x)$.

Man kan även hamna i situationen att man har potenser av uttryck som innehåller ordo-termer. Systematiskt kan man gå till väga som i följande exempel.



Exempel

Låt $t = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)$. Då gäller att

$$t^2 = t \cdot t = \left(x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)\right) = x^2 - x^3 + O(x^4),$$

$$t^3 = t \cdot t^2 = \left(x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)\right) \cdot (x^2 - x^3 + O(x^4)) = x^3 + O(x^4),$$

$$t^4 = t \cdot t^3 = \left(x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)\right) \cdot (x^3 + O(x^4)) = O(x^4),$$

När man har vanan inne kanske man tar lite genvägar...



Exempel

Om $t = x + O(x^2)$, vad är $1 + t + O(t^3)$?

Lösning. Vi stoppar helt enkelt in vad t är och förenklar:

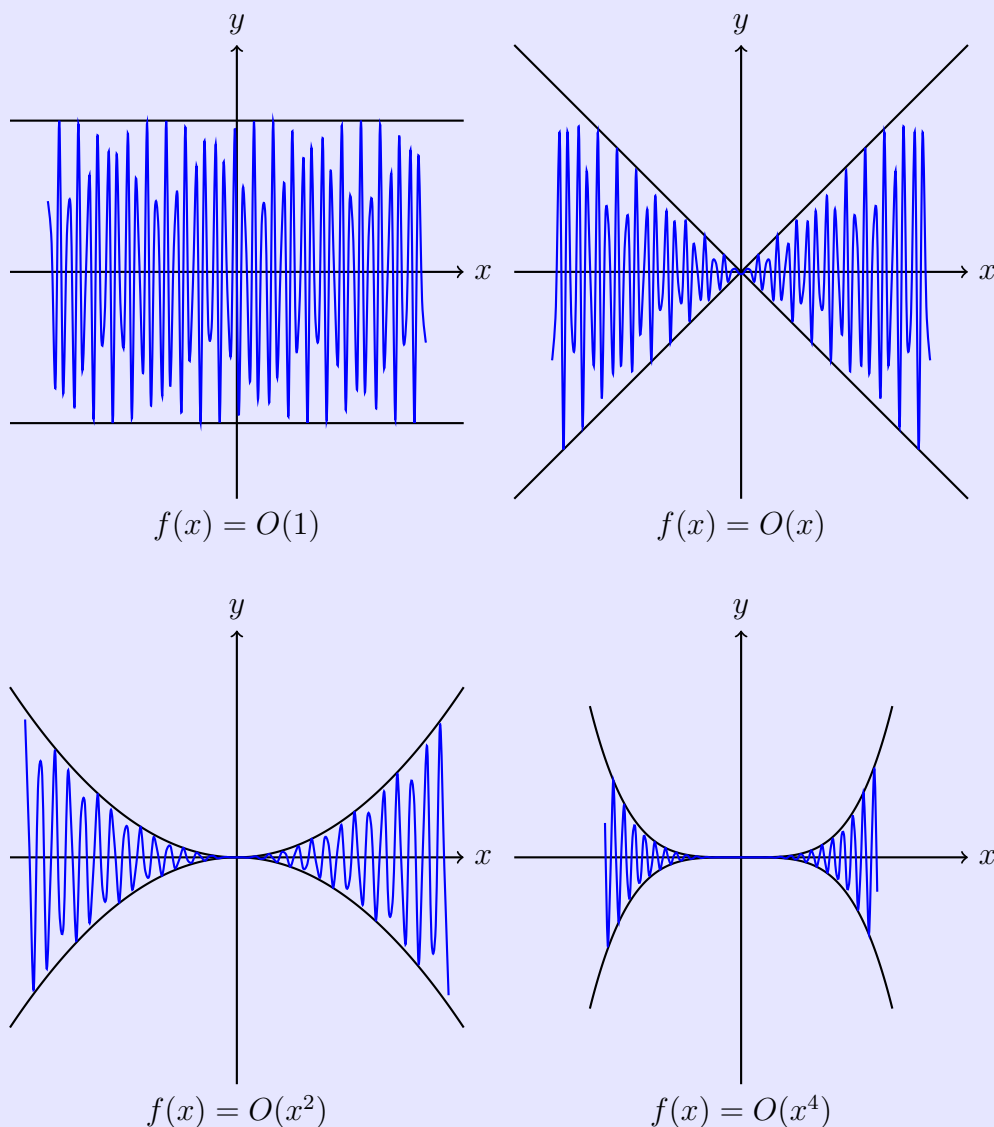
$$1 + t + O(t^3) = 1 + x + O(x^2) + O((x + O(x^2))^3) = 1 + x + O(x^2) + O(x^3) = 1 + x + O(x^2).$$

Här har vi undersökt $(x + O(x^2))^3$ och ser att den lägsta exponent som dyker upp är när termen $x \cdot x \cdot x$ dyker upp i produkten. Alltså måste detta uttryck vara $= O(x^3)$. Eftersom vi redan har en $O(x^2)$ -term så tillför detta inget och vi erhåller svaret ovan.



Vad innebär det att $f(x) = O(x^n)$?

Ofta handlar det om att beskriva hur snabbt en funktion $f(x)$ går mot noll (eller kvalitativt hur liten den är nära noll). Man kan då tänka sig att uttrycket i ordo-termen ger en gräns för hur stor $f(x)$ kan vara och mer eller mindre ”trycker ihop” grafen för $f(x)$ på ett visst sätt nära origo. Betrakta följande exempel (där $f(x)$ är den blåa kurvan).



Om f är tillräckligt snäll (i meningen deriverbar) kan man visa att följande samband gäller.



Om $f \in C^{n+1}$ nära origo så är $f(x) = p_n(x) + O(x^{n+1})$, där $p_n(x)$ är Maclaurinpolynomet av ordning n .

Bevis. Om vi erinrar oss Lagranges restterm på integralform kan vi skriva

$$f(x) = p_n(x) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Då måste

$$\begin{aligned} |r(x)| &= \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right| \leq \int_0^{|x|} \frac{|x-t|^n}{n!} |f^{(n+1)}(t)| dt \\ &\leq \frac{|x|^n}{n!} \max_{|t| \leq |x|} |f^{(n+1)}(t)| \int_0^{|x|} dt = B(x) |x|^{n+1}. \end{aligned}$$

Här är

$$B(x) = \frac{1}{n!} \max_{|t| \leq |x|} |f^{(n+1)}(t)|$$

begränsad på, tex, $-1 \leq x \leq 1$, eftersom $f^{(n+1)}(t)$ är en kontinuerlig funktion. Således måste $r(x) = O(x^{n+1})$.



Exempel

Maclaurinpolynomet av ordning n för $f(x) = e^x$ kan fås enkelt eftersom $f^{(n)}(x) = e^x$ för alla n , så $f^{(n)}(0) = 1$ och

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1}).$$



Exempel

Vi utvecklar $f(x) = \cos x$. Då är $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f^{(3)}(x) = \sin x$ och $f^{(4)}(x) = \cos x$. Sen börjar vi om med $-\sin x$ igen. Enligt formeln för Maclaurinutveckling erhåller vi nu

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6).$$

Polynomet $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$ är Maclaurinpolynomet av både ordning 4 och 5 samtidigt eftersom $f^{(5)}(0) = 0$ så x^5 -termen saknas. Även om polynomet har grad 4 (inte 5). När man vet om situationer som denna är det lämpligt att skriva $O(x^6)$ eftersom detta är mer precist. Vet man däremot inte om att x^5 -termen saknas måste man skriva $O(x^5)$.

Alla dessa ordo-termer ställer till lite bekymmer ibland (speciellt när man läser facit). Precis som ovan kan flera alternativ vara sanna men det betyder så klart inte att de är lika "bra". Ett annat exempel är $\sin x = x - x^3/6 + O(x^4)$ och $\sin x = x - x^3/6 + O(x^5)$? Båda är korrekta. Vilken skulle du välja? Det är den sista man brukar finna i tabeller, men vi alltid kan sänka exponenten i ordo-termen ty

$$O(x^5) = B_1(x)x^5 = xB_1(x)x^4 = O(x^4)$$

där $O(x^4) = B_2(x)x^4$ med $B_2(x) = xB_1(x)$. Vi flyttar alltså ett av x :en till den begränsade termen (vilket är ok då x är begränsad nära noll). Vi tappar alltså lite information men likheten är fortfarande sann. Vi kan skriva $O(x^3)$ också, men då försvinner x^3 -termen in i ordo-termen. Slutsatsen blir att välja så hög exponent som möjligt. Den uppmärksamma läsaren har nu märkt något ganska underhållande: sekvensen av likheter kan endast läsas från vänster till höger! Var således lite försiktiga. Lösningen på det formella problemet är att använda andra beteckningar istället för likhet, alternativt skriva ut de begränsade funktionerna hela tiden.



Se upp med ordo-kalkylen!

Ett varningens ord inför tentan: slarva inte med ordo-termerna! Uppgifter med principfel i ordo-hantering brukar rendera noll poäng. Påstå inte att ett uttryck är mer precist än det är genom att svara med för hög ordo-term (typiska fel i stil med att påstå att vänsterled och högerled är samma i

$$(x + x^3 + O(x^5))^2 \neq x^2 + 2x^4 + O(x^{10})$$

där bästa korrekta ordo-termen i vänsterledet är $O(x^6)$) och att inte använda termer som är meningslösa på grund av närvaron av en ordo-term (tex $7x^3 + O(x^3)$).

1.4 Standardutvecklingar

Låt oss samla några vanliga utvecklingar som med fördel kan memoreras för att snabbt kunna användas. Samtliga kan härledas direkt från formeln för Maclaurinutvecklingar även om några stycken kan göras lite enklare med vissa trick (vi undersöker ett par närmare på nästa föreläsning).



Vanliga funktioner

$$(i) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + O(x^n)$$

$$(ii) \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + O(x^{n+1})$$

$$(iii) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots \pm \frac{x^{2k}}{(2k)!} + O(x^{2k+2})$$

$$(iv) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \pm \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + O(x^{2k+1})$$

$$(v) \quad \tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + O(x^{11})$$

$$(vi) \quad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + O(x^{n+1})$$

$$(vii) \quad \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + O(x^{2n+1})$$

Utvecklingen av $\tan x$ kanske bör kommenteras. Koefficienterna som trillar ut följer ett mönster av s.k. Bernoullital, men detta ligger lite utanför kursen. Enklarest kanske är att härleda de termer man behöver för situationen om inte tabellen finns tillgänglig eller memorerad.

**Exempel**

Visa att $(1+x)^\alpha$ har utvecklingen enligt tabellen ovan.

Lösning. Vi ska med andra ord härleda utvecklingen för $f(x) = (1+x)^\alpha$ när α är konstant (viktigt!). Så, om $\alpha \neq 1$ (vad händer om $\alpha = 1$?),

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1}, & f''(x) &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, & f^{(3)}(x) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}, \\ f^{(4)}(x) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(1+x)^{\alpha-4}, \dots, \end{aligned}$$

vilket ger att

$$\begin{aligned} f(0) &= 1, & f'(0) &= \alpha, & f''(0) &= \alpha(\alpha-1), & f^{(3)}(0) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2), \\ f^{(4)}(0) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3), \dots \end{aligned}$$

Enligt Maclaurins formel blir således

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \dots \\ &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}x^4 + \dots \end{aligned}$$

Egentligen kanske man borde visa att mönstret verkligen blir enligt ovan för godtyckligt k , men jag tycker det är ganska tydligt från härledningen.

**Exempel**

Hitta en utveckling för $\sqrt{1+3x^3}$ med resttermen $O(x^9)$.

Lösning. Vi låter $t = 3x^3$ och ser att

$$\begin{aligned} \sqrt{1+t} &= (1+t)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} - 1)}{2}t^2 + O(t^3) \\ &= 1 + \frac{3x^3}{2} - \frac{(3x^3)^2}{8} + O((3x^3)^3) = 1 + \frac{3x^3}{2} - \frac{9x^6}{8} + O(x^9). \end{aligned}$$

Detta är ett typiskt sätt att använda standardutvecklingarna på. Märk att vi i nuläget inte kan vara helt säkra på att polynomet faktiskt är Maclaurinpolynomet, men vi återkommer till detta på nästa föreläsning.

Ett krångligare exempel? Visst, man kan göra saker hur bökiga som helst!

**Exempel**

Finn en utveckling för $\cos(\sin x)$ av ordning 5.

Lösning. Låt $t = \sin x$. Då är $t = x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)$, t är nära noll när x är nära noll (**viktigt!**), och

$$\begin{aligned}\cos t &= 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + O(t^6) = 1 - \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5) \right)^2 + \frac{1}{4!} (x + O(x^3))^4 + O(t^6) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3!} + O(x^6) + \frac{x^4}{4!} + O(x^6) + O((x + O(x^3))^6) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{4!} + O(x^6).\end{aligned}$$

Vad händer om vi betraktar $\sin(\cos x)$ istället? Undersök saken och var försiktig med ordotermen!

1.5 Taylorutvecklingar

Vi har nämnt problemet tidigare: vad händer om vi vill approximera f kring en punkt $x = a$ istället där $a \neq 0$? Vi kommer åt detta problem genom att betrakta $g(t) = f(t + a)$, så vi låter alltså $t = x - a$. Genom en Maclaurinutveckling av g erhåller vi då följande:

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{g''(0)}{2}t^2 + \cdots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!}t^n + O(t^{n+1})$$

Här är $g(0) = f(a)$, $g'(0) = f'(a)$, och så vidare, och vi kan formulera uttrycket i variabeln x i stället. Vi summerar resultatet i följande sats.



Taylorutveckling

Om f är en $(n + 1)$ -gångs kontinuerligt deriverbar funktion nära $x = a$ så är

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + O((x - a)^{n+1}).$$

Observera här att termen $O((x - a)^{n+1})$ är liten när x är nära a i stället för när x är nära noll. Detta är viktigt! Konstruktionen med $g(t) = f(t + a)$ gör att vi i princip alltid kan anta att $a = 0$ när vi bevisar satser. Med andra ord gäller motsvarande satser för Taylorutvecklingar som gäller för Maclaurinutvecklingar.



Exempel

Finn Taylorutvecklingen för $\arctan\left(\frac{x}{2}\right)$ kring $x = 3$ av ordning 2 med restterm på ordo-form.

Lösning. Låt $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{2}\right)$. Då är

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + (x/2)^2} = \frac{1}{2 + x^2/2} \quad \text{och} \quad f''(x) = -\frac{x}{4(1 + x^2/4)^2}.$$

Vi söker utvecklingen kring $x = 3$, så $a = 3$ i satsen ovan. Således erhåller vi att

$$f(3) = \arctan\left(\frac{3}{2}\right), \quad f'(3) = \frac{1}{2 + 9/2} = \frac{2}{13}, \quad \text{sam} \text{t} \quad f''(3) = -\frac{3}{4(1 + 3^2/4)^2} = -\frac{12}{169}.$$

Enligt satsen ovan ser vi att

$$\arctan\left(\frac{x}{2}\right) = \arctan\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{2}{13}(x - 3) - \frac{6}{169}(x - 3)^2 + O((x - 3)^3).$$

Självklart kan man i princip alltid likt vid härledning av Maclaurinutvecklingar använda satsen ovan direkt (derivera och räkna ut $f(a)$, $f'(a)$ och så vidare, precis som i exemplet ovan) men ofta kan vi rädda situationen med en känd Maclaurinutveckling. Hur? Vi betraktar ett par exempel för att illustrera.



Exempel

Maclaurinutveckla polynomet $x^4 + 2x^2 - 3x + 4$ till ordning 2. Utveckla även polynomet $x^4 + 2x^2 - 3x + 4$ kring $x = 1$ med ordning 2.

Lösning. Maclaurinpolynomet av ordning 2 ges av $2x^2 - 3x + 4$ och utvecklingen kan skrivas

$$x^4 + 2x^2 - 3x + 4 = 2x^2 - 3x + 4 + O(x^3).$$

Nu råkar x^3 -termen saknas så vi skulle lika gärna (bättre) kunna skriva $O(x^4)$. Vad händer när vi söker en Taylorutveckling kring $x = 1$? Enklast är ofta att låta $t + 1 = x$ eftersom vi då har x nära ett när t nära noll. Alltså,

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^2 - 3x + 4 &= (t + 1)^4 + 2(t + 1)^2 - 3(t + 1) + 4 \\ &= 1 + 4t + 6t^2 + 4t^3 + t^4 + 2(t^2 + 2t + 1) - 3(t + 1) + 4 \\ &= 4 + 5t + 8t^2 + O(t^3) = 4 + 5(x - 1) + 8(x - 1)^2 + O((x - 1)^3). \end{aligned}$$

Här kan vi **inte** skriva $O((x - 1)^4)$ eftersom det finns en t^3 -term. Det kan alltså bli skillnad beroende på vilken punkt vi arbetar i (inte så förvånande om vi tänker efter).



Exempel

Taylorutveckla $1 + \sin(x)$ kring $x = \frac{\pi}{2}$.

Vi låter $x = t + \frac{\pi}{2}$. Om x är nära $\frac{\pi}{2}$ så är t nära 0. Vi Maclaurinutvecklar då

$$g(t) = f\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = 1 + \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = 1 + \cos t = 2 - \frac{t^2}{2} + O(t^4) = 2 - \frac{(x - \pi/2)^2}{2} + O((x - \pi/2)^4),$$

där vi använt den kända trigonometriska formeln $\sin(t + \pi/2) = \cos t$, $t \in \mathbf{R}$.

1.6 Tillämpningar

En vanlig tillämpning för Maclaurinutvecklingar är beräkning av gränsvärden.



Exempel

Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.

Vi löser detta genom att Maclaurinutveckla $\sin x$ (se tidigare exempel):

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{x - (x^3/6) + O(x^5)}{x} = 1 + O(x^2) \rightarrow 1, \text{ då } x \rightarrow 0.$$

Vi kan alltså Maclaurinutveckla uttryck istället för att memorera standardgränsvärden!
Nästa föreläsning kommer att innehålla massvis med fler tillämpningar!

Kapitel 2

Tillämpningar av Maclaurinutvecklingar

2.1 Entydighet

Om vi har ett polynom som approximerar en snäll funktion bra, kan vi då vara säkra på att koefficienterna i polynomet är Maclaurinkoefficienterna? Faktum är att vi faktiskt kan det! Det finns med andra ord bara ett Maclaurinpolynom av en given ordning.



Entydighet

Om f är $(n+1)$ -gånge kontinuerligt deriverbar, dvs $f \in C^{n+1}$, och

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + O(x^{n+1})$$

så är $a_0 = f(0)$ och $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ för $k = 1, 2, \dots, n$.

Bevisskiss: Maclaurinutvecklingen finns, så vi måste ha likheten

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + O(x^{n+1}) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + O(x^{n+1}).$$

Med $x = 0$ får vi $a_0 = f(0)$. Sen är det lockande att derivera för att bestämma a_1 , men ordotermen är obehaglig då den inte behöver vara deriverbar. Men om vi utnyttjar att $a_0 = f(0)$ kan vi förkorta bort ett x överallt (även i ordotermen):

$$a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^{n-1} + O(x^n) = f'(0) + \frac{f''(0)}{2!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n-1} + O(x^n).$$

Alltså är $a_1 = f'(0)$ och så vidare. Vi landar till slut i att

$$a_n + O(x) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + O(x),$$

där vi kan låta $x \rightarrow 0$.

2.2 Utvecklingar från derivatan

Om man vet en utveckling för derivatan $f'(x)$ kan man direkt hitta utvecklingen för $f(x)$ genom att betrakta integralkalkylens huvudsats: $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$.

**Exempel**

Härled Maclaurinutvecklingen för $\ln(1+x)$.

Lösning. Låt $f(x) = \ln(1+x)$. Som bekant ges derivatan av $f'(x) = \frac{1}{1+x}$. Vi kan utveckla denna som $(1+x)^{-1}$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + r(x).$$

Vi stannar på $n-1$ av en anledning. Eftersom $f(0) = \ln 1 = 0$ så är

$$\ln(1+x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \int_0^x r(t) dt.$$

Resttermen då? I detta fall så ser vi att Maclaurinpolynomet är en geometrisk summa, så

$$r(x) = \frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k = \frac{1}{1+x} - \frac{1 - (-x)^n}{1 - (-x)} = \frac{(-1)^n x^n}{1+x}.$$

Alltså blir (för $x > 0$) $|r(x)| \leq x^n$. Vi kan nu uppskatta integralen av feltermen. Om $x \geq 0$ gäller att

$$\left| \int_0^x r(t) dt \right| \leq \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} = O(x^{n+1})$$

eftersom $1+x \geq 1$. När $x < 0$ måste vi minst kräva att $-1 < x < 0$ (varför?). Men vi kan göra det enklare för oss och helt enkelt anta att $|x| \leq 1/2$. Då är $1+x \geq 1/2$ och $\frac{1}{1+x} \leq 2$. Liknande kalkyl som ovan ger oss $O(x^{n+1})$. Detta krävde ganska precis kunskap om resttermen, men det går att göra liknande argument även när vi inte har så enkla fall. Vi återkommer till detta i nästa föreläsning. Det finns även en sats i boken som implicerar resultatet ovan. Detta resultat är generellt användbart så låt oss formulera satsen.



Om $f \in C^1$ nära noll samt $f'(x) = O(x^p)$ för något heltal $p \geq 0$, så är $f(x) = O(x^{p+1})$ såvida $f(0) = 0$.

Observera här att vi absolut **inte** påstår att man kan derivata ordo-termen. Som formuleringen lyder så vet vi *a priori* att f' existerar.

Så i exemplet ovan ser vi att

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \int_0^x r(t) dt,$$

där $r(t) = O(t^n)$. Om vi låter

$$R(x) = \int_0^x r(t) dt,$$

så gäller — eftersom $r(t)$ är kontinuerlig — att

$$R'(x) = r(x) = O(x^n)$$

och enligt satsen ovan kommer då $R(x) = O(x^{n+1})$ ty $R(0) = 0$. Undvik att skriva ordo-termer inne i integraler då det finns flera problem med detta, behåll istället r .

2.3 Utvecklingar via ansatser

Om man studerar utvecklingarna för $\sin x$ och $\cos x$ ser man att den udda funktionen $\sin$ endast har udda exponenter och att den jämna funktionen $\cos$ endast har jämna exponenter. Detta gäller generellt för udda respektive jämna funktioner.



Exempel

Använd utvecklingen för $\sin x$ för att finna Maclaurinpolynomet av ordning 4 för $\arcsin x$.

Lösning. Vi vet att $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$, så $\arcsin$ är udda. Det innebär alltså att $\arcsin x = a_1x + a_3x^3 + O(x^5)$. Vi söker a_1 och a_3 . Nu vet vi att $\sin \arcsin x = x$ för $-1 \leq x \leq 1$ och eftersom $\sin x = x - x^3/6 + O(x^5)$ måste då

$$a_1x + a_3x^3 + O(x^5) - \frac{(a_1x + a_3x^3 + O(x^5))^3}{6} + O((a_1x + a_3x^3 + O(x^5))^5) = x.$$

Vänsterledet kan vi skriva om som

$$a_1x + \left(a_3 - \frac{a_1^3}{6}\right)x^3 + O(x^5)$$

och för att detta ska vara lika med högerledet x måste alltså $a_1 = 1$ och $a_3 - a_1^3/6 = 0$. Med andra ord erhåller vi att

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + O(x^5).$$

Kontrollera detta genom att derivera $f(x) = \arcsin x$ direkt!

2.4 Gränsvärden

En vanlig tillämpning för Maclaurinutvecklingar är beräkning av gränsvärden.



Exempel

Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1+x^2}}{x^2}$.

Vi löser detta genom att Maclaurinutveckla $\cos x$ och $\sqrt{1+x^2}$:

$$\begin{aligned} \frac{\cos x - \sqrt{1+x^2}}{x^2} &= \frac{1 - x^2/2 + O(x^4) - (1 + x^2/2 + O(x^4))}{x^2} \\ &= \frac{x^2(-1 + O(x^2))}{x^2} = -1 + O(x^2) \rightarrow -1, \text{ då } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Vi kan alltså Maclaurinutveckla uttryck istället för att memorera massvis med standardgränsvärden! Ofta är det också någon slags cancellation inblandad. Utvecklingar kan vara ett bra sätt att plocka bort beteende som är likadant i summor.

**Exempel**

Finn gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{\ln(1 + x^3)}$.

Vi löser problemet analogt med föregående kalkyl:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{\ln(1 + x^3)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{2} - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + O(x^5)}{x^3 + O(x^6)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3}x^3 + O(x^5)}{x^3 + O(x^6)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3} + O(x^2)}{1 + O(x^3)} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

2.5 Gränsvärden mot oändligheten

Vi behöver i fallet när vi söker ett gränsvärde mot oändligheten införa en ny variabel som går mot noll då $x \rightarrow \infty$. Den vanligaste tekniken vi använder är att bryta ut det som dominerar ur varje term och då få saker kvar som går mot noll. Dessa saker brukar ge lämplig ny variabel.

**Exempel**

Räkna ut gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[4]{x^2 + x^4} - \sqrt{1 + x + x^2} \right)$.

Lösning. Vi försöker bryta ut det som dominerar i varje term. I den första är det x^4 -termen och i den andra x^2 -termen. Således har vi

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{x^2 + x^4} - \sqrt{1 + x + x^2} &= |x| \left(\sqrt[4]{\frac{1}{x^2} + 1} - \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} \right) \\ &= |x| \left(1 + \frac{1}{4x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) + O\left(\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right)^2 \right) \right) \right) \\ &= -\frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow -\frac{1}{2}, \text{ då } x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Här har vi använt $t = \frac{1}{x^2}$ och $s = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$ som nya variabler.

2.6 Asymptoter

**Exempel**

Visa att $\sqrt{1 - 2x + 4x^2}$ har en asymptot då $x \rightarrow \infty$.

Lösning. Vi visar detta genom att finna asymptoten (om den finns). Mot oändligheten är det x^2 -termen som dominerar i kvadratroten, så vi börjar med att bryta ut denna

$$\sqrt{1 - 2x + 4x^2} = 2|x| \sqrt{\frac{1}{4x^2} - \frac{1}{2x} + 1}.$$

Eftersom $x \rightarrow \infty$ kan vi anta att $|x| = x$. Låt nu $t = \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{2x}$. Då gäller att $t \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \infty$. Eftersom

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t + O(t^2)$$

ser vi nu att

$$\sqrt{1 - 2x + 4x^2} = 2x \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4x^2} - \frac{1}{2x} \right) + O \left(\left(\frac{1}{4x^2} - \frac{1}{2x} \right)^2 \right) \right) = 2x - \frac{1}{2} + O \left(\frac{1}{x} \right).$$

Observera här att

$$O \left(\left(\frac{1}{4x^2} - \frac{1}{2x} \right)^2 \right) = O \left(\frac{1}{16x^4} - \frac{2}{8x^3} + \frac{1}{4x^2} \right) = O \left(\frac{1}{x^2} \right)$$

så termer innehållande x^{-2} försvinner in i denna. Vi har nu visat att det finns en asymptot $2x - 1/2$ då $x \rightarrow \infty$ eftersom $O(1/x) \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \infty$.

2.7 Extrempunkter

En Maclaurinutveckling beskriver hur en funktion beter sig lokalt nära origo. Alltså borde denna information kunna användas för att undersöka om det finns ett lokalt max eller min i origo. Självlklart borde samma sak kunna göras i andra punkter genom att använda lämplig Taylorutveckling i stället. Vi betraktar ett par exempel.



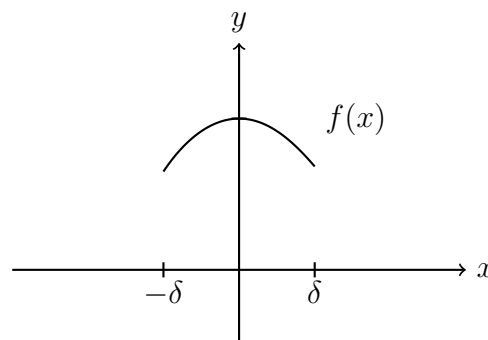
Exempel

Avgör om $\frac{\sin x}{x}$ har en lokal extrempunkt i origo och avgör om så är fallet vilken karaktär punkten har.

Lösning. Vi Maclaurinutvecklar $\sin x$ och finner då att

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + O(x^4) = 1 - x^2 \left(\frac{1}{6} + O(x^2) \right).$$

När x är nära 0 ser vi att uttrycket i parenteserna är $\approx \frac{1}{6}$. Funktionsvärdet i $x = 0$ är 1 och om vi flyttar oss lite från $x = 0$ så är funktionsvärdet strikt mindre än ett. Detta är definitionen av ett lokalt maximum! Mer precist innebär likheten ovan att det finns ett $\delta > 0$ så att $\frac{\sin x}{x} - 1 < 0$ för $0 < |x| < \delta$, se figuren till höger.



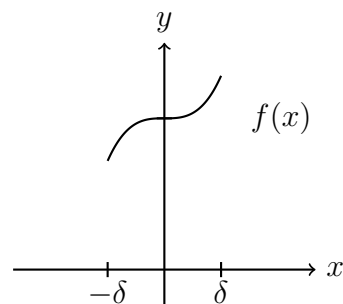
**Exempel**

Avgör om $2 + x \exp(x^2) - \tan x$ har en lokal extrempunkt i origo och avgör om så är fallet vilken karaktär punkten har.

Lösning. Vi utvecklar uttrycket:

$$\begin{aligned} 2 + x \exp(x^2) - \tan x &= 2 + x(1 + x^2 + O(x^4)) - \left(x + \frac{x^3}{3} + O(x^5)\right) \\ &= 2 + x^3 - \frac{x^3}{3} + O(x^5) \\ &= 2 + x^3 \left(\frac{2}{3} + O(x^2)\right). \end{aligned}$$

Här ser vi att uttrycket är större än 2 när $x > 0$ (men nära noll) och mindre än 2 när $x < 0$ (men nära noll) eftersom x^3 växlar tecken. Detta är således varken en max- eller minpunkt eftersom ingen av dessa definitioner är uppfylld. Formellt innebär det att för varje (litet) $\delta > 0$ har funktionen utseendet till höger. Är detta en så kallad terrasspunkt?



Kapitel 3

Restterm på LAGRANGES form

3.1 LAGRANGES form för resttermen

Vi har tidigare använt resttermen på ordo-form med goda resultat. Oftast i samband med gränsvärden, extrempunktsundersökningar eller andra lokala egenskaper. Vad kan man göra om man vill ha ett resultat som gäller globalt, eller åtminstone på ett förutbestämt intervall kring en punkt? Vi behöver alltså en mer precis kontroll på hur felet i utvecklingen beter sig.



LAGRANGES form

Om $f \in C^{n+1}$ nära $x = 0$ så kan resttermen $r(x)$ i Maclaurinutvecklingen av ordning n för f skrivas

$$r(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \text{för något } \xi \text{ mellan } 0 \text{ och } x \text{ för varje fixt } x \text{ nära origo.}$$

Bevis. Kom ihåg från föreläsning 1 att $r(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$. Eftersom $(x-t)^n \geq 0$ för t mellan 0 och x , samt att både $(x-t)^n$ och $f^{(n+1)}(t)$ är kontinuerliga, kan vi använda medelvärdessatsen för integraler som säger att det för varje x finns ett tal ξ mellan 0 och x så att

$$r(x) = f^{(n+1)}(\xi) \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt = f^{(n+1)}(\xi) \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1) \cdot n!} \right]_{t=0}^{t=x} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$



Beroende på vad du vill åstadkomma, se till att du väljer rätt form på resttermen!

- (i) Vid undersökning av *lokala* egenskaper (såsom gränsvärden, kontinuitet, extremvärden) så brukar en ordo-term duga för att svara på frågan.
- (ii) Om vi behöver information vid en specifik punkt $x = a$ där vi inte utvecklar i just $x = a$, eller om vi vill ha information som gäller på ett helt intervall, så *måste* vi använda Lagrange restterm. Det är ett principfel att trycka in en ordo-term i dessa sammanhang!

**”Funktionen” ξ**

Observera att detta är punktvis. För varje fixt x har vi resttermen på denna form. Talet ξ beror alltså på vilket värde x har och bör därför egentligen betraktas som en funktion $\xi(x)$ av x . Detta kan ställa till det om man inte är försiktig. På det sättet vi kommer att använda Lagranges form kommer vi dock inte att påverkas då vi hela tiden kommer jobba med så kallade *likformiga* uppskattningar (som gäller för alla värden i något fixt intervall för den variabel vi betraktar). Däremot kan funktionen $\xi(x)$ potentiellt vara ordentligt elak (vi vet inte hur den ser ut eftersom den definieras via medelvärdessatsen för varje x). Det går alltså inte att derivera resttermen $r(x)$ på Lagranges form hur som helst och även integration bör utföras försiktigt där man helst uppskattat bort allt ξ -innehåll innan någon integral dyker upp.

Ibland skriver man $\xi = \theta x$, där $\theta \in [0, 1]$ för att markera att ξ beror på x . Observera här att även θ varierar när vi ändrar x , men är begränsad mellan 0 och 1.

Låt oss betrakta ett exempel.

**Exempel**

Låt $f(x) = (1 + x)^5$. Vi vet från binomialsatsen precis hur detta ser ut (Pascals triangel och så vidare). Alltså,

$$f(x) = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$$

för alla x . Låt oss utveckla f till ordning 3. Då är

$$f(x) = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + r(x)$$

där $r(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4$. Det är tydligt att vi måste ändra ξ beroende på hur vi väljer x . Detta är klart eftersom vi *vet* att $r(x) = 5x^4 + x^5$ och det är det enda sättet dessa två uttryck kan matchas på:

$$\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4 = 5x^4 + x^5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} = 5 + x \quad \Leftrightarrow \quad 5\xi + 5 = 5 + x \quad \Leftrightarrow \quad \xi = \frac{x}{5}$$

om $x \neq 0$ då $f^{(4)}(\xi) = 120\xi + 120$, vilket ger ett ξ som beror på x (linjärt till och med!). I det generella fallet beror så klart inte ξ så enkelt på x , men exemplet visar att ett beroende ganska direkt uppstår.

För motsvarande Taylorutveckling kan resttermen skrivas $r(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ där ξ ligger mellan x och a (och x nära a är fixt).

3.2 Tillämpningar

Så vad kan vi använda detta till? I princip de situationer då vi inte enbart är intresserade av vad som händer (våldigt) nära en viss punkt. Allt från att visa att en viss Maclaurinutveckling *konvergerar* på något intervall då vi fortsätter mot oändligheten med antalet termer till att vi kanske mer precist vill uppskatta en integral där vi inte känner till någon elementär primitiv funktion. Vi fortsätter nu alltså med en rad exempel på hur vi kan använda oss av Lagranges

form på resttermen. Först sammanfattar vi stegen som ofta ingår i användandet av Lagranges restterm.



Vanliga tekniker

- I allmänhet gör vi ett byte först och utvecklar en standardutveckling och sen pluggar in den gamla variabeln i resttermen för den enkla utvidgningen. Se till att hålla koll här på vart ξ ligger.
- Försök få en uppfattning om storleksordningen på $r(x)$ för olika n . Hur stort n krävs? Är det överhuvudtaget möjligt?
- Räkna ut derivatan $f^{(n)}$. Tips kan fås från hur Maclaurinutvecklingen ser ut (men den räcker inte!).
- Uppskatta resttermen så att vi får bort ξ . Utgå från det värsta som är möjligt på det intervall vi arbetar.

Låt oss räkna några exempel för att förtydliga.



Exempel

Skriv upp resttermen $r(x)$ på Lagranges form för utvecklingen av ordning 11 för $\frac{1}{1+x^3}$.

Lösning. Låt $g(t) = (1+t)^{-1}$. Vi betraktar

$$g(t) = (1+t)^{-1} = 1 - t + t^2 - t^3 + r(t),$$

där $r(t) = \frac{g^{(4)}(\xi)}{4!}t^4$ med ξ mellan 0 och t . Varför stannar vi vid $n=3$? Jo, vi kommer ersätta t med x^3 , så då får vi med allt upp till ordning 11. Eftersom $g^{(4)}(t) = \frac{24}{(1+t)^5}$ (detta måste räknas ut) så har vi alltså

$$r(t) = \frac{24}{4!(1+\xi)^5}t^4 = \frac{1}{(1+\xi)^5}t^4, \quad \text{för något } \xi \text{ mellan } 0 \text{ och } t.$$

Varför inte skriva $0 \leq \xi \leq t$? Faktum är att vi inte vet om t är positiv eller negativ så då behövs lite belopp här och där för att vara säkra. Enklare att uttrycka saken med ord! Vi återgår till x :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^3} &= 1 - x^3 + x^6 - x^9 + r(x^3) \\ &= 1 - x^3 + x^6 - x^9 + \frac{x^{12}}{(1+\xi)^5}, \quad \text{för något } \xi \text{ mellan } 0 \text{ och } x^3. \end{aligned} \quad (\star)$$

Observera att kravet på ξ nu ändrats till motsvarande krav för x . Detta är viktigt! Vi kan också jämföra med att direktutveckla $f(x) = \frac{1}{1+x^3}$. Då blir Maclaurinpolynomet detsamma

(givetvis) och resttermen får formen

$$\begin{aligned} \frac{f^{(12)}(\xi)x^{12}}{12!} = & \left(531441 \frac{\xi^{24}}{(1+\xi^3)^{13}} - 1948617 \frac{\xi^{21}}{(1+\xi^3)^{12}} + 2854035 \frac{\xi^{18}}{(1+\xi^3)^{11}} \right. \\ & - 2125764 \frac{\xi^{15}}{(1+\xi^3)^{10}} + 847098 \frac{\xi^{12}}{(1+\xi^3)^9} - 173502 \frac{\xi^9}{(1+\xi^3)^8} \\ & \left. + 15849 \frac{\xi^6}{(1+\xi^3)^7} - 450 \frac{\xi^3}{(1+\xi^3)^6} + \frac{1}{(1+\xi^3)^5} \right) x^{12}. \end{aligned} \quad (\spadesuit)$$

En naturlig fråga nu är så klart hur detta resultat kan stämma överens med $(\star)$ eftersom de båda uttrycken ser ordentligt olika ut. Tänk dock på att det är **olika** ξ i de två uttrycken. Det enda vi påstår är att för varje x finns ett ξ_1 mellan 0 och x^3 och ett ξ_2 mellan 0 och x så att resttermen i $(\star)$ får samma numeriska värde som $(\spadesuit)$, med $\xi = \xi_1$ respektive $\xi = \xi_2$. Så båda varianterna ger en korrekt likhet. Vilken skulle du välja att arbeta med?



Exempel

Visa att $\left| \frac{1}{1+x^3} - (1-x^3+x^6-x^9) \right| \leq \left(\frac{8}{7}\right)^5 |x|^{12}$ för $|x| \leq \frac{1}{2}$.

Lösning. Det enda som blir kvar inne i absolutbeloppet är resttermen vi tog fram i föregående exempel. Eftersom $|x| \leq \frac{1}{2}$ är $-\frac{1}{8} \leq x^3 \leq \frac{1}{8}$. Då blir $1+\xi \geq 1-\frac{1}{8}$ eftersom ξ ligger mellan 0 och x^3 . Alltså blir

$$\left| \frac{1}{(1+\xi)^5} x^{12} \right| \leq \frac{|x|^{12}}{\left(1-\frac{1}{8}\right)^5} = \left(\frac{8}{7}\right)^5 |x|^{12}.$$

Här var det alltså viktigt vilka värden ξ kan anta!



Likformig approximation på ett intervall

Hitta ett polynom $p(x)$ så att $\left| \frac{1}{1+x^3} - p(x) \right| \leq 10^{-3}$ för $|x| \leq \frac{1}{2}$.

Lösning. Enligt ovan, låt $p(x) = 1 - x^3 + x^6 - x^9$. Då gäller att

$$\left| \frac{1}{1+x^3} - p(x) \right| \leq \left(\frac{8}{7}\right)^5 |x|^{12} \leq \frac{8^5 2^{-12}}{7^5} = \frac{8}{49^2 \cdot 7} = \frac{8}{2401 \cdot 7} < \frac{8}{2400 \cdot 5} < 10^{-3},$$

för alla $|x| \leq \frac{1}{2}$.

3.2.1 Uppskattningar av funktionsvärden

Typiskt skulle man kunna vilja veta approximativt vilket värde en given funktion har i en viss punkt $x = a$. Ett sätt är att approximera funktionen med dess Maclaurinpolynom, som går lätt att räkna ut numeriskt i en viss punkt (till exempel $x = a$). Felet i denna uppskattning måste dock vara under kontroll, så vi behöver använda Lagranges restterm med $x = a$ och se hur stort detta blir.

**Exempel**

Uppskatta talet $\cos \frac{1}{4}$ med ett fel $< 10^{-6}$.

Lösning. Vi vet att

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{\cos \xi}{(2n+2)!} x^{2n+2}, \quad \text{för något } \xi \text{ mellan } 0 \text{ och } x.$$

Resten kan vi uppskatta (för $x = 1/4$) med

$$\left| (-1)^{n+1} \frac{\cos \xi}{(2n+2)!} x^{2n+2} \right| \leq \frac{1}{4^{2n+2} (2n+2)!} \quad \text{eftersom } |\cos \xi| \leq 1.$$

Vi kan nu testa n för att se när detta blir $< 10^{-6}$. Vi ser att $n = 1$ inte duger men med $n = 2$ erhåller vi

$$\frac{1}{4^{4+2} (4+2)!} = \frac{1}{2^{12} \cdot 6!} < \frac{1}{4000 \cdot 500} = 0.5 \cdot 10^{-6}.$$

Alltså är

$$\cos \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{32} + \frac{1}{6144} + R$$

där $|R| < 10^{-6}$.

**Exempel**

Uppskatta $\sqrt{3}$ med ett fel $< 10^{-3}$.

Lösning. Att försöka utveckla $\sqrt{3} = \sqrt{1+2}$ visar sig väldigt svårt då $x = 2$ är för stort. Vi försöker skriva om $3 = \frac{3 \cdot 25 \cdot 81}{25 \cdot 81}$, och ser då att

$$\sqrt{3} = \frac{9}{5} \sqrt{\frac{75}{81}} = \frac{9}{5} \sqrt{1 - \frac{6}{81}},$$

vilket verkar mer lovande. Vad vi gjort är att vi förlängt 3:an med en kvadrat och sen introducerat en annan kvadrat av ungefär samma storlek. På så sätt får vi något nära ett inne i roten när vi bryter ut jämna kvadrater. Vi utvecklar $\sqrt{1+x}$:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{\frac{3}{8}(1+\xi)^{-5/2}}{3!} x^3,$$

där ξ ligger mellan 0 och x (och vårt $x = -6/81$). Vi uppskattar resttermen (för hela utvecklingen) för att se om detta räcker:

$$\left| \frac{9}{5} \cdot \frac{\frac{3}{8}(1+\xi)^{-5/2}}{3!} x^3 \right| \leq \frac{9|x|^3}{5 \cdot 16(1+\xi)^{5/2}}.$$

Eftersom ξ ligger mellan 0 och $x = -6/81$ blir nämnaren som värst $1 - 6/81 = 75/81$. Vi kan då uppskatta att

$$(1+\xi)^{5/2} \geq \left(\sqrt{\frac{75}{81}} \right)^5 = \left(\frac{5\sqrt{3}}{9} \right)^5 > \left(\frac{5 \cdot \frac{3}{2}}{9} \right)^5 = \left(\frac{5}{6} \right)^5$$

där vi utnyttjat att $\sqrt{3} > \frac{3}{2}$. Nu kan vi uppskatta resttermen med

$$\frac{9 \cdot 6^3 \cdot 6^5}{5 \cdot 81^3 \cdot 16 \cdot 5^5} = \frac{16}{9 \cdot 5^6} < \frac{2}{5^6} < \frac{2}{100^2} < 10^{-3}.$$

Alltså har vi

$$\sqrt{3} = \frac{9}{5} \left(1 - \frac{3}{81} - \frac{36}{8 \cdot 81^2} \right) + R = \frac{1403}{810} + R$$

där $|R| \leq 10^{-3}$.

3.2.2 Integralkalkyl

Man kan även hitta approximativa värden för numeriska integraler. Detta åstadkoms genom att man approximerar integranden med dess Maclaurinpolynom. Problemet ligger i att vi behöver ha kontroll över hur resttermen beter sig över **hela** integrationsområdet. Det räcker alltså inte med resttermen på ordo-form, utan vi behöver använda oss av Lagranges restterm.



Exempel

Beräkna approximativt $\int_0^{1/8} \sqrt{1+4x^3} dx$ med ett fel som är $< 10^{-9}$.

Lösning. Vi utvecklar integranden och låter $t = 4x^3$:

$$\sqrt{1+4x^3} = (1+t)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + r(t) = 1 + 2x^3 - 2x^6 + r(4x^3),$$

där $r(t) = \frac{\frac{3}{8}(1+\xi)^{-5/2}}{3!}t^3$ för något ξ mellan noll och t . Vi uppskattar $r(4x^3)$ genom

$$|r(4x^3)| \leq \frac{3}{8 \cdot 3!}(4x^3)^3 = 4x^9$$

eftersom $1 + \xi \geq 1$ då ξ ligger mellan 0 och x^3 samt $x \geq 0$. Alltså är

$$\begin{aligned} \int_0^{1/8} \sqrt{1+4x^3} dx &= \left[x + \frac{x^4}{2} - 2\frac{x^7}{7} \right]_0^{1/8} + \int_0^{1/8} r(4x^3) dx \\ &= \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^{13}} - \frac{1}{7 \cdot 2^{20}} + \int_0^{1/8} r(4x^3) dx, \end{aligned}$$

där

$$\left| \int_0^{1/8} r(4x^3) dx \right| \leq \int_0^{1/8} |r(4x^3)| dx \leq 4 \int_0^{1/8} x^9 dx = \frac{2}{5} [x^{10}]_0^{1/8} \leq \frac{1}{8^{10}} = \frac{1}{2^{30}}.$$

Eftersom $2^{30} = 1024^3 > 10^9$ så är felet $< 10^{-9}$.

3.2.3 Konvergens?

En ganska naturlig fråga är så klart vad som händer om vi tar med oändligt många termer i Maclaurinpolynomet (och vad det skulle betyda). Ett sett att resonera på är att analysera resttermen och se vad som händer med den när antalet termer går mot oändligheten. Ett annat sätt är att stirra på polynomet och fundera. Följande exempel är ganska intressant med tanke på att samtliga Maclaurinpolynom är identiskt lika med noll.

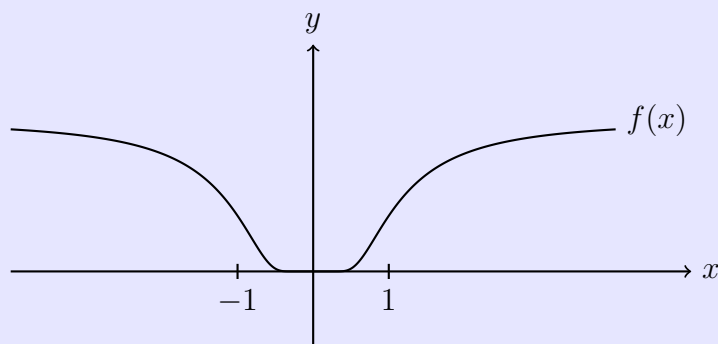


Konvergens av utvecklingar

Ibland kan man hamna i urartade situationer. Ta till exempel följande funktion:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Denna funktion är intressant då $f^{(n)}(0) = 0$ för varje positivt heltal n (visa det). Alltså är **alla** Maclaurinkoefficienter lika med noll och alla Maclaurinpolynom $p_n(x) = 0$ för alla x . Man kan tänka sig att detta aldrig kan vara en bra approximation, men låt oss rita hur f ser ut:



Verkar inte helt galet ändå! Tydligt att approximationen inte fungerar när vi flyttar oss för långt från origo, vilket är ett fenomen som inträffar då och då. Däremot är detta ett exempel på en funktion där alla termer stämmer överens med Maclaurinpolynomet, men även om man tar med oändligt många termer blir det bara likhet i en enda punkt ($x = 0$). Vi återkommer till problemet att hitta *konvergensområden* senare (potensserier).

Kapitel 4

Taylorutvecklingar – en återblick

4.1 Taylorpolynom

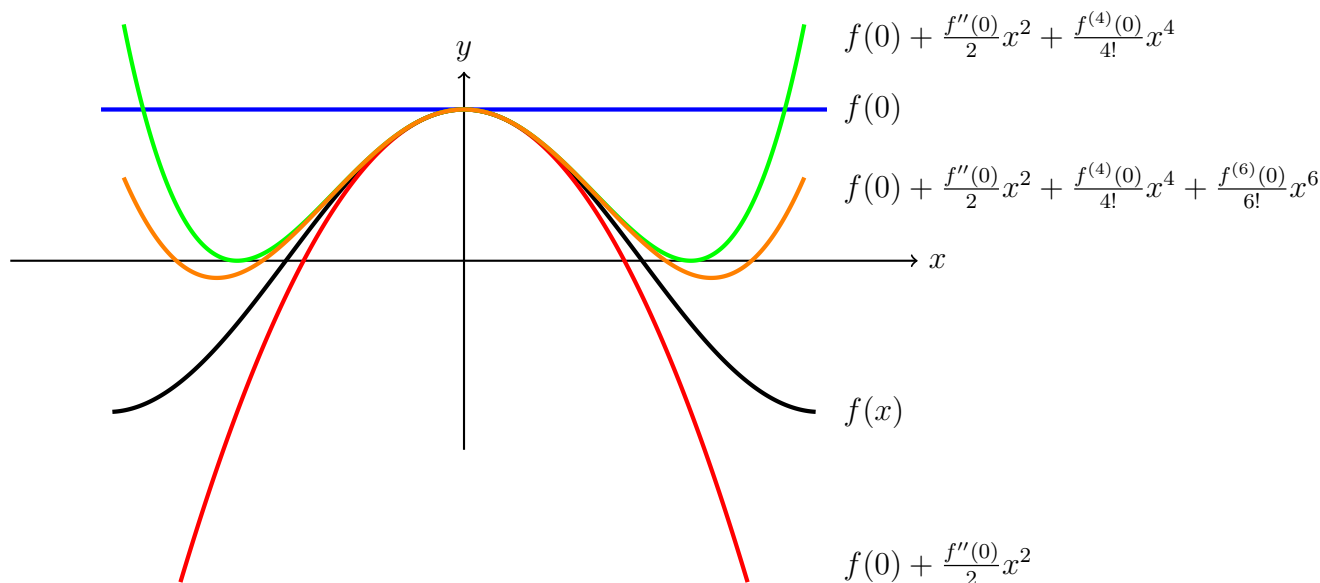
Låt en funktion f vara ”snäll” (säg C^{n+1}) i en omgivning (dvs något intervall) av en punkt $x = a$. Vi har då visat att man kan approximera funktionen f med ett polynom p enligt

$$\begin{aligned} f(x) &= p(x) + r(x) \\ &= \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{\text{approximation}} + \underbrace{f(x) - p(x)}_{\text{fel}}. \end{aligned}$$

Polynomet

$$p(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

kallas Taylorpolynomet av ordning n (eller Maclaurin-polynomet om $a = 0$). Formeln kan alltid användas direkt, men ibland finns genvägar genom att till exempel använda så kallade standardutvecklingar och ibland kan symmetri hos en funktion göra att vissa koefficienter är lättbestämda. Exempelvis en jämn funktion kommer endast att ha jämna termer (varför?).



4.2 Resttermen

Felet $r(x) = f(x) - p(x)$ kallas för *resttermen*. Notera att resttermen och Taylor-polynomet har vissa karakteristika drag.



- (i) Felet $r(x)$ är litet när $x \approx a$. Kontrollera att detta är sant vid användning!
- (ii) Fler termer i $p(x) \Rightarrow$ polynomet stämmer bättre överens med funktionen nära a .
- (iii) Felet beror på både x och gradtalet n (och självklart funktionen f och a).
- (iv) $r(a) = r'(a) = r''(a) = \dots = r^{(n-1)}(a) = r^{(n)}(a) = 0$

Lagranges restterm på integralform:

$$r(x) = (-1)^n \int_a^x \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Resttermen på "Lagranges form":

$$r(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{n!} f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \text{ mellan } a \text{ och } x.$$

Resttermen på "ordo-form":

$$r(x) = O((x-a)^{n+1}).$$

Kom ihåg hur vi definierade $O(x^n)$.



Stora ordo

Definition. Vi säger att $f(x) = O(x^n)$ då x är nära noll om det finns en begränsad funktion $B(x)$ så att $f(x) = B(x)x^n$ för x nära noll.



Egenskaper för stora ordo

För x nära noll och $m, n \geq 0$ gäller:

- (i) $O(x^n) \pm O(x^m) = O(x^m)$ om $m \leq n$ ("lägst vinner");
- (ii) $O(x^n)O(x^m) = O(x^{m+n})$;
- (iii) Om $f(x) = O(x^n)$ och $m \leq n$ så är $f(x) = O(x^m)$ (vi kan *sänka* exponenten);
- (iv) $B(x)O(x^n) = O(x^n)$ om $B(x)$ är begränsad;
- (v) $O(x^m)^n = O(x^{mn})$ och $O((O(x^m))^n) = O(x^{mn})$;
- (vi) $O(x^n) \rightarrow 0$ då $x \rightarrow 0$ om $n > 0$.

**Exempel**

Finn Taylorutvecklingen för $\ln(1+2x)$ kring $x = 1/3$ av ordning 1 med restterm på ordoform.

Lösning. Låt $f(x) = \ln(1+2x)$. Då är

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{1+2x} = \frac{2}{1+2x}.$$

Vi söker utvecklingen kring $x = 1/3$, så

$$f(1/3) = \ln\left(\frac{5}{3}\right), \quad f'(1/3) = \frac{2}{2+5/3} = \frac{6}{5}.$$

Enligt satsen om Taylorutvecklingar ser vi att

$$\ln(1+2x) = \ln\left(\frac{5}{3}\right) + \frac{6}{5}\left(x - \frac{1}{3}\right) + O\left(\left(x - \frac{1}{3}\right)^2\right).$$

4.3 När använder vi de olika formerna?

Beroende på vad vi vill åstadkomma så väljer vi mellan ordo-form och Lagranges form på resttermen.

4.3.1 Lokala egenskaper

Egenskaper som är lokala till sin natur, såsom gränsvärden, kontinuitet, max/min etc, kan ofta undersökas med resttermen på ordoform.

**Exempel**

Hitta Maclaurinutvecklingen för $\sqrt{\cos 2x}$ med resttermen $O(x^8)$.

Lösning. Enligt standardutvecklingar så gäller att

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 + O(t^4)$$

och

$$\cos s = 1 - \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{4!}s^4 - \frac{1}{6!}s^6 + O(s^8).$$

Således blir

$$\begin{aligned} \sqrt{\cos 2x} &= \left(1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + O(x^8)\right)^{1/2} = \left(1 - \underbrace{2x^2 + \frac{2x^4}{3} - \frac{4x^6}{45} + O(x^8)}_{=t}\right)^{1/2} \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(-2x^2 + \frac{2x^4}{3} - \frac{4x^6}{45} + O(x^8)\right) - \frac{1}{8}\left(-2x^2 + \frac{2x^4}{3} + O(x^6)\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{16}\left(-2x^2 + O(x^4)\right)^3 + O(O(x^2)^4) \\ &= 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} - \frac{2x^6}{45} + O(x^8) - \frac{1}{8}\left(4x^4 - \frac{8x^6}{3} + O(x^8)\right) + \frac{1}{16}\left(-8x^6 + O(x^8)\right) + O(x^8) \\ &= 1 - x^2 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{19}{90}x^6 + O(x^8). \end{aligned}$$

**Exempel**

Avgör om $g(x) = x^2 + \sqrt{\cos 2x}$ har ett extremvärde i origo och om så är fallet, vad dess karaktär är.

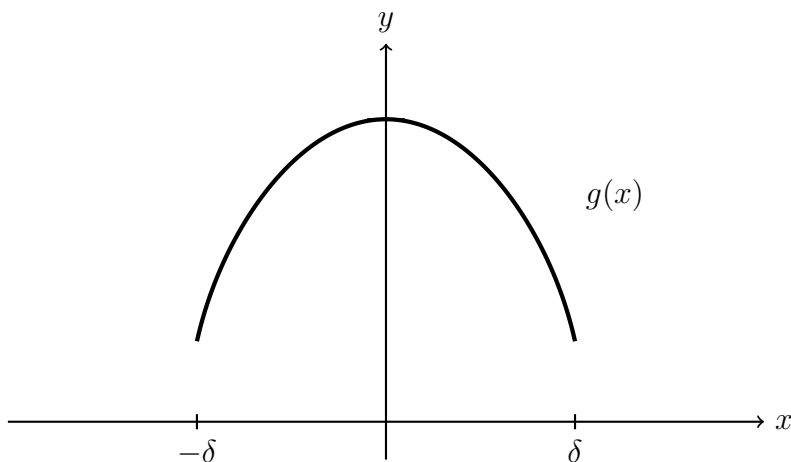
Lösning. Från ovan ser vi att

$$g(x) = x^2 + \sqrt{\cos 2x} = x^2 + 1 - x^2 - \frac{1}{6}x^4 + O(x^6) = 1 - x^4 \left(\frac{1}{6} + O(x^2) \right),$$

vilket innebär att det finns en (möjligtvis liten) omgivning $] -\delta, \delta[$ så att $\frac{1}{6} + O(x^2) > 0$ för $-\delta < x < \delta$. För sådana x gäller alltså att

$$g(x) - 1 = -x^4 \left(\frac{1}{6} + O(x^2) \right) \leq 0$$

med likhet endast då $x = 0$. Således är $x = 0$ en maxpunkt.

**Exempel**

Finn gränsvärdet (om det existerar) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan \sin^2 x - \tan x^2}{x^2 \ln(1 + x^2)}$.

Lösning. Låt $t = \sin^2 x$. Då är

$$t = \left(x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5) \right)^2 = x^2 - \frac{2x^4}{3!} + O(x^6)$$

och därmed är

$$\arctan t = t + O(t^3) = x^2 - \frac{2x^4}{3!} + O(x^6) + O((x^2 + O(x^4))^3) = x^2 - \frac{2x^4}{3!} + O(x^6).$$

Vidare är

$$\tan x^2 = x^2 + O(x^6)$$

och

$$x^2 \ln(1+x^2) = x^2(x^2 + O(x^4)) = x^4 + O(x^6).$$

Vi har alltså

$$\frac{\arctan \sin^2 x - \tan x^2}{x^2 \ln(1+x^2)} = \frac{x^2 - \frac{2x^4}{3!} - x^2 + O(x^6)}{x^4 + O(x^6)} = \frac{-\frac{2}{3!} + O(x^2)}{1 + O(x^2)} \rightarrow -\frac{2}{3!} = -\frac{1}{3}.$$

En liten anmärkning angående $\tan$ kanske är på sin plats. Vi betraktar egentligen inte utvecklingen för $\tan x$ som en standardutveckling, men då $\frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$ och $\tan$ är en udda funktion så kan vi se att $\tan x = x + O(x^3)$.

4.3.2 Globala egenskaper

När vi söker beteende för en funktion på ett intervall behöver vi använda Lagranges form på resttermen:

$$r(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \text{ mellan } a \text{ och } x.$$

Denna situation är typiskt när vi vill ha uppskattningar av ett funktionsvärde i en annan punkt än vi utvecklar i, när vi vill ha uppskattningar som gäller på ett helt intervall, eller när vi vill uppskatta en integral genom att utveckla integranden.

Kom ihåg följande!

- (i) ξ är INTE konstant!
- (ii) ξ kan vara negativ!
- (iii) Att uppskatta $f^{(n)}(\xi)$ är ett maximum-problem på något intervall $[a, b]$. Märk att vi oftast inte behöver hitta det exakta värdet utan att vi kan göra ganska grova uppskattningar för att slippa besvärliga uppskattningar.



Exempel

Låt $f(x) = \ln(1+x^2) + 2 \arctan x$. Visa att $|f(x) - 2x| \leq 2x^2$ då $|x| \leq 1$.

Lösning. Vi ser att

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} + \frac{2}{1+x^2} = \frac{2(1+x)}{1+x^2}$$

och

$$f''(x) = \frac{2-4x-2x^2}{(1+x^2)^2},$$

så

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} \frac{2-4\xi-2\xi^2}{(1+\xi^2)^2} x^2 = 2x + \frac{1-2\xi-\xi^2}{(1+\xi^2)^2} x^2,$$

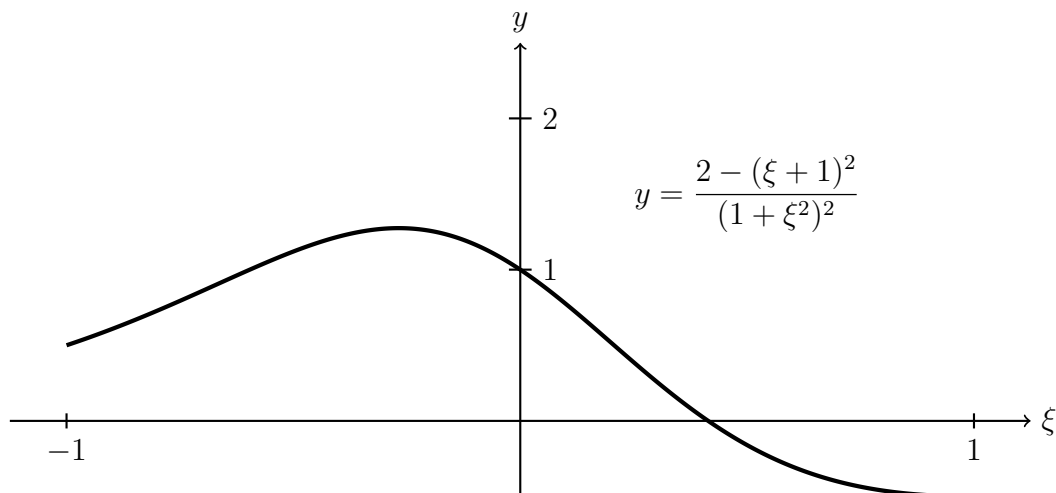
för något ξ mellan 0 och x . Alltså kommer

$$|f(x) - 2x| \leq \left| \frac{1-2\xi-\xi^2}{(1+\xi^2)^2} \right| = \frac{|2-(\xi+1)^2|}{(1+\xi^2)^2}.$$

Notera att $|2 - (\xi + 1)^2| \leq 2$ för $-1 \leq \xi \leq 1$ och att $1 + \xi^2 \geq 1$ för alla ξ , vilket innebär att

$$\frac{|2 - (\xi + 1)^2|}{(1 + \xi^2)^2} \leq \frac{2}{1^2} = 2$$

då ξ ligger mellan 0 och x , så $|\xi| \leq 1$ eftersom $|x| \leq 1$. Notera att det inte finns något ξ som gör att bråket blir just 2



Exempel

Visa att $\int_0^{1/4} \arcsin(\sqrt{t}) dt \approx \frac{1}{12}$ med ett fel $\leq 1/70$.

Lösning. Låt $f(s) = \arcsin(s)$. Då gäller att

$$f'(s) = (1 - s^2)^{-1/2} \quad \text{och} \quad f''(s) = \frac{s}{(1 - s^2)^{3/2}}.$$

Alltså blir

$$\arcsin(s) = f(0) + f'(0)s + \frac{f''(\xi)}{2} s^2 = s + \frac{\xi}{2(1 - \xi^2)^{3/2}} s^2, \quad \xi \text{ mellan } 0 \text{ och } s,$$

så

$$\arcsin(\sqrt{t}) = \sqrt{t} + \frac{\xi}{2(1 - \xi^2)^{3/2}} t, \quad \xi \text{ mellan } 0 \text{ och } \sqrt{t}.$$

Eftersom vi är intresserade av när $0 \leq t \leq 1/4$, så kommer $0 \leq \xi \leq 1/2$. Alltså blir

$$\left| \frac{\xi}{2(1 - \xi^2)^{3/2}} \right| \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1 - 1/4)^{3/2}} = \frac{4^{3/2}}{4 \cdot 3^{3/2}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} < \frac{4}{9}$$

då $\sqrt{3} > 3/2$. Det följer att

$$\int_0^{1/4} \arcsin(\sqrt{t}) dt = \int_0^{1/4} \sqrt{t} dt + R = \frac{1}{12} + R,$$

där

$$|R| = \left| \int_0^{1/4} \frac{\xi}{2(1 - \xi^2)^{3/2}} t dt \right| \leq \frac{4}{9} \int_0^{1/4} t dt = \frac{4}{9} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{1/4} = \frac{1}{9 \cdot 8} = \frac{1}{72}.$$

Notera att det går att räkna ut integralen exakt (hur?) utan större problem (med exakta svaret $\sqrt{3}/8 - \pi/24$).

Kapitel 5

Differentialekvationer av första ordningen och integralekvationer

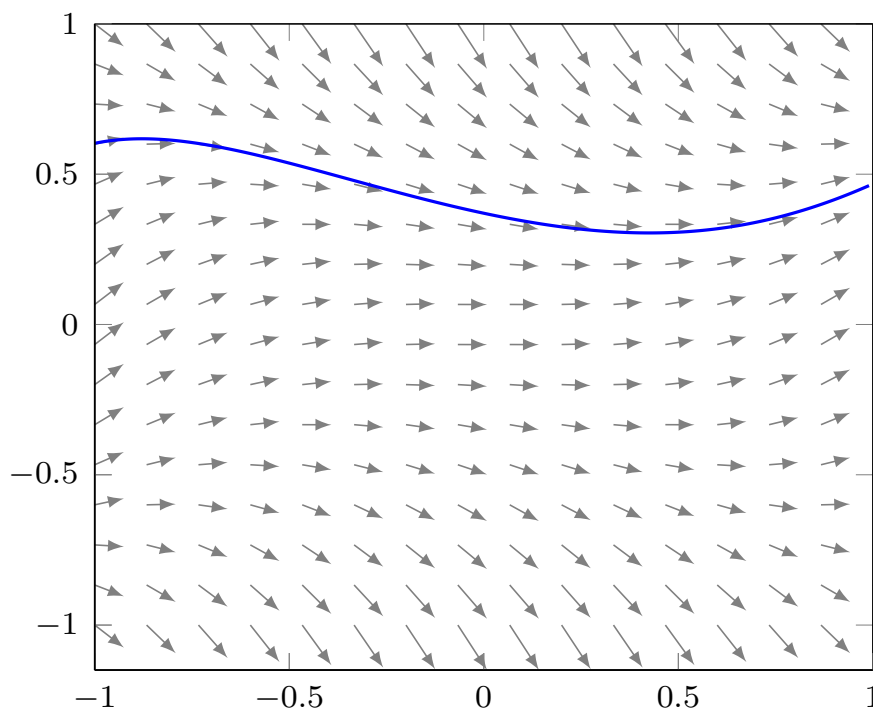
5.1 Introduktion

En differentialekvation (DE) i en variabel är en ekvation som innehåller både variabeln (ofta x), en okänd funktion $y(x)$ samt derivatorer av $y(x)$ som $y'(x)$, $y''(x)$ och så vidare. Man skriver ofta $F(x, y, y', y'', \dots) = 0$ där F är någon funktion av flera variabler. Med en lösning till en DE menar vi en funktion y , definierad på något intervall $]a, b[$ (möjligen $a = -\infty$ och $b = \infty$) där y uppfyller $F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots) = 0$ för $x \in]a, b[$. Med andra ord uppfyller alltså funktionen y DE:n i varje punkt $x \in]a, b[$. Vi börjar med att betrakta fallet med första ordningens differentialekvationer (DE). Ordningen på en DE definieras som den högsta derivatan den innehåller, så en DE av första ordningen innehåller alltså bara y och y' (förutom variabeln x). Ett väldigt enkelt exempel är till exempel

$$y'(x) = \cos x \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = C + \sin x,$$

där $C \in \mathbf{R}$ är en godtycklig konstant. Här kunde vi direkt integrera båda sidor i ekvationen. Om DE:n däremot även innehåller y -termer och kanske krångligare varianter av y' så är det inte säkert att vi kan lösa problemet.

Om en DE kan skrivas på formen $y' = F(x, y)$ (att det går att lösa ut y' och isolera på en sida i en ekvation) kan man dock rita upp vad som kallas för ett riktningsfält för DE:n. Ekvationen ger för varje (x, y) i planet vad y' måste vara. Detta ger information om funktionen y växer eller avtar. Vi ritar upp ett exempel för DE:n $y' = x^2 - 2y^2$:



Pilarna i riktningsfältet visar hur lösningskurvor går (kurvor $y(x)$ alltså). Den heldragna kurvan är en av alla lösningar $y(x)$ som finns till ekvationen $y' = x^2 - 2y^2$.

5.2 Linjära DE av första ordningen



Definition. Om $y' + f(x)y = g(x)$ kallar vi DE:n för en linjär DE av första ordningen.

Dessa ekvationer kan lösas med hjälp av en så kallad *integrerande faktor*. Vi finner en sådan genom att välja en primitiv funktion F till f (dvs en funktion F så att $F' = f$) och sedan bilda $e^{F(x)}$ som är den integrerande faktorn. Namnet kommer från följande egenskap. Vi multiplicerar DE:n med $e^{F(x)}$ och utnyttjar sedan produktregeln för derivering:

$$\begin{aligned}
 y'(x) + f(x)y(x) &= g(x) &\Leftrightarrow & e^{F(x)}y'(x) + f(x)e^{F(x)}y(x) = g(x)e^{F(x)} \\
 &&\Leftrightarrow & (e^{F(x)}y(x))' = g(x)e^{F(x)} \\
 &&\Leftrightarrow & e^{F(x)}y(x) = C + \int g(x)e^{F(x)} dx \\
 &&\Leftrightarrow & y(x) = Ce^{-F(x)} + e^{-F(x)} \int g(x)e^{F(x)} dx.
 \end{aligned}$$

Vi ser här att om $g(x) = 0$ fås specialfallet $y(x) = Ce^{-F(x)}$ och om $f(x) = 0$ fås specialfallet $y(x) = C + \int g(x) dx$.

Här har vi dessutom visat entydighet för lösningar. Om ett villkor av typen $y(a) = \alpha$ för något a och α är givet finns bara ett värde på konstanten C som gör att $y(x)$ uppfyller detta. Vad vi gör här är alltså att vi bestämmer en punkt i planet som lösningskurvan ska gå genom; jämför

med riktningsfältet ovan (även om den ekvationen **inte** är linjär). Genom varje punkt går det precis en lösning och olika lösningar korsar aldrig varandra. Den här typen av entydighet har man inte alltid om ekvationen inte är linjär.



Exempel

Lös ekvationen $y' + 3y = 2$.

Lösning. En av de enklare typerna av ekvationer vi kan få. En integrerande faktor fås som e^{3x} eftersom $(3x)' = 3$ är faktorn före y . Alltså,

$$\begin{aligned} y' + 3y = 2 &\Leftrightarrow e^{3x}y' + 3e^{3x}y = 2e^{3x} \Leftrightarrow (ye^{3x})' = 2e^{3x} \\ &\Leftrightarrow ye^{3x} = C + \int 2e^{3x} dx = C + \frac{2}{3}e^{3x} \\ &\Leftrightarrow y(x) = Ce^{-3x} + \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Observera här att Ce^{-3x} löser den homogena ekvationen $y' + 3y = 0$ för alla C . Konstanten $\frac{2}{3}$ brukar kallas för en *partikulärlösning* till $y' + 3y = 2$. Idén att konstruera den allmänna lösningen till $y' + 3y = 2$ genom lösningar till den homogena ekvationen och en partikulärlösning är ett exempel på *superpositionsprincipen* som finns för linjära ekvationer. Denna teknik återkommer vi till.



När dyker konstanten C upp?

Konstanten dyker upp i samband med att vi tar bort derivatan (eftersom man tappar konstanten när man deriverar). Alternativt kan man se det som att konstanten hör ihop med den obestämda integralen (den primitiva funktionen). Båda alternativen går bra, men se till att konstanten dyker upp innan du gör någon drastiskt med ekvationen som att förkorta bort saker eller multiplicera ekvationen med något (som till exempel e^{-3x} ovan).



Exempel

Finn alla lösningar till $y' = xy + x^3$ och bestäm speciellt de tre lösningar som uppfyller villkoren $y(0) = 0$, $y(0) = -1$ och $y(-1) = -1$.

Lösning. Vi söker en integrerande faktor och finner den som $e^{-x^2/2}$ eftersom $-x^2/2$ är en primitiv funktion till $-x$ (faktorn före y om allt som har med y att göra flyttas till vänsterledet). Vi testar:

$$(e^{-x^2/2}y)' = -xe^{-x^2/2}y + e^{-x^2/2}y' = e^{-x^2/2}(y' - xy).$$

Detta är alltså ok. Då erhåller vi

$$y' = xy + x^3 \Leftrightarrow (e^{-x^2/2}y)' = x^3e^{-x^2/2} \Leftrightarrow y = Ce^{x^2/2} + e^{x^2/2} \int x^3e^{-x^2/2} dx.$$

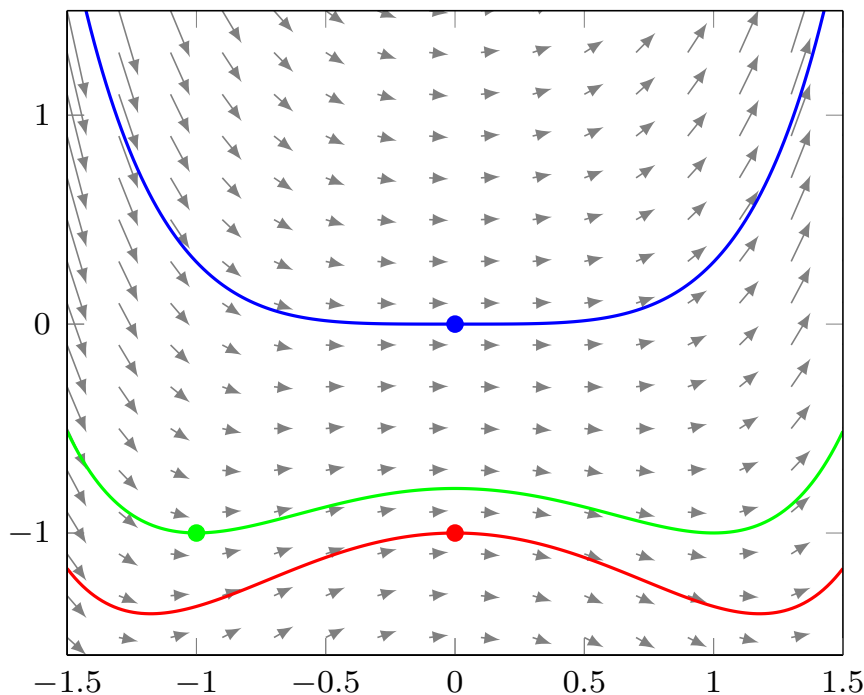
Vi räknar ut integralen med PI:

$$\begin{aligned}\int x^3 e^{-x^2/2} dx &= \int x^2 \left(x e^{-x^2/2} \right) dx \\ &= -x^2 e^{-x^2/2} + 2 \int x e^{-x^2/2} dx \\ &= -x^2 e^{-x^2/2} - 2e^{-x^2/2} = -(2 + x^2)e^{-x^2/2}.\end{aligned}$$

Derivera och testa! Vi har nu alltså

$$y(x) = C e^{x^2/2} - 2 - x^2, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Vi söker speciellt y så att $y(0) = 0$. Då måste $y(0) = C - 2 = 0$, så $C = 2$. Kurvan som definieras med detta val av C går alltså genom origo. För $y(0) = -1$ måste $y(0) = C - 2 = -1$, så $C = 1$ och för att få $y(-1) = -1$ måste $C = 2e^{-1/2}$. Vi skissar ett riktningsfält och ritar in våra lösningar i detta. Man kallar ibland alla möjliga lösningar för ekvationens lösningsskara.



De markerade punkterna är de punkter vi valt att "förankra" lösningarna i (till exempel så gäller att $y(0) = -1$ motsvarar punkten $(0, -1)$).

5.3 Separabla DE



Definition. Om DE:n är av formen $g(y(x))y'(x) = h(x)$ kallas den för separabel.

En separabel DE löser vi genom att ”separera variablerna.” Minnesregeln är att vi slår sönder $y' = \frac{dy}{dx}$ och multiplicerar upp dx på andra sidan. Mer formellt utför vi följande manöver. Låt $G' = g$ och $H' = h$ (dvs hitta primitiva funktioner till g och h). Då är

$$(G(y) - H(x))' = G'(y)y' - H'(x) = g(y)y' - h(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad G(y) - H(x) = C,$$

där C är godtycklig konstant. Vi har alltså hittat ett samband för y som inte innehåller någon derivata: $G(y(x)) = C + H(x)$. Vad som återstår är att lösa ut y ur denna ekvation, vilket kan vara ganska svårt om G är något som inte är väldigt enkelt (och inverterbart). Vi har här inte heller någon entydighet som är uppenbar (beror på G och H) utan får reda ut sådant från fall till fall. Det finns krav man kan ställa på ingående funktioner för att få det men det ligger utanför ramen på denna kurs.

Minnesregel (ej klart definierat i nuläget som det står så ekvivalenser utläses approximativt):

$$g(y) \frac{dy}{dx} = h(x) \quad " \Leftrightarrow " \quad g(y)dy = h(x)dx \quad " \Leftrightarrow " \quad \int g(y) dy = \int h(x) dx.$$



Exempel

Hitta en lösning till $y' = 1 + y^2$ sådan att $y(3) = 1$.

Lösning. Vi ser att

$$y' = 1 + y^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'}{1 + y^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dy}{1 + y^2} = \int dx \quad \Leftrightarrow \quad \arctan(y) = x + C.$$

Eftersom $y(3) = 1$ så ser vi att

$$\arctan(1) = 3 + C \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{\pi}{4} - 3,$$

så

$$\arctan(y) = x + \frac{\pi}{4} - 3 \quad \Rightarrow \quad y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4} - 3\right).$$

För vilka x ? Det största intervall vi kan finna som innehåller $x = 3$ är

$$-\frac{\pi}{2} < x + \frac{\pi}{4} - 3 < \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 3 - \frac{3\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} + 3.$$

Svaret blir således

$$y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4} - 3\right), \quad 3 - \frac{3\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} + 3.$$



Exempel

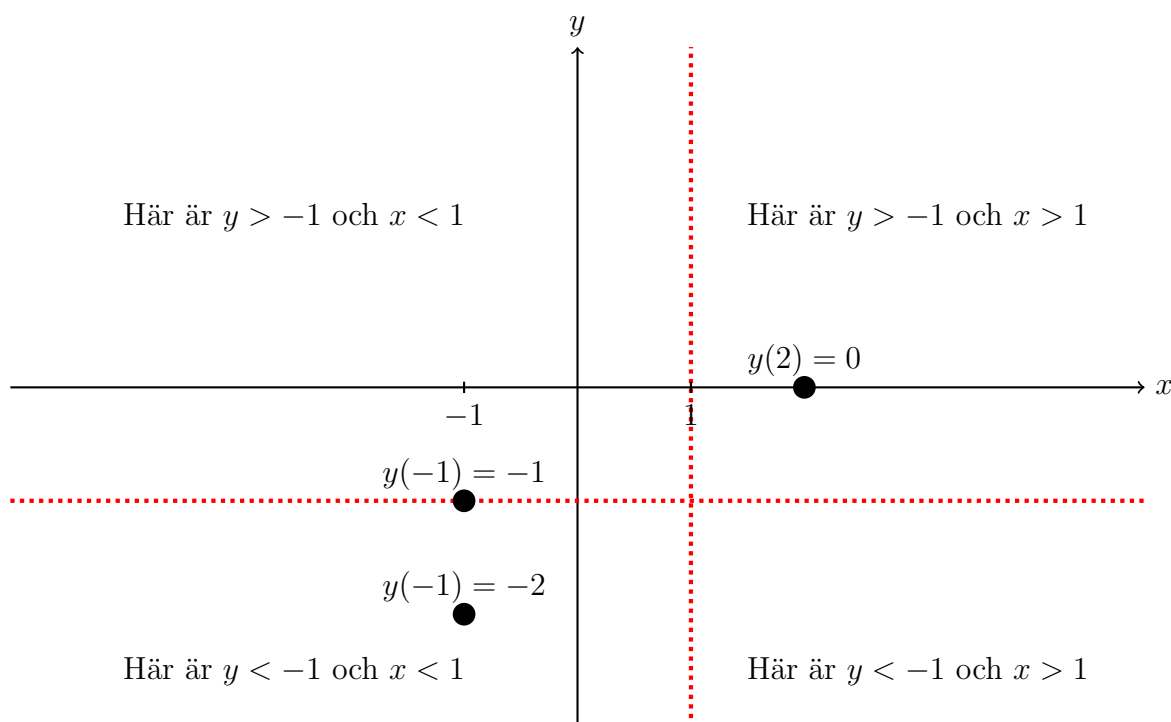
Finn en lösning till $(x-1)^2 y' = y+1$ så att $y(-1) = -1$, en lösning så att $y(2) = 0$, samt en lösning så att $y(-1) = -2$.

Lösning. Vi vill dela med högerledet och måste då kräva att $y+1 \neq 0$. Om det är sant och $x \neq 1$ har vi

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y+1} = \frac{1}{(x-1)^2} &\Leftrightarrow \int \frac{1}{y+1} dy = \int \frac{1}{(x-1)^2} dx \Leftrightarrow \ln|y+1| = C - \frac{1}{x-1} \\ &\Leftrightarrow |y+1| = \exp\left(C - \frac{1}{x-1}\right) = De^{-1/(x-1)}, \end{aligned}$$

där $D = e^C$ är en godtycklig positiv konstant.

I detta skede kan det vara värt mödan att fundera lite över hur begynnelsevillkoren påverkar vad lösningen blir. Ett tips är att rita ett xy -plan och markera vilka områden lösningar befinner sig i.



För att ta bort beloppet återuppstår möjligheten att ha både positiva och negativa konstanter:

$$|y+1| = De^{-1/(x-1)} \Leftrightarrow y+1 = \pm De^{-1/(x-1)} \Leftrightarrow y = -1 + Ee^{-1/(x-1)},$$

där $E \neq 0$. Vi kan inte anta att $E = 0$ är tillåtet i nuläget. Vi har alltså lösningar

$$y(x) = -1 + Ee^{-\frac{1}{x-1}}, \quad x > 1 \quad \text{och} \quad y(x) = -1 + Ee^{-\frac{1}{x-1}}, \quad x < 1.$$

Notera särskilt definitionsmängderna! Det är ett intressant faktum här att vi inte kan definiera dessa lösningar kontinuerligt förbi $x = 1$. Endera har vi $x < 1$ eller $x > 1$. Vilket intervall vi väljer beror på vad vi har för villkor. Vad gäller fallet då $y = -1$ då? Vi testar och ser att detta löser ekvationen, så även $y(x) = -1$ är en lösning. Denna lösning är definierad även för $x = 1$. Så vi kan endera tillåta $E = 0$ ovan och i fallet då $E = 0$ blir definitionsmängden $\mathbf{R}$ (kravet på att $x \neq 1$ är ej nödvändigt).

Vi finner en lösning sådan att $y(-1) = -1$ genom att låta $y(x) = -1$ för alla x .

Om vi vill att $y(2) = 0$ så söker vi en lösning där $x > 1$, så $y(x) = -1 + E \exp(-1/(x-1))$ där

$$0 = y(2) = -1 + Ee^{-1} \Leftrightarrow E = e.$$

Svaret är alltså

$$y(x) = -1 + \exp\left(1 - \frac{1}{x-1}\right), \quad x > 1.$$

Kravet att $x > 1$ är viktigt. Vi väljer alltså den lösning vars "definitionsområde" innehåller punkten vi har ett villkor i (i detta fall var det $x = 2$).

Om $y(-1) = -2$ så kommer $x < 1$ och $y < -1$, så $y(x) = -1 + E \exp(-1/(x-1))$ och

$$-2 = y(-1) = -1 + E e^{1/2} \quad \Leftrightarrow \quad E = -e^{-1/2}.$$

Svaret är alltså

$$y(x) = -\left(1 + \exp\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{x-1}\right)\right), \quad x < 1.$$



Divisioner med noll

Vid varje division som utförs måste man vara mycket noggrann med att skriva ut villkor som måste gälla. I föregående exempel kräver vi att $y \neq -1$ vilket sedan visar sig vara en möjlig lösning. Divisionen med $x - 1$ gör också att ingen av våra lösningars definitionsområden kan innehålla $x = 1$ (förutom andra undantagsfall som $y = -1$). Var **mycket** noggrann med detta!



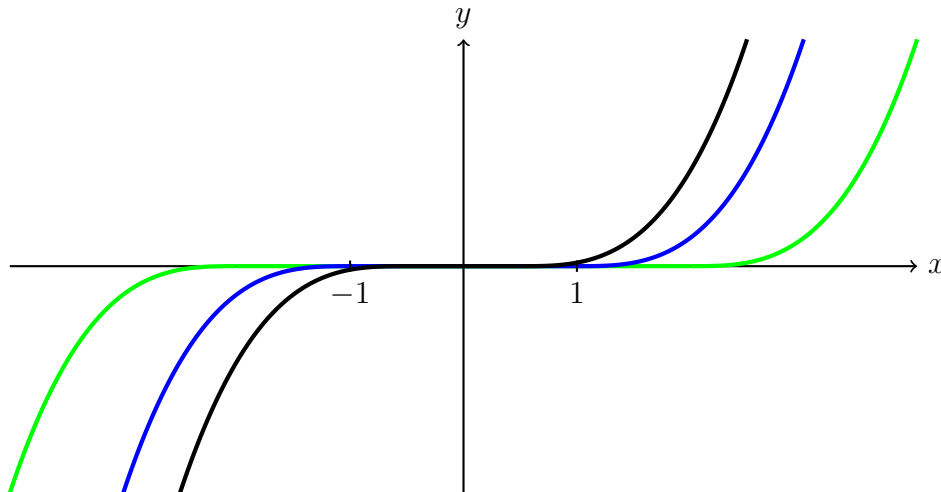
Exempel

Hitta en lösning till $y' = y^{2/3}$ för $y \in \mathbf{R}$.

Lösning. Vi vill dela med $y^{2/3}$ för att få allt y -beroende på ena sidan. Vi måste då kräva att $y \neq 0$. Om det är sant så gäller

$$y' = y^{2/3} \quad \Leftrightarrow \quad \int y^{-2/3} dy = \int dx = C + x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y^{1/3}}{1/3} = C + x \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{27}(C + x)^3.$$

Vi observerar nu att detta y löser ekvationen för alla x (testa detta). Vad händer om $y = 0$? Jo, det fungerar också eftersom $y' = 0$ då. Vi har alltså inte en entydig lösning så vi vet inte om vi funnit samtliga. Dessutom kan man göra roliga saker som att "skarva" ihop lösningar. Vi kan till exempel välja $y(x) = \frac{(1+x)^3}{27}$ för $x < -1$, $y(x) = 0$ för $-1 \leq x \leq 1$ och $y(x) = \frac{(-1+x)^3}{27}$ för $x > 1$ som i följande figur (blå kurva). Man kan ganska enkelt visa att denna skarvning ger en funktion som är åtminstone kontinuerligt deriverbar och löser differentialekvationen i fråga. Vidare kan man för olika värden på C få fler lösningskurvor som tangerar tidigare lösningar så man med bibehållen deriverbarhet kan "hoppa" från en kurva till en annan. Fascinerande!



Detta innebär också att det kan finnas hur många olika lösningar som helst som går genom samma punkt i planet. Vi kan alltid skarva ihop lite annorlunda och få en ny lösning genom origo till exempel; där lösningskurvor tangerar varandra kan vi alltså ”hoppa” från en lösning till en annan.

5.4 Linjära DE av ordning 1 med komplexa koefficienter

För detta ändamål ska vi introducera komplexvärda funktioner sådana att för $x \in \mathbf{R}$ så tillåts $f(x) \in \mathbf{C}$. På detta sätt har funktionen f en real- och imaginärdel. Vi delar upp f i komponenter $f(x) = u(x) + iv(x)$ där u, v är reellvärda funktioner (vanliga funktioner alltså). Vi känner redan till ett exempel: den komplexa exponentialfunktionen $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Precis som när vi introducerade komplexa tal i grundkursen visar det sig att dessa funktioner beter sig precis som vanliga funktioner när det kommer till våra så kallade räkneregler. Även differential- och integralkalkyl fungerar analogt. Vi definierar

$$f'(x) = u'(x) + iv'(x),$$

$$\int f(x) dx = \int u(x) dx + i \int v(x) dx$$

och så vidare. Produktregler, partiell integration, kedjeregler och allt annat fungerar precis som vanligt. Självklart behöver alla dessa fenomen egentligen bevisas ordentligt, men vi överlämnar det som övning.

Vi är speciellt intresserade av funktionen e^{wx} där $w \in \mathbf{C}$ och $x \in \mathbf{R}$. Skriv $w = \alpha + i\beta$ för $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Då är

$$e^{wx} = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)).$$

Den stora anledningen till vårt intresse för denna funktion är att $(e^{wx})' = we^{wx}$ precis som för den reella exponentialfunktionen (visa att detta är sant från definitionen). Detta gör att vi enkelt kan hitta integrerande faktorer även för DE med komplexvärda funktioner. Speciellt för linjära DE av ordning ett med konstanta koefficienter, dvs

$$y' + wy = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad (e^{wx}y)' = e^{wx}g(x) \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = Ce^{-wx} + e^{-wx} \int e^{wx}g(x) dx.$$

Detta antyder på viss struktur hos dessa lösningar. Som nämnt tidigare pratar man om en *homogen* lösning $y_h(x) = Ce^{-wx}$ och en *partikulär* lösning $y_p(x)$ som ges av den andra termen.

Den totala lösningen ges av $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ och lösningsgången kan reduceras till frågan om att hitta **en** partikulärlösning och sedan få alla möjliga lösningar till ekvationen genom att lägga till de homogena lösningarna. Namnet homogen kommer från att y_h löser den homogena motsvarigheten till den givna ekvationen (med $g(x) = 0$). Den här tekniken återkommer vi till på nästa föreläsning!

5.5 Integralekvationer

På liknande sätt som man kan betrakta DE kan man istället ha ekvationer där det ingår integraler av okända funktioner som vi försöker lösa ut. Tekniken vi använder i denna kurs bygger på att helt enkelt derivera ekvationen och lösa en ekvivalent DE i stället. I många tillämpningar däremot gör man ofta tvärt om, dvs formulerar om DE som integralekvationer då ekvationer med integraler i allmänhet beter sig bättre numeriskt än motsvarande DE.



Exempel

Finn alla kontinuerligt deriverbara funktioner y så att

$$y(x) + \int_1^x y(t) dt = 2e^{2x}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Lösning. Vi deriverar likheten (förutsätter här att y är deriverbar) och erhåller

$$y'(x) + y(x) = 4e^{2x}.$$

Detta följer direkt från integralkalkylens huvudsats! Om y är kontinuerlig finns en primitiv funktion Y så att

$$\int_1^x y(t) dt = Y(x) - Y(1).$$

Om vi deriverar denna likhet fås

$$\frac{d}{dx} \int_1^x y(t) dy = Y'(x) - 0 = y(x).$$

Vi löser DE:n vi fick ovan genom att multiplicera med den integrerande faktorn e^x :

$$\begin{aligned} y'(x) + y(x) = 4e^{2x} &\Leftrightarrow e^x y'(x) + e^x y(x) = 4e^{3x} &\Leftrightarrow (e^x y(x))' = 4e^{3x} \\ &\Leftrightarrow e^x y(x) = \frac{4}{3} e^{3x} + C &\Leftrightarrow y(x) = C e^{-x} + \frac{4}{3} e^{2x}. \end{aligned}$$

Hur bestämmer vi C ? Vi måste hitta ett villkor från integralekvationen. Enklast är att sätta in $x = 1$ då integralen försvinner då. Alltså måste $y(1) + 0 = 2e^2$. Vi bestämmer nu C :

$$2e^2 = y(1) = C e^{-1} + \frac{4}{3} e^2 \quad \Leftrightarrow \quad C = 2e^3 - \frac{4}{3} e^3.$$

Det finns alltså bara en lösning:

$$y(x) = \frac{2}{3} (e^{3-x} + 2e^{2x}).$$

**Entydig lösning!**

Notera att det endast blir en lösning till en integralekvation av typen ovan. För att behålla ekvivalens när vi deriverar ekvationen måste vi ställa krav på lösningen. Det är ett principfel att svara med samtliga lösningar till den differentialekvation!

Kapitel 6

Linjära differentialekvationer av högre ordning

6.1 Partikulärlösningar

Vi kommer nu att betrakta linjära ekvationer av högre ordning. Det innebär att ekvationen kommer att ha formen

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x), \quad x \in]a, b[,$$

där $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ och g är funktioner som är tillräckligt snälla för att ekvationen ska ha mening och $]a, b[$ är något öppet intervall (möjligen oändligt). En lösning y till ekvationen är en funktion $y \in C^n$ (så y är n gånger kontinuerligt deriverbar) som uppfyller sambandet ovan för varje $x \in]a, b[$. Det kommer i allmänhet att existera många sådana lösningar, så vi kommer att lägga en hel del energi på att se till att vi finner *samtliga* lösningar till ekvationen.

Låt oss börja med att betrakta ett exempel.



Exempel

Visa att $y = e^{x^2}$ löser ekvationen

$$y'' - 2xy' + 2y = 4e^{x^2}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Lösning. Eftersom vi fått ett förslag på lösning så testar vi helt enkelt om funktionen $y(x) = e^{x^2}$ löser ekvationen genom direkt insättning:

$$y = e^{x^2} \quad \Rightarrow \quad y' = 2xe^{x^2} \quad \Rightarrow \quad y'' = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2},$$

så

$$y'' - 2y' + 2y = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} - 2x \cdot 2xe^{x^2} + 2e^{x^2} = 4e^{x^2}$$

för alla $x \in \mathbf{R}$.

En lösning till en differentialekvation brukar kallas för en **partikulärlösning**. Detta innebär alltså inget speciellt mer än att det är *någon* funktion $y = y_p$ som uppfyller ekvationen. Så om en ekvation är given, hur hittar vi dessa lösningar? I princip handlar det om att gissa på något vettigt och visa att det fungerar. Det kan låta lite skumt i nuläget, men det kommer att bli tydligare hur det fungerar senare.

6.2 Differentialoperatorer

För att underlätta notation och visa på underliggande struktur introducerar vi begreppet *differentialoperator* (DO). Den enklaste icke-triviala varianten på en DO är helt enkelt operationen att derivera med avseende på variabeln x . Vi brukar skriva det $(\cdot)'$, $\frac{d}{dx}$, eller det som kommer att vara vanligast i detta avsnitt, D . Med andra ord gäller alltså

$$\frac{dy}{dx} = Dy(x) = y'(x)$$

för alla deriverbara funktioner y . Vi tillåter oss att vara lite slarviga med notationen. Självklart så kan man även betrakta operationen att derivera två gånger. Denna operation kan enkelt skrivas D^2 . Då är $D^2y = y''$ vilket kan ses genom manövern

$$D^2y = D(Dy) = Dy' = y''.$$

På samma sätt är $D^3y = y^{(3)}$ och så vidare. Vi är nu mogna för följande definition.



Differentialoperator

Definition. Om $p(r)$ är ett polynom

$$p(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0$$

definierar vi *differentialoperatorn* $p(D)$ genom

$$p(D)y = a_n D^n y + a_{n-1} D^{n-1} y + \cdots + a_1 Dy + a_0 y$$

för alla y som kan kontinuerligt deriveras n gånger. Polynomet $p(r)$ kallas differentialoperatorns *karaktäristiska polynom*.

Ett par exempel är på sin plats.



Exempel

- (i) Om $p(D) = D + 1$ är $p(D)y = y' + y$;
- (ii) Om $p(D) = D^2 - 2$ är $p(D)y = y'' - 2y$;
- (iii) Om $p(D) = (D + 1)^2 = D^2 + 2D + 1$ är $p(D)y = y'' + 2y' + y$.

Det sista exemplet kommer vi att återvända till. Man kan alltså precis som för vanliga polynom faktorisera $p(D)$ bara man är försiktig i vilken ordningen man skriver D :n och konstanter. Detta kommer att vara nyckeln till att lösa högre ordningens DE.



Exempel

Skriv ekvationen $2y^{(3)} - 3y' + 2y = 7x$ med hjälp av en DO.

Lösning. Vi ser direkt att ekvationen ekvivalent kan formuleras som $2D^3y - 3Dy + 2y = 7x$, och om vi låter $p(D) = 2D^3 - 3D + 2$ kan vi skriva $p(D)y = 7x$. De termer som inte innehåller y kan inte ingå i operatorn.



Linjäritet

Sats. Operatorn $p(D)$ definierad ovan är *linjär*, dvs om y_1 och y_2 är n gånger deriverbara funktioner och $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$ är konstanter så är

$$p(D)(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1p(D)y_1 + c_2p(D)y_2.$$

Beviset är enkelt eftersom vi vet att vi kan derivera en summa genom att ta summan av respektive derivatorer samt att vi kan bryta ut konstanter (med andra ord, att operatorn D är linjär). Faktum är att satsen gäller även om vi inte har konstanta koefficienter.



Konstanta koefficienter

Definition. Vi säger att den DO $p(D)$ vi introducerade ovan har konstanta koefficienter eftersom konstanterna $a_0, a_1, \dots, a_n$ är just konstanter.

Definitionen kanske verkar lite konstig, men man arbetar ofta med DO:er där man låter koefficienterna $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ i $p(D)$ bero på x (alltså vara funktioner av x). Vi kommer oftast att enbart betrakta fallet med konstanta koefficienter när vi arbetar med högre ordningens DE:er (med bland annat Euler-ekvationer som undantag).

6.3 Generell Lösningsstruktur

Linjäriteten hos ekvationen ger upphov till en generell Lösningsstruktur. Observera först att om y_1 och y_2 är lösningar till ekvationen $p(D)y = g$, så kommer $z = y_1 - y_2$ att lösa ekvationen $p(D)z = 0$:

$$p(D)z = p(D)(y - y_p) = p(D)y - p(D)y_p = g - g = 0.$$

Detta gäller oavsett om koefficienterna i $p(D)$ är konstanta eller ej (endast linjäriteten är nödvändig). Lite omvänt innebär detta att följande sats gäller.



Sats. Samtliga lösningar till $p(D)y = g$ kan delas upp i två delar: $y = y_h + y_p$, där den **homogena lösningen** y_h löser ekvationen $p(D)y_h = 0$ och **partikulärlösningen** y_p är *någon* lösning till $p(D)y_p = g$.

Bevis. Genom att betrakta $z = y - y_p$ där y och y_p är olika lösningar till ekvationen följer påståendet av linjäriteten enligt ovan. $\square$

Vi har alltså visat att $z = y - y_p$ löser den homogena ekvationen $p(D)z = 0$. Så om vi har *en* partikulärlösning y_p så att $p(D)y_p = g$, så ges *samtliga* lösningar av denna partikulärlösning plus lösningar y_h till den homogena ekvationen $p(D)y_h = 0$. Detta kommer vara nyckeln till att lösa linjära ekvationer av högre ordning.

Begreppet "homogen lösning" är egentligen lite slarvigt då det är ekvationen som vi har en lösning till som är homogen, inte lösningen som sådan. Men vi kommer tillåta språkbruket.

6.4 Lösningar till homogena ekvationer

Det blir således relevant att studera den homogena ekvationen med hög noggrannhet. Vi kommer nu att betrakta linjära differentialekvationer av ordning n :

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1y'(x) + a_0y(x) = g(x)$$

där vi som vanligt kan skriva

$$p(D)y(x) = g(x), \quad \text{med } p(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D + a_0.$$

Det karakteristiska polynomet

$$p(r) = r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1r + a_0$$

kan *alltid* faktoriseras enligt

$$p(r) = (r - r_1)^{m_1}(r - r_2)^{m_2} \cdots (r - r_k)^{m_k}$$

där $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$ och $r_i \neq r_j$ då $i \neq j$ samt $r_i \in \mathbf{C}$. Detta innebär alltså att roten r_i har multiplicitet m_i .



Lösningar till homogena ekvationer

Sats. Samtliga lösningar till den homogena ekvationen $p(D)y_h = 0$ ges av

$$y_h = q_1(x)e^{r_1x} + q_2(x)e^{r_2x} + \cdots + q_k(x)e^{r_kx},$$

där $q_i(x)$ är godtyckliga polynom så att $\text{grad } q_i \leq m_i - 1$.

Detta innebär att om r_i är en enkelrot ($m_i = 1$) så är $q_i(x) = A$ en konstant. För en dubbelrot ges $q_i(x) = Ax + B$, för en trippelrot har vi $q_i(x) = Ax^2 + Bx + C$ och så vidare. Observera att r_i så klart kan vara komplexa tal, och i så fall är $r_{i,j} = \alpha \pm i\beta$ (om vi har reella koefficienter) där r_j är den konjugerade roten och

$$C_1e^{r_ix} + C_2e^{r_jx} = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$$

för godtyckliga konstanter A och B .

I specialfallet $n = 2$ kan $p(r)$ faktoriseras som $p(r) = (r - r_1)(r - r_2)$. Enligt satsen ovan så kommer då lösningarna till den homogena ekvationen $p(D)y_h = 0$ av

$$\begin{aligned} y_h &= C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} & \text{om } r_1 \neq r_2 \text{ och} \\ y_h &= (C_1 + C_2x)e^{r_1x} & \text{om } r_1 = r_2. \end{aligned}$$

Vi visar detta specialfall. Tekniken visar hur man enkelt kan generalisera det hela till $n > 2$ genom att fortsätta upprepa användandet av integrerande faktorer på enkel form. Vi ser att

$$p(D)y_h = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D - r_1)(D - r_2)y_h = 0.$$

Låt $z = (D - r_2)y_h$. Då är alltså (enligt fallet av ordning ett)

$$(D - r_1)z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = Ae^{r_1x}.$$

Då blir

$$(D - r_2)y_h = Ae^{r_1x} \quad \Leftrightarrow \quad y_h = Be^{r_2x} + e^{r_2x} \int e^{-r_2x} Ae^{r_1x} dx.$$

Om $r_1 \neq r_2$ följer det alltså att

$$y_h = Be^{r_2x} + \frac{A}{r_1 - r_2} e^{r_1x} = C_1 e^{r_1x} + C_2 e^{r_2x}$$

och om $r_1 = r_2$ är

$$y_h = Be^{r_2x} + Axe^{r_1x} = (Ax + B)e^{r_1x}.$$



Exempel

Hitta alla lösningar till $2y'' + 3y' - 2y = 0$

Lösning. Vi skriver upp det karakteristiska polynomet $p(r) = 2r^2 + 3r - 2$ och faktorerar detta:

$$p(r) = 2 \left(r - \frac{1}{2} \right) (r + 2).$$

Rötterna är alltså $r = 1/2$ och $r = -2$ vilket ger lösningarna

$$y(x) = C_1 e^{x/2} + C_2 e^{-2x}.$$



Exempel

Hitta alla lösningar till $y''' - 3y'' + 9y' + 13y = 0$.

Lösning. Vi skriver upp det karakteristiska polynomet $p(r) = r^3 - 3r^2 + 9r + 13$ och undersöker när $p(r) = 0$:

$$p(r) = (r + 1)(r^2 - 4r + 13) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = -1, r = 2 \pm 3i.$$

Här fick vi alltså gissa en rot ($r = -1$) och polynomdividera lite. Det finns alltså komplexa rötter, men det gör inget. De homogena lösningarna ges av

$$\begin{aligned} y_h(x) &= C_1 e^{-x} + A e^{(2+3i)x} + B e^{(2-3i)x} \\ &= C_1 e^{-x} + e^{2x} (A e^{3ix} + B e^{-3ix}) \\ &= C_1 e^{-x} + e^{2x} (A \cos 3x + iA \sin 3x + B \cos 3x - iB \sin 3x) \\ &= C_1 e^{-x} + e^{2x} (C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x) \end{aligned}$$

där $C_2 = A + B$ och $C_3 = iA - iB$. Men eftersom A och B redan är godtyckliga konstanter kan vi lika gärna se C_2 och C_3 som godtyckliga konstanter. Svaret blir alltså att

$$y(x) = C_1 e^{-x} + e^{2x} (C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x).$$

Notera att det inte är nödvändigt att göra om Euler-kalkylen varje gång; du får direkt skriva upp lösningen på så kallad reell form om du vill.

**Exempel**

Hitta alla lösningar till $y^{(6)} - 3y^{(5)} + 4y^{(3)} = 0$

Lösning. Vi skriver upp det karakteristiska polynomet $p(r) = r^6 - 3r^5 + 4r^3 = (r - 2)^2(r + 1)r^3$, så de homogena lösningarna ges av

$$y_h = (C_0 + C_1x)e^{2x} + C_2e^{-x} + C_3 + C_4x + C_5x^2.$$

6.5 Lösningar till icke-homogena ekvationer

Lösningsgången är i princip likadan när vi löser alla linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter. Vi försöker summera denna.

**Lösningsschema**

Givet en ekvation $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = g$ med konstanta koefficienter gör vi normalt sett följande:

- Identifiera $p(D)$ och skriv ned det karakteristiska polynomet $p(r)$.
- Faktorisera $p(r)$ (möjligen komplext) och notera rötterna $r_1, r_2, \dots, r_k$ där $1 \leq k \leq n$ samt deras multiplicitet m_i .
- Skriv ned **alla** homogena lösningar

$$y_h = q_1(x)e^{r_1x} + q_2(x)e^{r_2x} + \dots + q_k(x)e^{r_kx},$$

där polynomet $q_i(x)$ har grad $m_i - 1$. Om någon rot r_j är komplex kan vi välja att skriva y_h på reell form med cos- och sin-termer i stället:

$$e^{\alpha x} (a(x) \cos \beta x + b(x) \sin \beta x),$$

där $r_j = \alpha \pm \beta i$ och $a(x)$ samt $b(x)$ är polynom med grad $m_j - 1$.

- Hitta **någon** partikulärlösning y_p till ekvationen.
- Formulera den allmänna lösningen $y = y_h + y_p$. Här finns obestämda konstanter.
- Kontrollera att antalet obestämda konstanter är detsamma som graden på $p(r)$. Detta *måste* stämma.
- Eventuellt bestäm konstanterna i de okända polynomet $q_1(x), q_2(x), \dots, q_k(x)$ om det finns villkor.

Det största problemet här brukar vara att hitta partikulärlösningen och vi kommer ägna en hel del tid åt detta problem. Det brukar kännas lite ad-hoc (vilket det kanske även är) och man behöver bygga upp lite känsla för vad som är lämpliga ansatser.

**Villkor på lösningar**

Observera att **hela** lösningen $y = y_h + y_p$ måste bestämmas innan några villkor sätts in för att finna konstanterna. Detta kan **inte** göras direkt på homogenlösningen.

6.6 Allmänna lösningar

För att hitta den **allmänna lösningen**, dvs den lösning som täcker alla möjliga lösningar till ekvationen, så behöver vi första hitta en partikulärlösning. När vi letar en partikulärlösning så brukar vi ofta utgå från någon slags ansats som verkar rimlig och sedan bestämma vilka värden parametrar i ansatsen måste ha. Om det går att välja parametrarna så är vi färdiga, annars måste ansatsen modifieras. Så hur vet man vad för slags ansats man ska göra? Vi kommer att fortsätta med detta på nästa föreläsning, men låt oss betrakta ett par exempel redan nu.

**Exempel**

Visa att $y = e^{x^2}$ löser ekvationen

$$y'' - 2y' + 5y = (4x^2 - 4x + 7)e^{x^2}$$

och hitta sedan en lösning så att $y(0) = y'(0) = 0$.

Lösning. Vi har redan fått ett förslag på partikulärlösning: $y_p = e^{x^2}$. Direkt derivering och insättning visar att

$$y_p'' - 2y_p' + 5y_p = (4x^2 - 4x + 7)e^{x^2}.$$

Ekvationen har det karakteristiska polynomet $p(r) = r^2 - 2r + 5$, så

$$p(r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = 1 \pm 2i.$$

Således erhåller vi de homogena lösningarna

$$y_h = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Samtliga lösningar till ekvationen ges alltså av

$$y(x) = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + e^{x^2}.$$

Vidare gäller

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 + e^0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = -1$$

och då $y'(x) = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - 2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x) + 2xe^{x^2}$,

$$y'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 + 2C_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = \frac{1}{2}.$$

Den eftersökta lösningen (den enda) ges av

$$y(x) = e^x \left(\frac{1}{2} \sin 2x - \cos 2x \right) + e^{x^2}.$$

Så när vi fick ett förslag på partikulärlösning gick det ganska enkelt. Men vad gör vi om vi inte känner till någon partikulärlösning?

**Exempel**

Hitta alla lösningar till $y''' - y'' + y' - y = x + 1$.

Lösning. Vi skriver upp det karakteristiska polynomet $p(r) = r^3 - r^2 + r - 1$ och faktorerar detta:

$$p(r) = (r - 1)(r^2 + 1) = (r - 1)(r + i)(r - i).$$

De homogena lösningarna ges alltså av

$$y_h(x) = C_1 e^x + A e^{ix} + B e^{-ix} = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

Vi söker en partikulärlösning y_p och ansätter $y_p = Cx + D$ eftersom högerledet är ett polynom av grad ett. Notera att vi här *inte* direkt använder superposition, utan ansätter allt på en gång. Det går alldeles utmärkt så länge det går att hantera ansatsen. Vi har

$$p(D)y_p = C - (Cx + D) = x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad C - D = 1 \text{ och } -C = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C = -1 \text{ och } D = -2.$$

Svaret är alltså

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x - x - 2.$$

Kapitel 7

Linjära differentialekvationer av högre ordning II

7.1 Olika typer av partikulärlösningar

Så för vissa typer av högerled kan vi hitta generella metoder för att hitta en partikulärlösning.

7.1.1 Polynom

Om högerledet består av ett polynom

$$p(D)y = q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

ansätter vi ett annat polynom som har minst samma grad som $q(x)$. Hur hög grad som behövs har att göra med hur $p(D)$ ser ut. Ansatsen är naturlig eftersom derivatan av polynom är polynom.



Exempel

Hitta en partikulärlösning till $2y'' + y' - y = 3x + 1$

Lösning. Vi ansätter $y_p(x) = Ax + B$ eftersom vi vill matcha ett första-grads polynom. Då är $y'' = 0$ och $y' = A$, så

$$A - (Ax + B) = 3x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad A - B = 1 \text{ och } A = -3 \quad \Leftrightarrow \quad A = -3 \text{ och } B = -4.$$

Partikulärlösningen ges alltså av $y_p(x) = -3x - 4$. Kontrollera att detta fungerar!
Om vissa termer "saknas" i $p(D)$ kan vi komma undan med enklare ansatser.



Exempel

Hitta en partikulärlösning till $y'' + 2y' = 3x + x^2$.

Lösning. Vi vill matcha grad 2, men ser i HL att konstant saknas och att det i VL saknas y -term. Alltså ansätter vi $y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx$ och ser att

$$6Ax + 2B + 2(3Ax^2 + 2Bx + C) = 3x + x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 6A = 1, \\ 6A + 4B = 3, \\ 2B + 2C = 0. \end{cases}$$

Alltså måste $A = 1/6$, $4B = 2$ så $B = 1/2$, och $C = -B = -1/2$. Vår partikulärlösning är alltså

$$y_p(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}.$$

Vad händer om vi gör fel ansats? Det blir inte värre än att vi hamnar i en situation där vi inte kan bestämma konstanterna. Tänk till exempel om vi inte tar med Cx -termen i ansatsen ovan. Då blir den sista ekvationen $2B = 0$, så $B = 0$. Men då är både $6A = 3$ och $6A = 1$ vilket så klart inte går. Hamnar vi här får vi göra om ansatsen! Hur? Lägg till fler termer om du inte kommer på något bättre.

7.1.2 Exponentialfunktioner

Uttryck innehållande exponentialfunktioner e^{ax} (a kan vara komplex) kan transformeras med ansatsen $z(x)e^{ax}$ vilket normalt sett reducerar fallet till något enklare. Eftersom vi återfår funktionen e^{ax} efter alla deriveringar (inte förvånande egentligen) så kan vi förkorta bort denna när den förekommer i alla termer i högerledet (eftersom $e^{ax} \neq 0$). Detta reducerar problemet till något som är enklare att hantera.



Exempel

Hitta alla lösningar till $y'' - 3y' + 2y = xe^{2x}$.

Lösning. Vi vet att $p(r) = r^2 - 3r + 2 = (r - 2)(r - 1)$. Den homogena delen får vi direkt från faktoriseringen i form av $y_h(x) = C_1e^{2x} + C_2e^x$. För att finna en partikulärlösning y_p sådan att $p(D)y_p = xe^{2x}$, så känns ansatsen $y_p = z(x)e^{2x}$ lämplig. Direkt derivering ger att

$$y'_p = (z' + 2z)e^{2x} \quad \text{och} \quad y''_p = (z'' + 2z' + 2z' + 4z)e^{2x},$$

vilket medför att

$$p(D)(ze^{2x}) = (z'' + 4z' + 4z)e^{2x} - 3(z' + 2z)e^{2x} + 2ze^{2x} = (z'' + z')e^{2x}.$$

Om detta ska bli xe^{2x} måste alltså $z'' + z' = x$. Vi söker **en** lösning, så vi ansätter därför att $z(x) = Ax^2 + Bx$, vilket ger

$$2A + 2Ax + B = x \Leftrightarrow 2A + B = 0 \text{ och } 2A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2} \text{ och } B = -1.$$

Vi får alltså $y_p(x) = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)e^{2x}$. Samtliga lösningar ges alltså av

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1e^{2x} + C_2e^x + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)e^{2x}.$$

7.1.3 Sinus och cosinus

Dessa kan behandlas på olika sätt. En variant är att betrakta dem som real- respektive imaginärdel av en komplex exponentialfunktion. Alternativt ansätts en linjärkombination av sinus och cosinus med samma frekvens som i högerledet. Dessa alternativ kan behöva modifieras om ansatsen matchar de homogena lösningarna.



Exempel

Finn alla lösningar till $y'' + y' - 6y = 2 \sin 2x$.

Lösning. Låt $p(r) = r^2 + r - 6$. De homogena lösningarna ges av

$$y_h(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$$

eftersom $p(r) = 0$ har lösningarna $r = 2$ och $r = -3$ och faktoriseringen $p(r) = (r - 2)(r + 3)$. Vi vill ha ut $2 \sin 2x$, så det är rimligt att ansätta en partikulärlösning av formen

$$y_p = A \sin 2x + B \cos 2x$$

eftersom den typen av funktioner dyker upp när man deriverar. Vi räknar ut vad som händer med ansatsen:

$$y_p'' + y_p' - 6y_p = -4A \sin 2x - 4B \cos 2x + 2A \cos 2x - 2B \sin 2x - 6A \sin 2x - 6B \cos 2x = 2 \sin 2x.$$

Vi matchar $\sin 2x$ -termer och $\cos 2x$ -termer och finner att

$$-4A - 2B - 6A = 2 \text{ och } -4B + 2A - 6B = 0.$$

Alltså är $A = -5/26$ och $B = -1/26$. Vi har därmed

$$y_p(x) = -\frac{5}{26} \sin 2x - \frac{1}{26} \cos 2x.$$

Den fullständiga lösningen ges av

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} - \frac{5}{26} \sin 2x - \frac{1}{26} \cos 2x.$$

Låt oss upprepa en uppmaning från förra föreläsningen.



Villkor på lösningar

Observera att **hela** lösningen $y = y_h + y_p$ måste bestämmas innan några villkor sätts in för att finna konstanterna i y_h . Detta kan **inte** göras direkt på homogenlösningen.



Exempel

Finn alla lösningar till $y''' - 4y'' + 5y' = 12 \cos 3x$ så att $y'(0) = 0$, $y(0) = y(2\pi) = 2$.

Lösning. Låt $p(r) = r^3 - 4r^2 + 5r$. Vi ser att

$$p(r) = r(r^2 - 4r + 5) = r(r - (2 - i))(r - (2 + i)).$$

De homogena lösningarna ges av

$$y_h(x) = C_1 + e^{2x}(C_2 \sin x + C_3 \cos x).$$

Vi vill ha ut $\cos 3x$, så det är rimligt att ansätta en partikulärlösning av formen

$$y_p = A \sin 3x + B \cos 3x$$

eftersom den typen av funktioner dyker upp när man deriverar. Vi räknar ut vad som händer med ansatsen:

$$\begin{aligned} p(D)y_p &= -27A \cos 3x + 27B \sin 3x - 4(-9A \sin 3x - 9B \cos 3x) + 5(3A \cos 3x - 3B \sin 3x) \\ &= (-12A + 36B) \cos 3x + (36A + 12B) \sin 3x. \end{aligned}$$

Vi matchar $\sin 2x$ -termer och $\cos 2x$ -termer och finner att

$$-12A + 36B = 12 \text{ och } 36A + 12A = 0.$$

Alltså är $A = -1/10$ och $B = 3/10$. Vi har alltså

$$y_p(x) = -\frac{1}{10} \sin 3x + \frac{3}{10} \cos 3x.$$

Den fullständiga allmänna lösningen ges av

$$y = C_1 + e^{2x}(C_2 \sin x + C_3 \cos x) - \frac{1}{10} \sin 3x + \frac{3}{10} \cos 3x.$$

Vi ska nu (inte tidigare) bestämma konstanterna. Vi har

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_3 + 3/10, \\ y(2\pi) = C_1 + e^{4\pi}C_3 + 3/10. \end{cases}$$

Om $y(0) = y(2\pi)$ måste alltså $C_3 = 0$. Sen är $y(0) = y(2\pi) = 2$, så $C_1 = 2 - 3/10 = 17/10$. Nu behöver vi derivera lite:

$$y'(x) = e^{2x}((2C_2 - C_3) \sin x + (C_2 + 2C_3) \cos x) - \frac{3}{10} \cos 3x - \frac{9}{10} \sin 3x$$

så $y'(0) = C_2 + 2C_3 - 3/10 = 0$ men $C_3 = 0$ så $C_2 = 3/10$. Svaret blir nu

$$y(x) = \frac{17}{10} + \frac{3}{10}e^{2x} \sin x - \frac{1}{10} \sin 3x + \frac{3}{10} \cos 3x.$$

7.1.4 Superposition

Superpositionsprincipen är principen att lösningar till linjära ekvationer kan konstrueras genom att addera lösningar till delproblem. Med andra ord, om y_1 löser $p(D)y_1 = g_1$ och y_2 löser $p(D)y_2 = g_2$ så kommer $y = y_1 + y_2$ att lösa $p(D)y = g_1 + g_2$; med andra ord: vi kan alltså lösa en del av problemet i taget. Anledningen till att detta är sant är helt enkelt linjäriteten hos ekvationen. Låt $y = y_1 + y_2$. Då gäller att

$$p(D)y = p(D)(y_1 + y_2) = p(D)y_1 + p(D)y_2 = g_1 + g_2.$$

Detta är en mycket användbar egenskap. Generellt så gäller följande.



Om

Superposition av partikulärlösningar

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_n(x)$$

består av flera termer kan även partikulärlösningen delas upp i flera delar:

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \cdots + y_{p_n}$$

enligt superpositionsprincipen och sedan kan man lösa varje $p(D)y_{p_k} = g_k$ och summera

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \cdots + y_{p_n}$$

för att finna en total partikulärlösning. Vi återkommer med exempel på detta senare.

**Exempel**

Finn alla lösningar till $y' + 3y = 2e^{-3x} + 34 \sin 5x$.

Lösning. Ekvationen är linjär och av ordning 1, så vi skulle kunna använda integrerande faktor. Men då ekvationen har konstanta koefficienter kan vi även använda den teori vi nu tagit fram. Det karakteristiska polynomet ges av $p(r) = r + 3$, så $y_h = Ce^{-3x}$ är de homogena lösningarna. För att hitta en partikulärlösning delar vi upp i två delar och utnyttjar superpositionsprincipen. Vi söker y_1 och y_2 så att $p(D)y_1 = 2e^{-3x}$ och $p(D)y_2 = 34 \sin 5x$. Vi ansätter $y_1 = Axe^{-3x}$ (varför?) och $y_2 = a \cos 5x + b \sin 5x$. Då gäller att

$$y_1' + 3y_1 = Ae^{-3x}(1 - 3x) + 3Axe^{-3x} = e^{-3x}(A - 3Ax + 3Ax) = Ae^{-3x},$$

så $A = 2$ och

$$y_2' + 3y_2 = -5a \sin 5x + 5b \cos 5x + 3a \cos 5x + 3b \sin 5x,$$

så $3b - 5a = 34$ och $3a + 5b = 0$, vilket ger att $a = -5$ och $b = 3$. Det slutgiltiga svaret blir då

$$y(x) = Ce^{-3x} + 2e^{-3x} - 5 \cos 5x + 3 \sin 5x.$$

7.2 Förskjutningsregeln

**Förskjutningsregeln**

Sats. Om $a \in \mathbb{C}$ är en konstant och $p(D)$ är en DO med konstanta koefficienter så gäller att

$$p(D)(e^{ax}z(x)) = e^{ax}p(D+a)z(x).$$

Bevis. Polynomet $p(r)$ kan alltid faktoriseras (med eventuellt komplexa rötter) som

$$p(r) = C(r - r_1)(r - r_2) \cdots (r - r_n).$$

Vi skriver

$$p(D) = C(D - r_1)(D - r_2) \cdots (D - r_n).$$

Det räcker alltså att visa förskjutningssatsen för en av dessa faktorer eftersom vi iterativt kan förflytta oss genom hela polynomet i så fall. Vi väljer $D - r_i$. Då är

$$\begin{aligned} (D - r_i)(e^{ax}z(x)) &= (e^{ax}z(x))' - r_i e^{ax}z(x) \\ &= e^{ax}z'(x) + a e^{ax}z(x) - r_i e^{ax}z(x) \\ &= e^{ax}((D + a) - r_i)z(x). \end{aligned}$$

Operatören D förskjuts alltså med a i den i :te faktorn och detta gäller för varje i .



Exempel

Låt $p(r) = r^2 + r - 2 = (r - 1)(r + 2)$. Då medför förskjutningsregeln att

$$p(D)(e^{-2x}z(x)) = e^{-2x}p(D - 2)z.$$

Så vad innebär $p(D - 2)$? Inget mer än att man ersätter r med $D - 2$ i polynomet $p(r)$:

$$p(D - 2) = (D - 2)^2 + (D - 2) - 2 = (D - 2 - 1)(D - 2 + 2) = (D - 3)D = D^2 - 3D.$$

Alltså blir

$$p(D)(e^{-2x}z(x)) = e^{-2x}p(D - 2)z = e^{-2x}(z'' - 3z').$$

Kanske kan man tycka att det verkar bökit med förskjutningsregeln, men i vissa fall underlättar den riktigt ordentligt.



Exempel

Låt $p(r) = (r - 3)^{10}$. Då kommer

$$\begin{aligned} p(D)(e^{3x}z(x)) &= (D^{10} - 30D^9 + 405D^8 - 3240D^7 + 17010D^6 - 61236D^5 + 153090D^4 \\ &\quad - 262440D^3 + 295245D^2 - 196830D + 59049)(e^{3x}z(x)). \end{aligned}$$

Hur förenklar vi detta? Ser bökit ut. Men med förskjutningsregeln blir

$$p(D)(e^{3x}z(x)) = e^{3x}p(D + 3)z = e^{3x}(D + 3 - 3)^{10}z = e^{3x}D^{10}z = e^{3x}z^{(10)}.$$

Betydligt mycket mindre arbete! Multipla rötter som ”krockar” med konstanten a i exponenten i e^{ax} brukar hanteras mycket enklare med förskjutningsregeln.

**Exempel**

Finn alla lösningar till $y''' - 3y'' + 3y' - y = 2e^x$.

Lösning. Det karakteristiska polynomet ges av $p(r) = r^3 - 3r^2 + 3r - 1$ vilket vi känner igen från Pascals triangel, så $p(r) = (r - 1)^3$ (visa detta). Alltså är

$$y_h = (Ax^2 + Bx + C)e^x$$

enligt satsen ovan. Testa att $p(D)y_h = 0$. Vi ser även att lösningarna till den homogena ekvationen krockar med högerledet så det räcker inte med en enkel ansats (detta fenomen brukar kallas *resonans*). Vi antar därför $y_p = z(x)e^x$. Förskjutningsregeln ger att

$$p(D)(z(x)e^x) = 2e^x \Leftrightarrow e^x p(D+1)z = 2e^x \Leftrightarrow p(D+1)z = 2 \Leftrightarrow D^3 z = z^{(3)} = 2$$

Vi söker **en** partikulärlösning z_p , så vi tar helt enkelt $z_p = \frac{2x^3}{6} = \frac{x^3}{3}$. Testa att detta fungerar!

Vår eftersökta partikulärlösning ges nu av $y_p = \frac{x^3}{3}e^x$. Totalt sett har vi

$$y = y_h + y_p = \left(\frac{x^3}{3} + Ax^2 + Bx + C \right) e^x.$$

**Modifierad ansats**

Om högerledet "krockar" med de homogena lösningarna kan man komma undan med att modifiera ansatsen genom att multiplicera med x^k där k är multipliciteten för roten till det karakteristiska polynomet som orsaker konflikten. Exempelvis ser vi i föregående exempel att e^x krockar med en homogen lösning eftersom $r = 1$ är en rot till $p(r)$. Dessutom är detta en trippelrot så vi måste anta $y_p(x) = Ax^3$ för att hitta en partikulärlösning. Om vi betraktar y_h ser vi att vi måste "ta oss förbi" dessa termer av grad ≤ 2 . Med ansatsen $y_p(x) = z(x)e^x$ sker detta automatiskt så denna metod är lite enklare.

**Exempel**

Lös ekvationen $y^{(4)} + 2y'' + y = \sin x$.

Lösning. Låt

$$p(r) = r^4 + 2r^2 + 1 = (r^2 + 1)^2 = (r + i)^2(r - i)^2.$$

Alltså ges de homogena lösningarna till $p(D)y_h = 0$ av

$$y_h = (C_1x + C_2)\cos x + (C_3x + C_4)\sin x.$$

Vi ser nu att vi får problem med ansatsen för högerledet eftersom $\sin x$ är en lösning till den homogena ekvationen. Att bara multiplicera med x hjälper inte heller eftersom även $x \sin x$ är en homogen lösning! Vår ansats blir

$$y_p = Ax^2 \sin x + Bx^2 \cos x.$$

Vi deriverar lite och finner att

$$\begin{aligned} p(D)y_p &= -12A \sin x - 8Ax \cos x + Ax^2 \sin x - 12B \cos x + 8Bx \sin x + Bx^2 \cos x \\ &\quad + 2(2A \sin x + 4Ax \cos x - Ax^2 \sin x + 2B \cos x - 4Bx \sin x - Bx^2 \cos x) \\ &\quad + Ax^2 \sin x + Bx^2 \cos x \\ &= -8A \sin x - 8B \cos x. \end{aligned}$$

Alltså måste $A = -1/8$ och $B = 0$. Vi har nu alltså

$$(C_1x + C_2) \cos x + (C_3x + C_4) \sin x - \frac{x^2 \sin x}{8}.$$

Alternativt kan vi betrakta "hjälp ekvationen"

$$w^{(4)} + 2w'' + w = e^{ix}$$

och sedan ta $y(x) = \operatorname{Im} w(x)$ för att hitta samma svar som ovan. Med fördel använder man här förskjutningssatsen när man finner en partikulärlösning med ansatsen $w_p(x) = z(x)e^{ix}$. Vi återkommer till denna metod nästa föreläsning.



Exempel

Lös ekvationen $y^{(6)} - 64y = 32$.

Lösning. Det karakteristiska polynomet blir $p(r) = r^6 - 64$ som har rötterna

$$r = 2 \exp\left(i \frac{\pi k}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Jämför med ekvationen $z^6 = 64$ från Grunken! Alltså ges lösningarna till den här ekvationen av

$$y_h = \sum_{k=0}^5 C_k \exp\left(2 \exp\left(i \frac{\pi k}{3}\right) x\right).$$

En partikulärlösning finner vi genom att ansätta $y_p = A$ och se att $-64A = 32$, eller ekvivalent, att $A = -1/2$, så enligt superpositionsprincipen har vi

$$y(x) = -\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^5 C_k \exp\left(2 \exp\left(i \frac{\pi k}{3}\right) x\right).$$

Vi kan formulera om detta på reell form (med andra konstanter C_i):

$$\begin{aligned} y(x) &= -\frac{1}{2} + C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + \exp\left(\frac{2x}{\sqrt{2}}\right) \left(C_3 \cos \frac{2x}{\sqrt{2}} + C_4 \sin \frac{2x}{\sqrt{2}}\right) \\ &\quad + \exp\left(-\frac{2x}{\sqrt{2}}\right) \left(C_5 \cos \frac{2x}{\sqrt{2}} + C_6 \sin \frac{2x}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

7.3 Ekvationer med icke-konstanta koefficienter

Vi avslutar med en typ av ekvation där vi har koefficienter som beror av x på ett speciellt sätt, nämligen de så kallade Eulerekvationerna. Dessa har formen

$$x^n y^{(n)}(x) + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = g(x), \quad x > 0,$$

så vi ser att varje derivata av ordning k har koefficienten $a_k x^k$. Denna speciella ekvation kan vi lösa genom att byta variabel till $t = \ln x$. Det verkar rimligt eftersom $t' = 1/x = x^{-1}$ och varje gång vi deriverar t sänks exponenten ett steg till, vilket borde kunna kompensera för x^k före $y^{(k)}$. Man kan visa att detta alltid reducerar ekvationen till en ekvation för en funktion $z(t) = y(e^t)$ som har konstanta koefficienter (och därför kan lösas med tidigare tekniker). Vi visar ett par steg. Första derivatan fås enkelt till

$$z'(t) = \frac{d}{dt} y(e^t) = y'(e^t) e^t$$

så $y'(e^t) = e^{-t} z'(t)$. Vi deriverar nu detta uttryck en gång till (både produkt och kedjeregeln):

$$z''(t) = \frac{d}{dt} (y'(e^t) e^t) = y''(e^t) e^{2t} + y'(e^t) e^t = y''(e^t) e^{2t} + z'(t)$$

så $y''(e^t) = e^{-2t} (z''(t) - z'(t))$. Sen kan vi fortsätta:

$$\begin{aligned} z'''(t) &= \frac{d}{dt} (y''(e^t) e^{2t} + y'(e^t) e^t) \\ &= y'''(e^t) e^{3t} + 2y''(e^t) e^{2t} + y''(e^t) e^{2t} + y'(e^t) e^t \\ &= y'''(e^t) e^{3t} + 3(z''(t) - z'(t)) + z'(t) \end{aligned}$$

vilket ger $y'''(e^t) = e^{-3t} (z'''(t) - 3z''(t) + 2z'(t))$ och så vidare.



Exempel

Finn alla lösningar till $x^3 y''' - 2xy' = 12 - 4x$, $x > 0$.

Lösning. Låt $t = \ln x$. Då är $x = e^t$ och vi låter $z(t) = y(e^t)$. Enligt ovan blir nu

$$x^3 y''' - 2xy' = 12 - 4x \quad \Leftrightarrow \quad z''' - 3z'' = 12 - 4e^t.$$

Vi skriver upp det karakteristiska polynomet $p(r) = r^3 - 3r^2 = r^2(r - 3)$. De homogena lösningarna ges alltså av

$$z_h(t) = C_1 e^{3t} + C_2 t + C_3.$$

Vi ansätter en partikulärlösning $z_p(t) = At^2 + Be^t$. Då blir

$$z_p''' - 3z_p'' = Be^t - 6A - 3Be^t = -2Be^t - 6A = 12 - 4e^t,$$

så $12 = -6A$ och $2B = 4$. Alltså måste $A = -2$ och $B = 2$. Vi har totalt sett lösningarna

$$z(t) = z_h(t) + z_p(t) = C_1 e^{3t} + C_2 t + C_3 - 2t^2 + 2e^t.$$

Vi byter tillbaka till variabeln x och erhåller då

$$y(x) = C_1 x^3 + C_2 \ln x + C_3 - 2 \ln^2 x + 2x.$$

7.4 Kontroll av lösningar

Vad betyder det egentligen att $p(D)y(x) = h(x)$ och, e.g., $y(0) = y'(0) = 0$? Vi har nu tagit fram verktyg för att hitta något magiskt $y(x)$ som man svarar med och får poäng på tentan. Men vad är egentligen $y(x)$? Dessa funktioner är inget annat än precis de funktioner som löser **ekvationen** $p(D)y(x) = h(x)$ i något intervall $]a, b[$ som bestäms tillsammans med $y(x)$. Lösningen uppfyller också eventuellt några givna villkor. Vi kan alltså **alltid** testa om vi verkligen har löst uppgiften genom att sätta in vårt svar i ekvationen och testa. Även om den här kontrollen inte krävs bör man genomföra den!



Exempel

Visa att $y(x) = C_1 e^{2x} + 3x^2 + \sin x$ löser ekvationen $y''' - 2y'' + y' - 2y = 6(x - x^2 - 2)$ för alla konstanter C_1 .

Lösning. Vi deriverar på och får

$$\begin{aligned}y' &= 2C_1 e^{2x} + 6x + \cos x \\y'' &= 4C_1 e^{2x} + 6 - \sin x \\y''' &= 8C_1 e^{2x} - \cos x\end{aligned}$$

och sätter vi in dessa uttryck i ekvationen får vi

$$\begin{aligned}y''' - 2y'' + y' - 2y &= 8C_1 e^{2x} - \cos x - 2(4C_1 e^{2x} + 6 - \sin x) + 2C_1 e^{2x} + 6x + \cos x \\&\quad - 2(C_1 e^{2x} + 3x^2 + \sin x) \\&= C_1(8 - 8 + 2 - 2)e^{2x} + (-1 + 1)\cos x + (2 - 2)\sin x - 12 + 6x - 6x^2 \\&= 6(x - x^2 - 2).\end{aligned}$$

Vi kan även utifrån kända lösningar konstruera ekvationer som får precis dessa lösningar.



Exempel

Hitta en differentialekvation som har precis lösningarna $(Ae^{2x} + 1)\cos x + Be^{2x}\sin x$.

Lösning. Vi kan identifiera att det är $e^{2x}(A\cos x + B\sin x)$ som är de homogena lösningarna och att $\cos x$ är en partikulärlösning. Vi börjar med att konstruera en ekvation som har korrekta homogena lösningar. Vi ser att på komplex form måste termerna $e^{(2\pm i)x}$ finnas med så det karakteristiska polynomet måste ges av $p(r) = (r - (2 + i))(r - (2 - i)) = r^2 - 4r + 5$. Således är den homogena ekvationen $y'' - 4y' + 5y = 0$. Nu vill vi att $y_p = \cos x$ ska vara en partikulärlösning så vi undersöker vilket högerled som är nödvändigt:

$$y_p'' - 4y_p' + 5y_p = -\cos x - 4(-\sin x) + 5\cos x = 4\cos x + 4\sin x.$$

Svaret blir alltså ekvationen $y'' - 4y' + 5y = 4\cos x + 4\sin x$.

7.5 Generell struktur

Följande stycke handlar om linjär algebra och kopplingen till linjära DE. Spara det till ni har läst kursen i linjär algebra.

Eftersom $p(D)$ är *linjär* kan vi addera två homogena lösningar och få en ny homogen lösning samt även multiplicera en homogen lösning med en konstant och erhålla en ny homogen lösning. Detta argument visar att mängden av homogena lösningar utgör ett vektorrum V . Detta rum är alltså mängden av alla lösningar y till ekvationen $p(D)y = 0$. I klassisk teori betraktar man V som ett *underrum* av C^n (alla n gånger kontinuerligt deriverbara funktioner), vilket är ett naturligt krav med tanke på den högsta derivatan som ingår.

Om detta kan mycket skrivas, men fokus här är på strukturen av Lösningsrummet V . Vi vet från satsen i föregående avsnitt att det i de enklaste fallen finns n stycken olika rötter som vardera ger upphov till en exponentialfunktion som homogen lösning. Finns det multipla rötter till polynomet ges homogena lösningar som polynom $q(x)$ gånger exponentialfunktioner och även här finns det precis n stycken olika sorters funktioner (exempelvis e^x och xe^x betraktas som helt olika). Detta är ingen slump utan dessa n typer av funktioner utgör en *bas* för vektorrummet V . Konstanterna i den allmänna homogena lösningen skapar alltså en *linjärkombination* av *basvektorerna*. Den allmänna homogena lösningen beskriver alltså en godtycklig vektor i rummet V .

7.6 Ansatser för partikulärlösningar

Vi avslutar med en tabell för ansatser till partikulärlösningar. Rimligheten i ansatserna kommer från att fundera över vad för slags funktioner man behöver skicka in i en DE för att få ut det högerled man vill ha. Observera att ansatsen $z(x)e^{ax}$ (med $a \in \mathbf{C}$ eventuellt) kan användas i stället för de varianter som innehåller termer e^{ax} , vilket reducerar problemet till en enklare DE för z där vi har fått bort exponentialtermen. Detta gäller även i fallet då högerledet innehåller termer av typen $e^{ax} \cos bx$ eller $e^{ax} \sin bx$. Ekvationen reduceras då till en ekvation för z där högerledet endast innehåller $\sin bx$ och/eller $\cos bx$. Kom även ihåg att man kan hitta partikulärlösningar för sådana högerled genom en komplex hjälpekvation (hur då?).

Tabell 7.1: Ansatser för partikulärlösningar.

Högerled	Ansats	Undantag ¹
$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$	$b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$	$r = 0$ rot
	$x(b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0)$	$r = 0$ dubbelrot
	$x^2(b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0)$	$r = 0$ trippelrot
	...	...
$A_1 \sin kx + A_2 \cos kx$	$B_1 \sin kx + B_2 \cos kx$	$r = \pm ik$ rot
	$x(B_1 \sin kx + B_2 \cos kx)$	$r = \pm ik$ dubbelrot
	$x^2(B_1 \sin kx + B_2 \cos kx)$	$r = \pm ik$ trippelrot
	...	...
$e^{ax}, a \in \mathbb{C}$	Be^{ax}	$r = a$ rot
	Bxe^{ax}	$r = a$ dubbelrot
	Bx^2e^{ax}	$r = a$ trippelrot
	...	...
$q(x)e^{ax}$	$z(x)e^{ax}$	inga undantag ²
$A_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + A_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$	$B_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + B_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$	$r = \alpha \pm i\beta$ rot

¹ Om undantagsfallet inträffar försöker vi med ansatsen på nästa rad.² Ger ekvation för z . Nytt högerled där e^{ax} försvunnit. Hitta *en* lösning till denna ekvation! Metodval beror på $q(x)$.

Kapitel 8

Differentialekvationer – en återblick

8.1 Differentialekvationer

Kom ihåg att en differentialekvation är en ekvation som innehåller en okänd funktion $y(x)$ och derivatorer av varierande ordning ($y'(x), y''(x)$ etc) samt andra funktioner av variabeln x :

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}, x) = 0.$$

Med en lösning till en sådan ekvation så menar vi funktionen $y(x)$ samt ett öppet intervall $]a, b[$ (möjligen oändligt) så att

$$F(y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x), x) = 0, \quad \text{for alla } x \in]a, b[.$$

8.2 Linjär ordning 1

En ekvation på formen

$$y'(x) + g(x)y(x) = h(x)$$

kallar vi för linjär. En sådan ekvation har vi löst genom att använda en integrerande faktor så att vänsterledet kan skrivas som derivatan av en produkt.



Exempel

Bestäm $g(x)$ så att x^3 är en lösning till

$$y'(x) + g(x)y(x) = x^2, \quad x > 0,$$

och finn sedan den lösning så att $y(1) = 0$.

Lösning. Om $y(x) = x^3$ ska vara en lösning måste

$$(x^3)' + g(x)x^3 = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad g(x)x^3 = -2x^2 \quad \Leftrightarrow \quad g(x) = -\frac{2}{x},$$

där vi utnyttjat att $x > 0$ vid divisionen. Vi ska alltså lösa

$$y' - \frac{2}{x}y = x^2, \quad x > 0.$$

En integrerande faktor ges av $e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}$, $x > 0$. Vi multiplicerar ekvationen med denna och finner att, för $x > 0$,

$$y' - \frac{2}{x}y = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx} \left(y \frac{1}{x^2} \right) = x^2 \frac{1}{x^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{x^2} = x + C \quad \Leftrightarrow \quad y = x^3 + Cx^2,$$

där C är en godtycklig konstant. Vi söker speciellt den lösning som uppfyller

$$0 = y(1) = 1 + C \quad \Leftrightarrow \quad C = -1.$$

Svar: $y(x) = x^3 - x^2$, $x > 0$.

8.3 Ickelinjär ordning 1

Om ekvationen är av ordning 1 men inte linjär är problemet betydligt svårare. Men vissa typer av ekvationer kan vi fortfarande hantera hyfsat generellt. En ekvation kallas separabel om den kan skrivas på formen

$$g(y)y' = h(x).$$

Vi löser dessa genom att integrera båda sidor med syfte på x och göra ett variabelbyte i vänsterledet, så att

$$g(y)y' = h(x). \quad \Leftrightarrow \quad \int g(y) dy = \int h(x) dx \quad \Leftrightarrow \quad G(y) = H(x) + C,$$

där $G' = g$ och $H' = h$. Vi behöver sedan lösa denna ekvation genom att invertera funktionen G .



- (i) Tänk på att när ekvationen $F(y, y', x) = 0$ skrivs om på formen ovan så kan det hända att vi tappar ekvivalens av olika skäl (oftast noll-divisioner). När det sker så kan det dyka upp andra typer av lösning. Var försiktig!
- (ii) När vi löser $G(y) = H(x) + C$ för att finna lösningen y så kan det dyka upp båda olika uttryck för lösningen y (tänk till exempel $y^2 = \dots$) och krav på x för att det ska gå att invertera $G(y)$.



Exempel

Lös ekvationen $xyy' = 1$ då (a) $y(-1) = \sqrt{2}$ (b) $y(2) = -1$.

Lösning. Ekvationen är separabel ty

$$xyy' = 1 \quad \Leftrightarrow \quad yy' = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$$

Divisionen med x medför att vi endast kan ha lösningar för endera $x < 0$ eller för $x > 0$. Inget intervall där en lösning är definierad kommer innehålla $x = 0$. Vi integrerar ekvationen och finner att

$$yy' = \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y^2}{2} = C + \ln|x| \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 2C + \ln x^2.$$

Detta är nog det enklaste stället att bestämma konstanten, så om $y(-1) = \sqrt{2}$ så kommer

$$2 = 2C + \ln(-1)^2 = 2C + \ln 1 = 2C \quad \Leftrightarrow \quad C = 1.$$

Vidare så måste

$$2C + \ln x^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x^2 \geq -2C \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \geq e^{-2C} \quad \Leftrightarrow \quad |x| \geq e^{-C}$$

ty $\ln$ är strängt växande. Nu gäller att

$$y^2 = 2C + \ln x^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm \sqrt{2C + \ln x^2}.$$

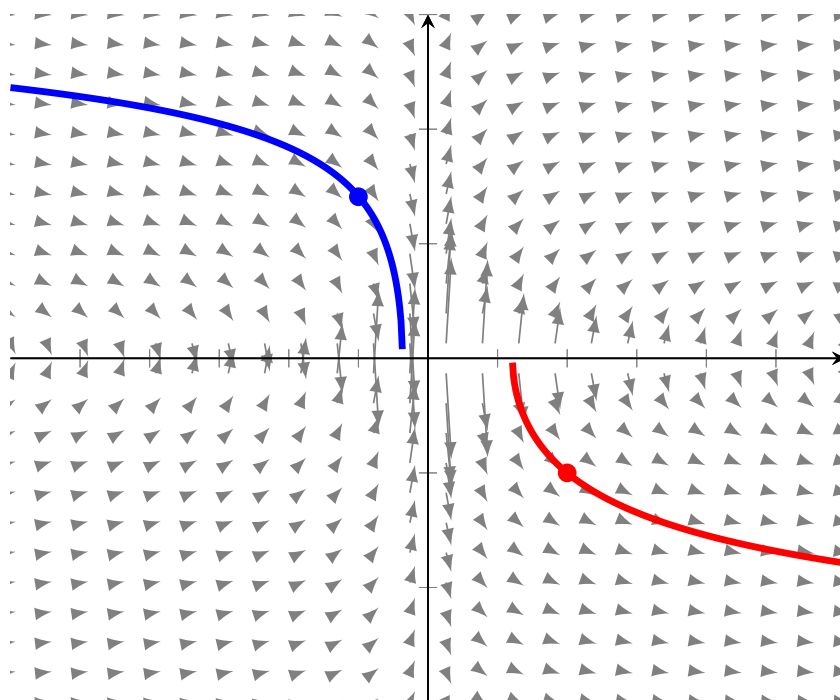
Eftersom $y(-1) = \sqrt{2} > 0$ så måste $y = \sqrt{2 + \ln x^2}$ och vi måste välja $] -\infty, -e^{-1}[$ som definitionsmängd. Varför strikt gräns vid $x = e^{-1}$? Fundera över hur differentialekvationen annars skulle tolkas med tanke på definitionen på derivata (gränsvärdet). Vi söker dessutom (i denna kurs) alltid en lösning på ett *öppet* intervall.

Om $y(2) = -1$ så behöver vi välja $x > 0$ till att börja med. Konstanten bestämmer vi genom

$$(-1)^2 = 2C + \ln 2^2 \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{1}{2} - \ln 2.$$

Eftersom $y(2) < 0$ så ges lösningen av

$$y = -\sqrt{1 - 2\ln 2 + \ln x^2} = -\sqrt{1 + \ln\left(\frac{x^2}{4}\right)}, \quad x > e^{-1/2 + \ln 2} = 2e^{-1/2}.$$



8.4 Linjär högre ordning

Linjära ekvationer av högre ordning har formen

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x), \quad x \in]a, b[,$$

där $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ och g är lagom snälla funktioner. Vi kan uttrycka vänsterledet i termer av en differentialoperator

$$p(D) = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x).$$



Sats. Samtliga lösningar till $p(D)y = g$ kan delas upp i två delar: $y = y_h + y_p$, där den **homogena lösningen** y_h löser ekvationen $p(D)y_h = 0$ och **partikulärlösningen** y_p är *någon* lösning till $p(D)y_p = g$.

Det generella fallet är svårt. Låt oss betrakta fallet när koefficienterna är konstanta.

8.4.1 Konstanta koefficienter

Med konstanta koefficienter blir $p(D)$ ett polynom i D . Polynomet $p(r)$ kallas differentialoperatorns *karakteristiska polynom*:

$$p(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = a_n (r - r_1)^{m_1} (r - r_2)^{m_2} \cdots (r - r_k)^{m_k},$$

där $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$ och $r_i \neq r_j$ då $i \neq j$ samt $r_i \in \mathbf{C}$. Detta innebär alltså att roten r_i har multiplicitet m_i .



Lösningar till homogena ekvationer

Sats. Samtliga lösningar till den homogena ekvationen $p(D)y_h = 0$ ges av

$$y_h = q_1(x)e^{r_1 x} + q_2(x)e^{r_2 x} + \cdots + q_k(x)e^{r_k x},$$

där $q_i(x)$ är godtyckliga polynom så att $\text{grad } q_i \leq m_i - 1$.

Notera följande specialfall.

- (i) r_i enkelrot ($m_i = 1$) $\Rightarrow q_i(x) = A$ en konstant.
- (ii) r_i dubbelrot ($m_i = 2$) $\Rightarrow q_i(x) = Ax + B$ polynom av grad 1.
- (iii) r_i trippelrot ($m_i = 3$) $\Rightarrow q_i(x) = Ax^2 + Bx + C$ polynom av grad 2.
- (iv) Om $r_{i,j} = \alpha \pm i\beta$ (om vi har reella koefficienter) där $r_j = \bar{r}_i$ är den konjugerade roten så är

$$C_1 e^{r_i x} + C_2 e^{r_j x} = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$$

för godtyckliga konstanter A och B . Är det komplexa multipelrötter ersätts A och B av polynom av högre grad.

**Exempel**

Hitta alla lösningar till $y''' + 4y'' + 4y' = 12e^{-2x}$ så att $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 2$.

Lösning. Det karakteristiska polynomet ges av

$$p(r) = r^3 + 4r^2 + 4r = r(r^2 + 4r + 4) = r(r + 2)^2.$$

Rötterna är alltså $r = 0$ och $r = -2$. Enligt sats ges nu samtliga lösningar till den homogena ekvationen $p(D)y_h = 0$ av

$$y_h(x) = C_1 + (C_2 + C_3x)e^{-2x}.$$

Vi söker nu en partikulärlösning $y_p(x)$. Lämplig ansats är till exempel $y_p(x) = z(x)e^{-2x}$. Förskjutningsregeln visar nu att

$$\begin{aligned} p(D)y_p &= p(D)(ze^{-2x}) = e^{-2x}p(D-2)z = e^{-2x}(D-2)(D-2+2)^2z \\ &= e^{-2x}(D-2)z'' = e^{-2x}(z''' - 2z''). \end{aligned}$$

Detta uttryck insatt i ekvationen medför att

$$p(D)y_p = 12e^{-2x} \quad \Leftrightarrow \quad z''' - 2z'' = 12.$$

En lösning $z(x)$ till denna ekvation finner vi genom ansatsen $z(x) = Ax^2$, ty

$$0 - 4A = 12 \quad \Leftrightarrow \quad A = -3,$$

så $z = -3x^2$ och $y_p = -3x^2e^{-2x}$. Den allmänna lösning till ekvationen ges därmed enligt superpositionsprincipen av

$$y(x) = C_1 + (C_2 + C_3x - 3x^2)e^{-2x}.$$

Alltså blir

$$y'(x) = e^{-2x}(-2C_2 - 2C_3x + 6x^2 + C_3 - 6x)$$

och därmed finner vi att

$$y(0) = C_1 + C_2 = 1 \quad \text{och} \quad y'(0) = -2C_2 + C_3 = 0.$$

Vidare är $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = C_1 = 2$, så $C_2 = 1 - C_1 = -1$ och $C_3 = 2C_2 = -2$. De eftersökta lösningarna ges därmed av

$$y(x) = 2 - (1 + 2x + 3x^2)e^{-2x}.$$

Svar: $y(x) = 2 - (1 + 2x + 3x^2)e^{-2x}$.

Låt oss återvända till ett exempel från förra föreläsningen.

**Exempel**

Finn alla lösningar till $y'' + y' - 6y = 2 \sin 2x$.

Lösning. Låt $p(r) = r^2 + r - 6$. De homogena lösningarna ges av

$$y_h(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$$

eftersom $p(r) = 0$ har lösningarna $r = 2$ och $r = -3$ och faktoriseringen $p(r) = (r - 2)(r + 3)$. Eftersom $\sin 2x = \operatorname{Im} e^{2ix}$ betraktar vi ekvationen $p(D)u = 2e^{2ix}$. Vi byter namn på funktionen till u för att inte blanda ihop det med y som är den reella lösningen vi söker i slutändan. För partikulärlösningen använder vi förskjutningssatsen och ansatsen $u_p(x) = z(x)e^{2ix}$:

$$\begin{aligned} p(D)(z(x)e^{2ix}) = 2e^{2ix} &\Leftrightarrow e^{2ix}p(D + 2i)z(x) = 2e^{2ix} \\ &\Leftrightarrow p(D + 2i)z(x) = 2 \\ &\Leftrightarrow (D - 2 + 2i)(D + 3 + 2i)z = 2 \\ &\Leftrightarrow (D^2 + (1 + 4i)D - 10 + 2i)z = 2. \end{aligned}$$

Detta ser riktigt bökt ut men vi söker bara **en** partikulärlösning, så vi ansätter $z_p = A$. Då är $(-10 + 2i)A = 2$, eller $A = -\frac{5}{26} - \frac{1}{26}i$. Alltså,

$$\begin{aligned} u_p(x) = z_p(x)e^{2ix} &= \left(-\frac{5}{26} - \frac{1}{26}i\right)(\cos 2x + i \sin 2x) \\ &= \frac{-5 \cos 2x + \sin 2x}{26} - i \frac{5 \sin 2x + \cos 2x}{26}. \end{aligned}$$

Vi finner nu vår sökta partikulärlösning genom att ta $y_p = \operatorname{Im} u_p(x)$, vilket stämmer överens med vad vi tog fram ovan med den reella metoden. Observera att vi här på köpet även får en partikulärlösning för högerledet $\cos 2x$ (hur?). Detta alternativ bygger på att ekvationen är linjär så superpositionsprincipen fungerar och vi kan dela upp i real- och imaginärdel.

Det är absolut inget krav att använda förskjutningsregeln i exemplet ovan. Det går lika bra att direkt derivera ansatsen och sätta in i ekvationen. Testa detta!

8.4.2 Variabla koefficienter

Det generella fallet med variabla koefficienter,

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x),$$

innebär att faktorerna före varje derivata tillåts bero på x . Mycket svårt att lösa i det generella fallet. Egenskaper som endast har med linjäritet att göra gäller fortfarande (superposition och så vidare). Däremot är det svårt att karakterisera samtliga homogena lösningar samt det kan även vara svårt att hitta någon partikulärlösning.



Generellt sett finns det *ingen* karakteristisk ekvation för fallet med variabla koefficienter.

Vi har ett specialfall där vi genom en enkel substitution kan transformera ekvationen till en ekvation med konstanta koefficienter.



Euler-ekvationer

Ekvationer på formen

$$x^n y^{(n)}(x) + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = g(x),$$

kallas för Euler-ekvationer. Dessa karakteriseras av att varje derivata av ordning k har koefficienten $a_k x^k$. Denna speciella ekvation kan vi lösa genom att byta variabel till $t = \ln x$. Exempelvis blir då, med $z(t) = y(e^t)$,

$$y'(e^t) = e^{-t} z'(t), \quad y''(e^t) = e^{-2t} (z''(t) - z'(t)), \quad y'''(e^t) = e^{-3t} (z'''(t) - 3z''(t) + 2z'(t)),$$

och så vidare till följd av kedjeregeln. Insättning i differentialekvationen ger nu en ekvation för z med konstanta koefficienter.

8.5 Integralekvationer

Vi löser i allmänhet integralekvationer genom att derivera dessa till den punkten att vi har en ren differentialekvation istället. Innan varje derivering bestämmer vi ett villkor på y för att bestämma integrationskonstanter senare.



En integralekvation har *en* lösning. Eventuella konstanter *måste* bestämmas.



Exempel

Lös $\int_0^x \int_u^1 y(t) dt du - \frac{1}{4} y(x) = x - \frac{x^2}{2}.$

Lösning. Vi ser att $x = 0$ ger $y(0) = 0$. Derivering ger att

$$\int_x^1 y(t) dt - \frac{1}{4} y'(x) = 1 - x.$$

Här ser vi att $y'(1) = 0$ och ytterligare en derivering visar att

$$-y(x) - \frac{1}{4} y''(x) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad y''(x) + 4y(x) = 4.$$

Linjär ekvation av ordning två med karakteristiskt polynom $p(r) = r^2 + 4 = (r + 2i)(r - 2i)$. De homogena lösningarna (på reell form) ges av

$$y_h = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Vi finner en partikulärlösning genom ansatsen $y_p = A$ som ger att $A = 1$. Den allmänna lösningen (till differentialekvationen) ges alltså av

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 1.$$

Nu måste *måste* **måste** vi bestämma konstanterna. Vi ser att

$$y(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = -1$$

och då $y'(x) = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x$ så

$$y'(1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2C_1 \sin 2 + 2C_2 \cos 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = -\frac{\sin 2}{\cos 2} = -\tan 2.$$

Svar: $y(x) = 1 - \cos 2x - \tan 2 \cdot \sin 2x$.

Kapitel 9

Generaliserade integraler

9.1 Generaliserade integraler

Vi har stött på begreppet tidigare när vi diskuterat Riemannintegraler i föregående kurs. Denna gång kommer vi lite mer att fokusera på frågan om en integral *konvergerar* eller *divergerar*. Inte lika mycket på vad det exakta värdet blir. Låt oss börja med att definiera vad vi menar med en generaliserad integral.



Definition. Låt f vara kontinuerlig på $]a, b[$. En integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

säges vara generaliserad i a om $a = -\infty$ eller om $f(x)$ är obegränsad då $x \rightarrow a^+$, samt generaliserad i b om $b = \infty$ eller om $f(x)$ är obegränsad då $x \rightarrow b^-$.

Vi säger helt enkelt att en integral är generaliserad i en punkt om det uppstår problem med begränsningen i punkten. Notera att kravet på att f är kontinuerlig på $]a, b[$ är starkare än nödvändigt. Vi skulle kunna nöja oss med att kräva att f är Riemannintegrabel på $]a, b[$ (eller mer korrekt på alla slutna delintervall av $]a, b[$).



Exempel

(i) Integralen $\int_2^7 \frac{1}{x} dx$ är inte generaliserad.

(ii) Integralen $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$ är inte generaliserad (fundera en sväng..).

**Exempel**

- (i) Integralen $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$ är generaliserad i $+\infty$.
- (ii) Integralen $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx$ är generaliserad i både $-\infty$ och i 0.
- (iii) Integralen $\int_0^2 \frac{\ln x}{x-2} dx$ är generaliserad i både 0 och i 2.

Så hur menar vi då att vi ska hantera generaliserade integraler?



Definition. Om f är kontinuerlig på $]a, b[$ så definierar vi den *generaliserade* integralen enligt

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{s \rightarrow a^+} \int_s^c f(x) dx + \lim_{t \rightarrow b^-} \int_c^t f(x) dx, \text{ där } a < c < b,$$

om båda gränsvärdena existerar ändligt (oberoende av varandra).

Man kan ganska enkelt visa att valet av c inte påverkar resultatet (varför?). Vi tar med båda potentiellt generaliserade punkterna på en gång, men i fallet att integralen inte är generaliserad sammanfaller gränsvärdet med den klassiska definitionen på Riemannintegralen. Detta ligger också till grund för följande sats.

**Linjäritet**

Sats. Om $\int_a^b f(x) dx$ och $\int_a^b g(x) dx$ existerar (som ändliga gränsvärden) så gäller för konstanter c_1 och c_2 att

$$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x)) dx = c_1 \int_a^b f(x) dx + c_2 \int_a^b g(x) dx.$$

Vi använder ofta denna sats genom att helt enkelt dela upp generaliserade integraler när vi känner för det och så länge alla integraler vi får ut är konvergenta så var uppdelningen korrekt. När vi säger att en generaliserad integral existerar använder vi ibland begreppet *konvergent*.



Definition. Om den generaliserade integralen existerar kallar vi den för *konvergent*. I de fall där något av gränsvärdena inte existerar kallar vi integralen för *divergent*.

Värt att notera är att en ”vanlig” Riemann-integral av en Riemannintegrabel funktion på ett intervall $[a, b]$ självklart är konvergent.

**Exempel**

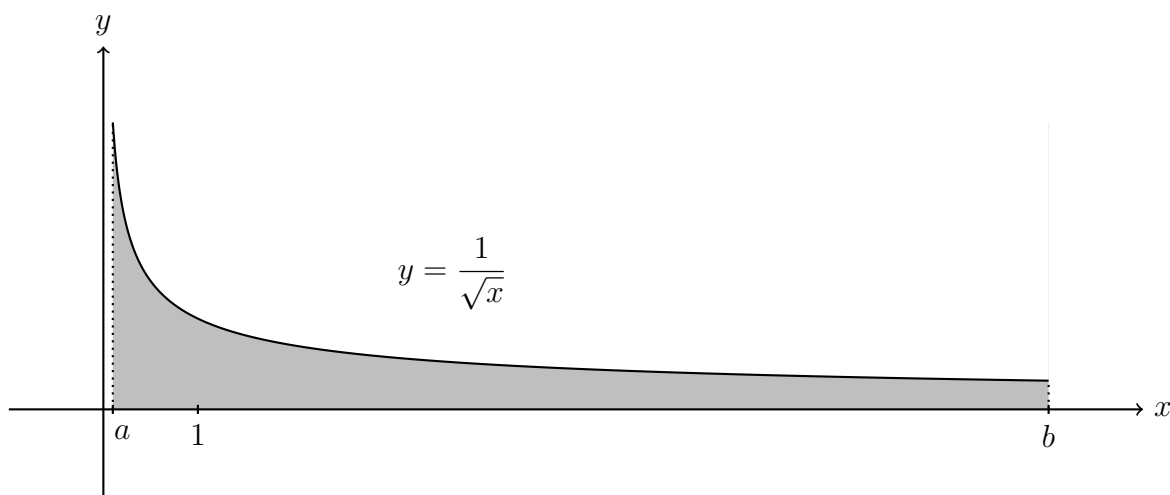
Är $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ konvergent?

Lösning. Eftersom integranden är kontinuerlig på $[-1, 1]$ (ett slutet begränsat intervall) så är integralen konvergent (och blir faktiskt $\pi/2$ även om detta inte är nödvändigt att veta för att svara på frågan).

**Exempel**

Undersök om (den generaliserade) integralen $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ är konvergent.

Lösning. Vi börjar med att skissa den area vi kan tolka integralen som.



Integralen är generaliserad i både $x = 0$ och i ∞ . Vi behöver alltså göra två undersökningar. Vi börjar med 0 och väljer $c = 1$:

$$\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_a^1 = 2 - 2\sqrt{a} \rightarrow 2, \quad \text{då } a \rightarrow 0^+.$$

Mot $a = 0$ går det alltså att definiera integralen. Vad händer i $b = \infty$? Vi undersöker:

$$\int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_1^b = 2\sqrt{b} - 2 \rightarrow \infty, \quad \text{då } b \rightarrow \infty.$$

Alltså divergerar $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ och då är även hela integralen i frågan divergent. Det räcker alltså i det här fallet att undersöka den andra biten eftersom den är divergent. Har man en aning om att något är divergent bör man börja med den delen.

**Exempel**

Undersök om $\int_0^\infty \cos x \, dx$ är konvergent.

Lösning. Vi vet hur cosinus ser ut och det är endast i $b = \infty$ integralen är generaliserad. Utan att tänka så mycket kan vi direkt från definitionen testa:

$$\int_0^b \cos x \, dx = [\sin x]_0^b = \sin b \rightarrow ?, \quad \text{då } b \rightarrow \infty.$$

Gränsvärdet saknas alltså i detta fall i stället för att bli oändligt stort. Integralen divergerar ändå.

**Mer villkorlig konvergens; symmetri**

Här kan man kanske fundera lite över hur arean är fördelad. Cosinus är en periodisk funktion som befinner sig lika mycket ovanför x -axeln som under, borde då inte den positiva och negativa arean ta ut varandra och integralen bli noll? Svaret är "mjaa.." Enligt definitionen ovan så är integralen divergent. Inga tveksamheter alls. **Divergent.** Vill vi att svaret ska bli noll (pga av area-argumentet) måste vi definiera begreppet konvergent integral på något annat sätt. Detta kan göras och man pratar då om (ännu mer) *villkorligt* konvergenta integraler. Cauchys principalvärde är ett exempel som används på intervall symmetriska kring $x = 0$:

$$\text{p.v. } \int_{-a}^a f(x) \, dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \left(\int_{-a}^{-\epsilon} f(x) \, dx + \int_{\epsilon}^a f(x) \, dx \right).$$

Detta gränsvärde kan existera även då integralen inte är konvergent som vi definierat det tidigare. Betrakta exempelvis $f(x) = 1/x$ för $x \neq 0$.

För att ta bort dessa avarter av möjlig konvergens introducerar vi begreppet *absolutkonvergens*.

9.2 Absolutkonvergens

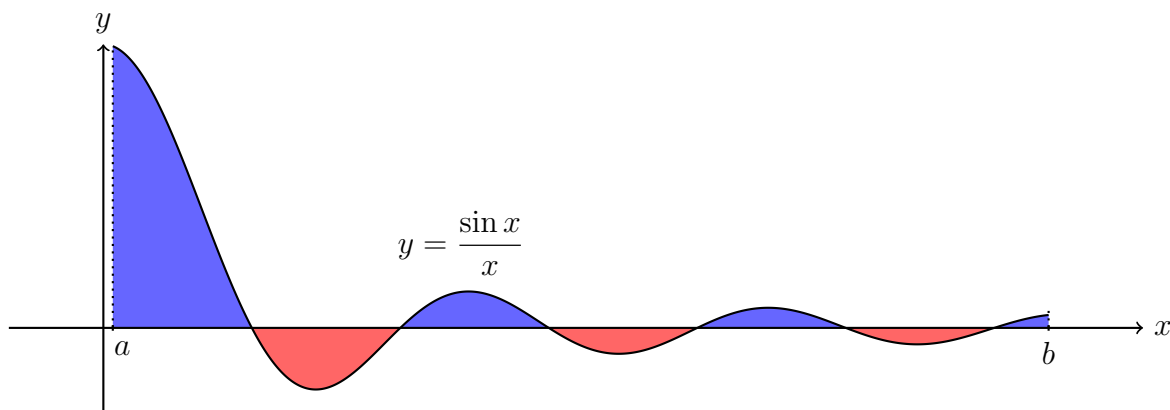
**Absolutkonvergens**

Definition. Om $\int_a^b |f(x)| \, dx$ är konvergent kallar vi $\int_a^b f(x) \, dx$ för *absolutkonvergent*.

Om vi tänker tillbaka på areatolkningen av Riemannintegralen så skulle till exempel

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x} \, dx$$

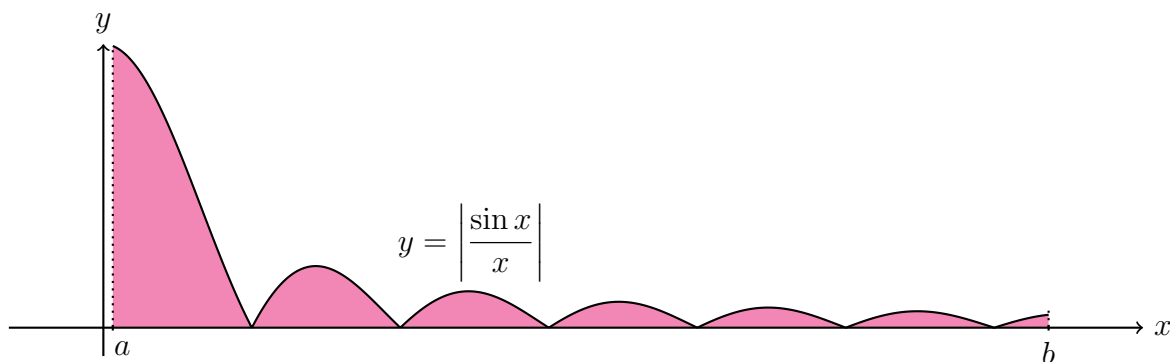
bli den skuggade arean nedan, där vi tar hänsyn till tecknet på arean så att area ovanför x -axeln räknas med plus och area under x -axeln räknas med minus.



Om vi istället betraktar

$$\int_a^b \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$$

så kommer all area att ligga ovanför x -axeln. Det som hänt är att varje del som tidigare låg under x -axeln nu har speglats så den istället ligger ovanför x -axeln.



Utifrån detta kan det tyckas vara ganska självklart att

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

men kom ihåg att vi vill arbeta med generaliserade integraler. Som tur är kommer inte intuitionen ovan att leda oss fel! Följande resultat garanterar att absolutkonvergens medför konvergens och att olikheten ovan gäller även för generaliserade integraler.



(i) Om $\int_a^b |f(x)| dx$ är konvergent så är $\int_a^b f(x) dx$ konvergent.

(ii) Om $\int_a^b f(x) dx$ är absolutkonvergent gäller $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

Olikheten i punkt (ii) är nyckeln till att visa att utsagan i punkt (i) gäller, något som inte är självklart. Följande resultat visar varför detta är sant.



- (i) Om $f(x) \geq 0$ för $a < x < b$ så existerar alltid gränsvärdena $\lim_{s \rightarrow a^+} \int_s^c f(x) dx$ och $\lim_{t \rightarrow b^-} \int_c^t f(x) dx$ om vi tillåter resultatet ∞ .
- (ii) Speciellt gäller föregående för $|f(x)|$.

Vi överlämnar till boken att bevisa påståendena



Definition. Om $f \geq 0$ och $\int_a^b f(x) dx$ är divergent skriver vi ibland $\int_a^b f(x) dx = \infty$.

Detta betyder **inte** att integralen är konvergent, utan bara ett kortare sätt att ange att integralen av en icke-negativ funktion divergerar. Vi kan inte skriva på detta sätt om inte $f(x) \geq 0$ (tänk till exempel på exemplet med $f(x) = \cos x$ vi såg tidigare).



Exempel

Visa att $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ är konvergent.

Lösning. Tricket är att partialintegrera:

$$\int_1^b x^{-1} \sin x dx = [-x^{-1} \cos x]_1^b - \int_1^b \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Integralen i högerledet är absolutkonvergent eftersom

$$\int_1^b \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| dx \leq \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = 1 - \frac{1}{b} \rightarrow 1$$

då $b \rightarrow \infty$. Alltså är integralen vi startade med konvergent eftersom $\frac{\cos b}{b} - \cos 1 \rightarrow -\cos 1$ då $b \rightarrow \infty$. Man kan också visa att integralen inte är absolutkonvergent (man blir då tvungen att analysera lite noggrannare hur $x^{-1}|\sin x|$ ser ut för $1 < x < \infty$).

9.3 Jämförelsesatser

Tekniken som används ovan för att konstatera att $\frac{\cos x}{x^2}$ är absolutkonvergent är en mycket användbar jämförelseprincip. Låt oss formulera den mer generellt.



Sats. Om $0 \leq f(x) \leq g(x)$ för $a < x < b$ så gäller $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$. Speciellt gäller att:

$$(i) \int_a^b g(x) dx \text{ konvergent} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \text{ konvergent.}$$

$$(ii) \int_a^b f(x) dx \text{ divergent} \Rightarrow \int_a^b g(x) dx \text{ divergent.}$$



Exempel

Är $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^3} dx$ konvergent?

Lösning. Vi vet från grundkursen att $\ln x \leq x - 1$ för $x > 1$, så $\ln x \leq x$ är också sant för $x > 1$. Således måste

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^3} dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx < \infty$$

eftersom $\int_1^b \frac{1}{x^2} dx = 1 - \frac{1}{b} \rightarrow 1$ då $b \rightarrow \infty$. Vi har nu enligt jämförelsesatsen ovan visat att integralen i fråga är konvergent.



Exempel

Avgör om $\int_0^1 \frac{3\sqrt{x}}{x + 2x^2} dx$ är konvergent.

Lösning. Vi ser att för $0 \leq x \leq 1$:

$$\frac{3\sqrt{x}}{x + 2x^2} = \frac{3}{\sqrt{x} + 2x\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{3}{1 + 2x} \leq \frac{3}{\sqrt{x}}$$

eftersom $1 + 2x \geq 1$. Då vi vet att $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ är konvergent och $\int_0^1 \frac{3}{\sqrt{x}} dx = 3 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ så följer det av föregående sats att $\int_0^1 \frac{3\sqrt{x}}{x + 2x^2} dx$ är konvergent. Ofta skriver vi detta lite mer kompakt (och slarvigt) som

$$\int_0^1 \frac{3\sqrt{x}}{x + 2x^2} dx \leq \int_0^1 \frac{3}{\sqrt{x}} dx < \infty$$

eftersom vi vet att $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx < \infty$.

**Exempel**

Visa att $0 \leq \int_0^\infty \frac{x}{x^4 + |\cos x|} dx \leq \frac{3}{2}$.

Lösning. Eftersom integranden är icke-negativ så måste integralen (om den existerar) vara större än noll. Vidare ser vi att

$$0 < x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{x^4 + |\cos x|} \leq \frac{x}{x^4 + 1/2} \leq 2x$$

eftersom $\cos x \geq 1/2$ om $0 < x < \pi/3$ och $\pi/3 > 1$. Således måste

$$\int_0^1 \frac{x}{x^4 + |\cos x|} dx \leq \int_0^1 2x dx = 1$$

och därmed är integralen i vänsterledet även konvergent enligt jämförelsesats. När det gäller den andra biten så gäller att

$$x \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{x^4 + |\cos x|} \leq \frac{x}{x^4} \leq \frac{1}{x^3}$$

då $|\cos x| \geq 0$, vilket visar att

$$\int_1^\infty \frac{x}{x^4 + |\cos x|} dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^3} dx = \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_1^\infty = \frac{1}{2}$$

och därmed är även integralen i vänsterledet konvergent enligt jämförelsesats. Totalt sett har vi nu visat att

$$0 \leq \int_0^\infty \frac{x}{x^4 + |\cos x|} dx \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

samt att integralen i fråga är konvergent.

Vi jämför ofta med uttryck av formen $x^{-\alpha}$, så följande exempel är bra att komma ihåg.

**Vanliga jämförelsefunktioner**

Följande påståenden gäller:

(i) $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx < \infty$ om och endast om $\alpha < 1$;

(ii) $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx < \infty$ om och endast om $\alpha > 1$.

Beviset av påståendena ovan handlar bara om att räkna ut integralerna. Vi ser att om $\alpha \neq 1$:

$$\int_a^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_a^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha} \rightarrow \frac{1}{1-\alpha}$$

då $a \rightarrow 0$ om och endast om $\alpha < 1$. Om $\alpha > 1$ blir den andra termen oändlig. Vad händer då när $\alpha = 1$? Vi undersöker:

$$\int_a^1 \frac{1}{x} dx = [\ln |x|]_a^1 = -\ln a \rightarrow \infty \quad \text{då } a \rightarrow 0^+.$$

Integralen är alltså inte konvergent i detta fall.

Fallen för $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ hanteras på samma sätt. Kortfattat ser vi att

$$\int_1^b \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^b = \frac{b^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} \rightarrow \frac{-1}{1-\alpha}$$

om och endast om $\alpha > 1$. Om $\alpha = 1$ blir det en logaritm analogt med ovan:

$$\int_1^b \frac{1}{x} dx = [\ln |x|]_1^b = \ln b \rightarrow \infty \quad \text{då } b \rightarrow \infty.$$



Exempel

Är $\int_1^\infty \frac{3\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}} dx$ konvergent?

Lösning. Notera att

$$\frac{3\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}} = \frac{3}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1+2/\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

eftersom vi ser att om $x \geq 1$ så gäller att

$$1 + \frac{2}{\sqrt{x}} \leq 3.$$

Således kommer

$$\int_1^\infty \frac{3\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}} dx \geq \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \infty,$$

så integralen i vänsterledet är divergent enligt jämförelsesats.

9.4 Jämförelse på gränsvärdesform

Man kan även nöja sig med att undersöka hur funktionerna beter sig lokalt kring de generaliserade punkterna. Mer precist kan vi göra följande.



Sats. Låt f och g vara kontinuerliga funktioner sådana att:

- (i) $f(x) \geq 0$ och $g(x) \geq 0$, eller $f(x) \leq 0$ och $g(x) \leq 0$, på $]a, b[$;
- (ii) $\int_a^b f(x) dx$ och $\int_a^b g(x) dx$ är generaliserade **endast** i $x = b$;
- (iii) $0 < \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$.

Då gäller att

$$\int_a^b f(x) dx \text{ är konvergent} \Leftrightarrow \int_a^b g(x) dx \text{ är konvergent.}$$

Det faktum att gränsvärdet som definierar den generaliserade integralen existerar (möjligen lika med ∞) följer för att det är icke-negativa funktioner vi arbetar med (eller mer korrekt att funktionerna inte växlar tecken). Att vi kräver att gränsvärdet för kvoten f/g ligger strikt mellan 0 och ∞ innebär att f och g beter sig ungefär likadant när vi närmar oss b . Då förefaller det rimligt att båda integralerna endera konvergerar eller divergerar. Ett noggrannare bevis återfinnes i boken.

På samma sätt kan vi göra om integralerna endast är generaliserade i $x = a$. Om så är fallet och

$$0 < \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$$

så är endera båda integralerna konvergenta eller divergenta.



Exempel

Avgör om $\int_0^1 \frac{3\sqrt{x}}{x+2x^2} dx$ är konvergent.

Lösning. Vi löste detta problem tidigare med den första jämförelsesatsen, men låt oss göra om lösningen med jämförelsesatsen på gränsvärdesform istället (som jämförelse...). Integralen är endast generaliserad i 0 och

$$0 \leq \frac{3\sqrt{x}}{x+2x^2} = \frac{\sqrt{x}}{x} \cdot \frac{3}{1+2x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \underbrace{\frac{3}{1+2x}}_{\substack{\rightarrow 3 \in]0, \infty[\\ \text{då } x \rightarrow 0^+}},$$

så enligt jämförelsesatsen på gränsvärdesform gäller att

$$\int_0^1 \frac{3\sqrt{x}}{x+2x^2} dx \text{ är konvergent} \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \text{ är konvergent.}$$

Den sista integralen är konvergent (känd jämförelseintegral), så integralen given i exemplet är också konvergent.

**Exempel**

Avgör om $\int_1^\infty (1 - e^{1/x}) \sin \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ är konvergent.

Lösning. Eftersom $x > 0$ vet vi att $e^{1/x} > 1$ så den första faktorn i integranden är negativ medan för stora x kommer $\sin \frac{1}{\sqrt{x}}$ att vara positiv. Vi Maclaurinutvecklar (i variabeln $t = 1/x$ respektive $s = 1/\sqrt{x}$) och ser att

$$\begin{aligned} (1 - e^{1/x}) \sin \frac{1}{\sqrt{x}} &= \left(1 - 1 - \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{x\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x^2\sqrt{x}}\right). \end{aligned}$$

Vi jämför med $-\frac{1}{x^{3/2}}$ som är negativ (men så länge f och g har samma tecken går allt bra i satsen ovan) och ser att

$$\frac{(1 - e^{1/x}) \sin \frac{1}{\sqrt{x}}}{-1/x^{3/2}} = 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow 1, \quad \text{då } x \rightarrow \infty$$

och således konvergerar integralen i fråga om och endast om $\int_1^\infty \frac{-1}{x^{3/2}} dx$ konvergerar enligt jämförelsesatsen på gränsvärdesform. Svaret är alltså konvergent eftersom den sista integralen är känt konvergent (se jämförelsefunktionerna ovan).

**Exempel**

Avgör om $\int_0^1 \frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{x\sqrt{x}} dx$ är konvergent.

Lösning. Eftersom $x > 0$ vet vi att $\ln(1 + \sqrt{x}) > 0$ så integranden är positiv. Integralen är generaliserad i $x = 0$ så vi Maclaurinutvecklar för att se hur beteendet ser ut:

$$\frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} + O(x)}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Det dominerande beteendet ges alltså av $1/x$ så vi jämför med denna funktion:

$$\frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{x\sqrt{x}} \cdot \frac{x}{1} = 1 + O(\sqrt{x}) \rightarrow 1, \quad \text{då } x \rightarrow 0^+.$$

Således är integralen i fråga konvergent om och endast om $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ är konvergent enligt jämförelsesatsen på gränsvärdesform. Vi vet att denna integral är divergent så $\int_0^1 \frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{x\sqrt{x}} dx$ är divergent.

**Exempel**

För vilka $\alpha > 0$ är $\int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right)^\alpha dx$ konvergent?

Lösning. Integralen är generaliserad i både 0 och ∞ . Vi hanterar en situation i taget och börjar med att undersöka

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right)^\alpha dx. \quad (9.1)$$

Vi skriver om det inre uttrycket enligt

$$\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \underbrace{\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} \right)}_{\rightarrow 1 \in]0, \infty[\text{ då } x \rightarrow 0^+}.$$

Alltså är integralen i (9.1) konvergent om och endast om

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^\alpha dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha/2}} dx$$

är konvergent enligt jämförelsesatsen på gränsvärdesform. Den sista integralen är konvergent precis då $\frac{\alpha}{2} < 1$, eller ekvivalent, $\alpha < 2$, enligt välbekänd sats om jämförelsefunktioner.

För att studera

$$\int_1^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right)^\alpha dx \quad (9.2)$$

skriver vi om integranden genom

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right)^\alpha &= x^{-\alpha/2} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} \right)^\alpha = x^{-\alpha/2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} \right)^\alpha \\ &= x^{-\alpha/2} \left(1 - \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{-1/2} \right)^\alpha = x^{-\alpha/2} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \right)^\alpha \\ &= x^{-\alpha/2-\alpha} \underbrace{\left(\frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{x}\right) \right)^\alpha}_{\rightarrow 2^{-\alpha} \in]0, \infty[\text{ då } x \rightarrow \infty}. \end{aligned}$$

Alltså är (9.2) konvergent (enligt jämförelsesats på gränsvärdesform) om och endast om

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{3\alpha/2}} dx$$

är konvergent. Denna integral konvergerar precis då $3\alpha/2 > 1$, eller ekvivalent, när $\alpha > 2/3$. Den efterfrågade integralen i uppgiften är alltså konvergent om och endast om både (9.1) och (9.2) är konvergenta. Kravet blir således $\frac{2}{3} < \alpha < 2$.

9.5 Sammanfattning

Uppgifter av typen ovan brukar vara tråkig läsning vid rättning. Det är missuppfattningar om vad som är förutsättningar och följder, slarv med att precisera att krav är uppfyllda samt missförstånd om vad jämförelsesatserna egentligen säger. Ett förslag på lösningsgång när det gäller jämförelsesatsen på gränsvärdesform följer.



Förslag på lösningsgång

1. Dela upp integralen så att varje delintegral är generaliserad i högst en punkt. Betrakta sedan en integral i taget.
2. Antag att $\int_a^b f(x) dx$ endast är generaliserad i $x = a$. Identifiera hur integranden beter sig nära $x = a$ (den punkt integralen är generaliserad i). Använd Maclaurinutvecklingar, uppskattningar eller gissningar. Vi ska visa i nästa steg att valet är vettigt.
3. Konstatera att $f(x)$ inte håller på att växla tecken nära $x = a$.
4. Antag att vi tycker $f(x)$ beter sig som $g(x)$ när $x \approx a$. Typiskt här är att vi skriver $f(x) = \frac{f(x)}{g(x)}g(x)$. Vi visar sen att om $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ så **ska** $0 < L < \infty$ gälla (om $f(x)$ är positiv nära $x = a$). Blir $L = 0$ har vi valt $g(x)$ så att $g(x)$ växer betydligt snabbare än $f(x)$. Får vi $L = \infty$ så växer $g(x)$ alldeles för långsamt. Det är alltså **viktigt** att konstatera att $0 < L < \infty$.
5. Avgör konvergens för $I = \int_a^b g(x) dx$. Om integralen blir för komplicerad kanske det finns bättre val för $g(x)$. Konstatera om integralen är konvergent eller divergent.
6. Hänvisa till jämförelsesatsen på gränsvärdesform och dra slutsatsen att $\int_a^b f(x) dx$ är konvergent precis då $\int_a^b g(x) dx$ är konvergent (vilket vi precis undersökte).

Kapitel 10

Serier ("generaliserade summor")

En funktion $s: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ brukar kallas talföljd, och vi skriver ofta s_n i stället för $s(n)$. Detta innebär alltså att för varje heltal $n \geq 0$ så är s_n något reellt tal. Andra beteckningar finns, till exempel används ofta $s[n]$ för att markera att det handlar om den *diskret* funktion (dvs en talföljd). Det är inget speciellt med $\mathbf{N}$ mer än att vi måste börja någonstans och fortsätta till oändligheten. Vi kan lika gärna tänka oss en talföljd s_n där $n = -4, -3, -2, \dots$ Eller s_n där $n = 0, 2, 4, 6, \dots$ och så vidare.



Exempel

(i) $s_n = 3^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, dvs $s_0 = 1$, $s_1 = 3$, $s_2 = 3^2$ och så vidare.

(ii) $s_n = \frac{1}{2^n}$, $n = 4, 5, 6, \dots$, dvs $s_0 = 1/16$, $s_1 = 1/32$, $s_2 = 1/64$ och så vidare.

Speciellt är vi intresserade av summor av talföljder. Om a_k är en talföljd kan vi låta

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k,$$

något vi stött på vid många tillfällen tidigare. Exempelvis som geometriska summor. Vi skapar alltså en ny talföljd s_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, från talföljden a_k , $k = 1, 2, 3, \dots$



Exempel

Exempelvis $a_k = 3^{-k}$ ger

$$s_n = \sum_{k=0}^n 3^{-k} = \frac{3^{-(n+1)} - 1}{3^{-1} - 1} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}} \right), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

10.1 Numeriska serier

Det som är nytt nu är att vi tänker låta $n \rightarrow \infty$. Frågan uppstår då hur vi ska tolka "summan" med oändligt många termer. Låt oss kalla gränsvärdet s så att $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ i de fall då detta

gränsvärde existerar, vilket förefaller vara en naturlig definition (jämför med de generaliserade integralerna). I exemplet ovan ser vi att

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}} \right) = \frac{3}{2}.$$



Definition. Om a_k , $k = 0, 1, 2, \dots$ är en talföljd definierar vi *serien* s enligt

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$$

i de fall då detta gränsvärde existerar. Vi kallar $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ för *delsummor* av $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Det kan gå åt skogen på två olika sätt i definition:

- (i) Om gränsvärdet blir någon oändlighet, dvs $s_n \rightarrow \infty$ eller $s_n \rightarrow -\infty$ då $n \rightarrow \infty$.
- (ii) Om gränsvärdet inte ens existerar som någon oändlighet, till exempel $s_n = (-1)^n$.

I det första fallet skriver vi ibland $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$ respektive $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = -\infty$, även om dessa inte är reella tal. Men det ger en smidigare notation (precis som för generaliserade integraler).



Definition. Om en serie existerar som ett **ändligt** reellt tal kallar vi serien för *konvergent*. Annars säger vi att serien är *divergent*.

Vi skriver ibland (formellt) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ även då serien inte existerar. Speciellt i formen av frågan "Är serien konvergent?"



Exempel

Avgör om $\sum_{k=0}^{\infty} (1 + 2k)$ och $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ är konvergenta.

Lösning. Den första serien är divergent eftersom delsummorna är aritmetiska så

$$\sum_{k=0}^n (1+2k) = \frac{(1+2n+1)(n+1)}{2} = (n+1)^2 \rightarrow \infty, \quad \text{då } n \rightarrow \infty.$$

Den andra serien är konvergent eftersom delsummorna är geometriska med $|q| < 1$, ty

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1-2^{-(n+1)}}{1-2^{-1}} = 2(1-2^{-(n+1)}) \rightarrow 2, \quad \text{då } n \rightarrow \infty.$$

Vi har här alltså direkt avgjort konvergensfrågan genom att helt enkelt (försöka) räkna ut serierna.



Divergenstestet

Sats. Om $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \neq 0$ så är $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

Observera att detta villkor för divergens inkluderar fallet när gränsvärdet $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k$ inte existerar.

Bevis. Låt oss skriva a_k lite kreativt enligt

$$a_k = (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}) = s_k - s_{k-1}.$$

Om summan är konvergent så gäller att både $s_k \rightarrow s$ och $s_{k-1} \rightarrow s$ då $k \rightarrow \infty$. Men detta innebär enligt likheten ovan att $a_k = s_k - s_{k-1} \rightarrow s - s = 0$ då $k \rightarrow \infty$. Med andra ord, om serien är konvergent så **måste** $a_k \rightarrow 0$ då $k \rightarrow \infty$. Negationen av detta är påståendet i satsen ovan.



Observera att omvändningen **inte** gäller. Det räcker alltså **inte** att $a_k \rightarrow 0$ för att en serie ska konvergera. Det klassiska motexemplet är den s.k. *harmoniska* serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ som divergerar.

Varför divergerar den harmoniska serien? Man kan se det genom följande illustration (vilket också visar att mycket kan gömmas i oändligheten). Vi har

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> 2 \cdot \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{> 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}}_{> 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}} + \frac{1}{17} + \cdots,$$

vilket innebär att den harmoniska serien är större än summan av oändligt många $1/2$. Således kan den inte konvergera.



Geometrisk serie

Den geometriska serien $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergerar om och endast om $|q| < 1$ och konvergerar då till $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.

Detta följer från formeln för geometriska summor:

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \rightarrow \frac{1}{1 - q}$$

såvida $|q| < 1$. Om $|q| \geq 1$ ser vi att $a_k = q^k \not\rightarrow 0$ då $k \rightarrow \infty$, så serien är inte konvergent i detta fall.



Var börjar serien?

Det är inget speciellt med att vi betraktar summor av talföljder a_k där $k = 0, 1, 2, \dots$. Vi kan lika gärna undersöka summor där $k = m, m+1, m+2, \dots$, dvs $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$. Alla satser stämmer ändå. Om en summa konvergerar eller inte har bara att göra med hur termerna a_k beter sig för stora k . Om vi börjar med $k = 0$, $k = 12^{30}$ eller $k = -74$ kvittar för frågan om konvergens.

Vi kan även dela upp summor i delar i de fall då dessa delar beter sig bra.



Sats. Om $c \neq 0$ är en konstant gäller att

$$\sum_{k=0}^{\infty} ca_k = c \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Vidare gäller att

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

med undantaget då vi får fallen $-\infty + \infty$ eller $\infty - \infty$, eller att gränsvärden inte existerar ens med oändligheterna tillåtna. Dessa fall måste analyseras noggrannare.

Beviskiss. Beviset följer återigen direkt från att betrakta delsummor. För sådana får vi alltid dela upp och bryta ut konstanter. Vad händer sen när antalet termer går mot oändligheten? Om allt konvergerar är det frid och fröjd.

Som exempel på ett urartat fall kan man betrakta $\sum_{k=0}^{\infty} ((-1)^k + (-1)^{k+1})$. Alla termerna i serien är noll, men slår vi sönder i två delar uppstår två serier som båda divergerar ordentligt.

10.2 Positiva serier

Om $a_k \geq 0$ för alla k kallar vi serien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ för positiv. Om en sådan serie divergerar går det mot oändligheten och vi skriver som bekant $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$ i det fallet. Om inte detta händer är serien konvergent (och lika med ett tal $s \geq 0$). Med andra ord gäller följande.



Sats. Om $a_k \geq 0$ för alla k så gäller att $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$ om och endast om serien är konvergent.

10.2.1 Första jämförelsesatsen

Positiva serier har många trevliga egenskaper. Bland annat gäller följande:



Sats. Om $0 \leq a_k \leq b_k$ för alla k så är $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k$. Speciellt gäller att

$$(i) \sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent},$$

$$(ii) \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ divergent} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ divergent}.$$

Bevis. Beviset följer av att olikheten gäller för alla delsummor eftersom $0 \leq a_k \leq b_k$ och att en växande följd som är begränsad alltid har ett gränsvärde.



Exempel

Visa att $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+2^k}$ är konvergent.

Lösning. Eftersom $1+2^k \geq 2^k$ erhåller vi att

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+2^k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$$

eftersom detta är en geometrisk serie. Inte nog med att vi nu vet att serien konvergerar, vi vet också att den konvergerar mot något som inte är större än 2.

10.2.2 Cauchys integralkriterium

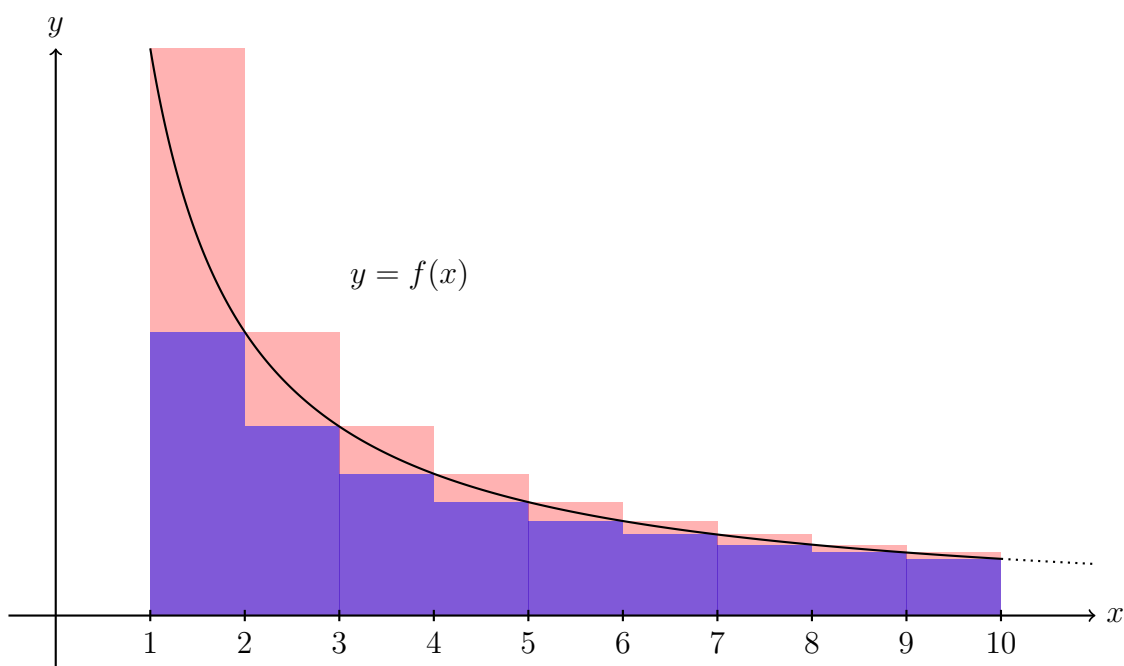


Cauchys integralkriterium

Sats. Om $f(x) \geq 0$ är en avtagande funktion för $x \geq 1$ så gäller att

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{\infty} f(x) dx < \infty.$$

Beviset följer i princip från en enkel skiss. Vi ritar in en avtagande icke-negativ funktion f och markerar en övertrappa (de rosa rektanglarna) och en undertrappa (de blåa rektanglarna) med heltalssteg.



Vi ser då direkt att summan av arean hos de n första rosa rektanglarna blir $\sum_{k=1}^n f(k)$ och

att summan av arean hos de n första blåa rektanglarna blir $\sum_{k=2}^{n+1} f(k)$. Vidare ser vi att arean mellan $y = f(x)$ och x -axeln då $1 \leq x \leq n$ ligger mellan dessa rektangelareor. Således gäller

$$\sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

Vi låter $n \rightarrow \infty$ och satsen följer. Om f är strängt avtagande blir olikheterna strikta (för ändliga n).

**Exempel**

Visa att $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} < \infty$ om och endast om $\alpha > 1$.

Lösning. Detta följer av Cauchys jämförelseprincip eftersom $\frac{1}{x^{\alpha}}$ är avtagande för $x > 0$ (eftersom $\alpha > 1$) och att vi vet att $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx < \infty$ precis då $\alpha > 1$ (se förra föreläsningen).

**Exempel**

Visa att $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ för $n = 1, 2, \dots$

Lösning. Eftersom $\frac{1}{x^2}$ är avtagande för $x > 1$ följer det från Cauchys jämförelsesats att

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x^2} dx = 1 + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^n = 2 - \frac{1}{n}.$$

Specifikt vet vi då — enligt jämförelsesats — att $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ är konvergent och konvergerar till något som är ≤ 2 .

10.2.3 Jämförelsesats på gränsvärdesform

Sats. Om $a_k \geq 0$ och $b_k \geq 0$ samt

$$0 < \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} < \infty$$

så gäller att

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty.$$

Med andra ord, om gränsvärdet existerar och ligger strikt mellan 0 och ∞ så konvergerar endera båda serierna eller så divergerar båda två.

**Exempel**

Avgör om $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(1/k)}{k}$ är konvergent.

Lösning. Om k är stor är $1/k$ liten och $\sin(1/k) = 1/k + O(1/k^3)$. Vi får alltså en "extra" $1/k$ från täljaren och jämför därför med $1/k^2$:

$$\frac{\sin(1/k)/k}{1/k^2} = \frac{1/k^2 + O(1/k^4)}{1/k^2} = 1 + O(1/k^2) \rightarrow 1, \quad \text{då } k \rightarrow \infty.$$

Alltså är serien i fråga konvergent om och endast om $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ är konvergent enligt jämförelsesatsen på gränsvärdesform. Detta eftersom termerna är positiva (för stora k är $\sin 1/k > 0$) och övriga förutsättningar är uppfyllda. Den sista serien är välkänd som konvergent (se exemplet ovan) och därmed är den efterfrågade serien också konvergent.

10.3 Absolutkonvergens



Absolutkonvergens

Definition. Om $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ är konvergent kallar vi $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ för *absolutkonvergent*.

Det följer direkt att en absolutkonvergent serie är konvergent med $\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.



Exempel

Visa att $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos k}{2^k(2 + \sin k)}$ är konvergent och inte är större än 2.

Lösning. Vi visar att serien är absolutkonvergent. Vi har nämligen

$$\left| \frac{\cos k}{2^k(2 + \sin k)} \right| = \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|\cos k|}{2 + \sin k} \leq 2^{-k}$$

eftersom $|\cos k| \leq 1$ och $2 + \sin k \geq 1$. Eftersom $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = \frac{1}{1 - 1/2} = 2$ är serien absolutkon-

vergent och $\left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos k}{2^k(2 + \sin k)} \right| \leq 2$.

10.4 Alternerande serier

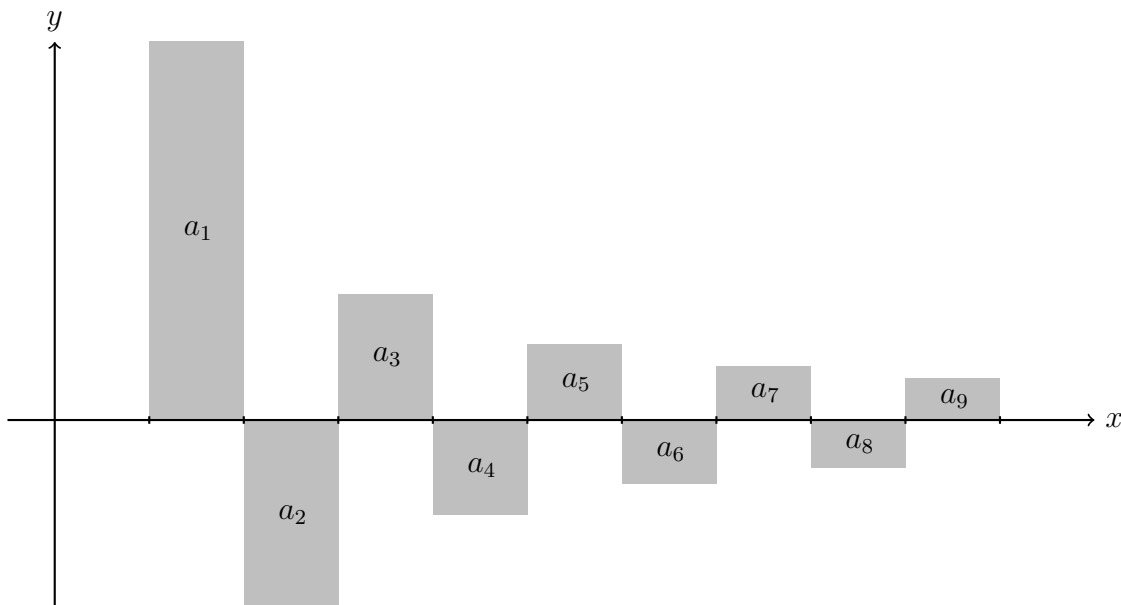
Vi kallar serier där termer växlar tecken, varannan positiv och varannan negativ, för *alternerande*. För sådana serier finns, om vi kräver att $|a_k|$ avtar mot noll, ett kraftfullt resultat.



Leibniz sats

Sats. Om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är en alternerande serie sådan att $|a_1| \geq |a_2| \geq |a_3| \geq \dots$ är en avtagande följd och $a_k \rightarrow 0$ då $k \rightarrow \infty$ så är serien konvergent.

Bevis. Antag att $a_1 \geq 0$ (annars kan vi lika gärna betrakta minus serien). Kravet att $|a_k|$ är avtagande innebär då att $a_1 + a_2 \geq 0$, $a_3 + a_4 \geq 0$, etc, samt att $a_2 + a_3 \leq 0$, $a_4 + a_5 \leq 0$ och så vidare.



Tanken är nu att betrakta två olika delsummor s_{2n} och s_{2n+1} . Vi ser då att

$$s_{2n} = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \dots + (a_{2n-1} + a_{2n}) \rightarrow a,$$

där a möjligen är $+\infty$, eftersom alla parenteser är ≥ 0 . Alltså en följd av icke-negativa tal och s_{2n} är växande (gränsvärde finns alltid om vi tillåter ∞). Vidare är

$$s_{2n+1} = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \dots + (a_{2n} + a_{2n+1}) \rightarrow b,$$

där b möjligen är $-\infty$, eftersom alla parenteser är ≤ 0 . Alltså en följd av icke-positiva tal och s_{2n+1} är avtagande (gränsvärde finns alltid om vi tillåter $-\infty$). Dessutom har vi

$$s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \geq 0,$$

vilket innebär att $b - a \geq 0 \Leftrightarrow b \geq a$. Detta innebär att båda a och b måste vara ändliga. Men vi vet också att $a_k \rightarrow 0$ vilket i sin tur visar att $a = b$. Således konvergerar serien.



Exempel

Visa att serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ är konvergent men inte absolutkonvergent.

Lösning. Med $a_k = (-1)^k/k$ ser vi att $|a_k| = 1/k$ är en avtagande följd och att $a_k \rightarrow 0$. Eftersom serien är alternnerande visar nu Leibniz sats att den är konvergent. Mot vad? Bra fråga, faktiskt till $-\ln 2$ (gå tillbaka till Maclaurinavsnittet och studera $\ln(1+x)$ och fundera över hur detta kan komma sig). Däremot är serien inte absolutkonvergent eftersom

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

Detta är som bekant den harmoniska serien.



Det är **tre** krav som gäller för Leibniz kriterium:

- (i) Serien är alternnerande så att $a_{k+1} = -a_k$ för alla k som det summeras över.
- (ii) Seriens termer går mot noll: $a_k \rightarrow 0$.
- (iii) Absolutbeloppet av seriens termer avtar monotont: $|a_k| \geq |a_{k+1}| \geq |a_{k+2}| \geq \dots$

Ibland summeras de två sista villkoren som att $|a_k|$ avtar monotont mot noll. Det sista villkoret är viktigt och måste visas! Följande serie ger ett motexempel.



Exempel

Visa att $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ är divergent om $a_k = \frac{1}{k^2}$ då k är udda och $a_k = \frac{1}{k}$ då k är jämt.

Lösning. Vi ser att serien är alternnerande och att termerna går mot noll $|a_k| \rightarrow 0$ då $k \rightarrow \infty$. Det är alltså lockande att hugga till med Leibniz kriterium, men på grund av hur a_k ser ut så kommer inte $|a_k|$ vara monotont avtagande. Därmed kan vi **inte** använda Leibniz kriterium. Om vi undersöker serien direkt ser vi följande:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6} - \dots$$

De positiva termerna bildar alltså en del av en harmonisk serie (och är divergent exempelvis enligt Cauchys intergralkriterium med $f(x) = \frac{1}{2x}$) medan de negativa konvergerar eftersom

serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$. Det finns alltså inget hopp för serien som helhet, utan den är divergent.

Det är alltså inte "petigt" när det inte ges poäng på tentan när inte *alla* förutsättningarna för Leibniz kriterium redovisas! Även om serien skulle visa sig vara konvergent i slutändan.



Exempel

Visa att $\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ inte är absolutkonvergent.

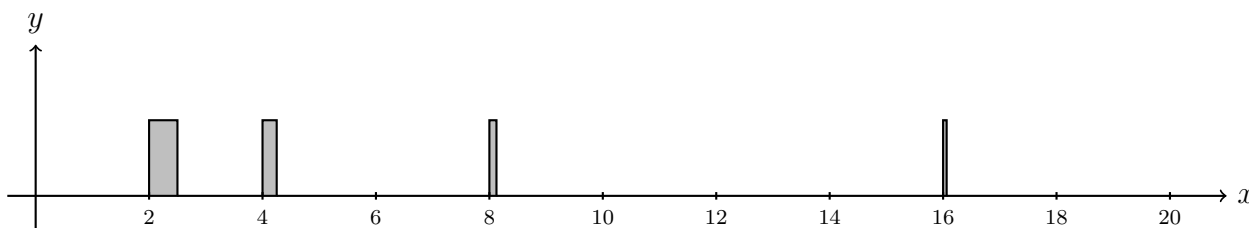
Lösning. Vi kan visa detta genom att skriva integralen som en serie av delintegraler och uppskatta på varje del. Hur då? Vi kan skriva

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{|\sin x|}{|x|} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x| dx = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty,$$

eftersom $\int_0^{\pi} |\sin x| dx = 2$ (blir samma för varje intervall $[k\pi, (k+1)\pi]$).

10.5 Divergenstest?

Observera att det inte finns något test för generaliserade integraler analogt med divergenstestet för serier. Vi vet redan att det inte är tillräckligt $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ för att $\int_1^{\infty} f(x) dx$ ska vara konvergent (tänk tex $f(x) = 1/x$). Men bara för att integralen är konvergent behöver inte heller funktionen gå mot noll. Betrakta följande konstruktion.



Funktionen f är alltså bitvis konstant; mellan 2^k och $2^k + 2^{-k}$, $k = 1, 2, \dots$, är $f(x) = 1$, och för övrigt är $f(x) = 0$. Således blir

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - 1/2} = 1.$$

Integralen är alltså konvergent, men $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq 0$ (gränsvärdet saknas). Genom att ersätta rektanglarna med trianglar kan vi även skapa en kontinuerlig funktion med samma egenskap, och med snällare objekt även deriverbara exempel. Vi kan till och med skapa obegränsade exempel genom att låta bredd och höjd förhålla sig till varandra på lämpligt sätt (dubbla höjden och dela bredden med fyra till exempel).

Nu kanske man kan tycka att funktionen blir väldigt mycket noll bortom i oändligheten ändå (även om gränsvärdet så klart saknas), men ett sådant påstående behöver kvalificeras. Begrepp som mått är nödvändigt så den intresserade personen hänvisas till lämplig kurs i mått- och integrationsteori.

Kapitel 11

Potensserier

Vi ska nu betrakta serier där termerna inte längre är konstanter. Speciellt ska vi studera så kallade potensserier. Dessa definieras som

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

för de x där detta uttryck har mening (dvs serien konvergerar). Värt att notera är att dessa typer av serier beskriver funktioner (för de x där serien är konvergent). Om endast ett ändligt antal a_k är skilda från noll är det bara ett polynom, men om oändligt många a_k inte är noll får vi i någon mening ett polynom med oändligt många termer. Vilka slags funktioner kan beskrivas på det sättet? Våldigt många ska det visa sig.

11.1 Konvergens av potensserier

Vi kan så klart använda alla tekniker som togs fram för numeriska serier på förra föreläsningen, men vi kommer att använda följande två kriterier flitigt.



Rot- och kvotkriteriet

Sats. Om $Q = \lim_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{1/k}$ eller $Q = \lim_{k \rightarrow \infty} |a_{k+1}/a_k|$ existerar så är $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolutkonvergent om $Q < 1$ och divergent om $Q > 1$.

Dessa kriterier (att de två gränsvärdena som ger Q existerar samt uppfyller $Q < 1$) brukar kallas *Cauchys rotkriterie* respektive *d'Alemberts kvotkriterie*. Man kan visa att rotkriteriet är starkare, dvs att om detta är sant så gäller även kvotkriteriet. Däremot så kan kvotkriteriet ibland vara enklare att kontrollera. Beviset för rotkriteriet bygger på att man utnyttjar att $Q < 1$ för att uppskatta serien med en geometrisk serie med kvoten q , där $Q < q < 1$.

Dessa konvergenstester kan så klart användas på vilka serier som helst, men det finns konvergenta serier vi inte kan konstatera är konvergenta med varken rot- eller kvotkriterier.



Serien^a $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5 + (-1)^k}{2} \right)^{-k}$ är konvergent men rotkriteriet är inte uppfyllt. Vi kan se detta genom att skriva ut hur termerna ser ut:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^6} + \dots$$

vilket är summan av två geometriska serier som konvergerar. Däremot ser vi att

$$|a_k|^{1/k} = \frac{2}{5 + (-1)^k}$$

hela tiden hoppar mellan $\frac{1}{2}$ och $\frac{1}{3}$ så gränsvärdet saknas till och med.

Övning: visa att serien $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{(-1)^k - k}$ konvergerar enligt rotkriteriet men att vi inte kan dra någon slutsats från kvotkriteriet.

^aG.R. Gelbaum and J.M.H. Olmsted, *Counterexamples in analysis*, Dover 1992

Intressant nog så beter sig potensserier alltid förhållandevis snällt. Till exempel gäller alltid följande.



Konvergensradie

Sats. Varje potensserie $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ har en maximal *konvergensradie* R så att serien är absolutkonvergent då $|x| < R$ och divergent då $|x| > R$.

Notera att fallet då $x = \pm R$ ej nämns. Detta fall måste specialbehandlas från situation till situation. Vidare är det så klart så att om rotkriteriet inte ger något Q krävs en noggrannare analys av termerna.

Bevis. Ett ordentligt bevis återfinnes i boken, men tanken är ganska logisk. Om vi antar att $Q = \lim_{k \rightarrow \infty} |c_k|^{1/k}$ existerar så är $\lim_{k \rightarrow \infty} |c_n x^n|^{1/n} = Q|x|$. Enligt rotkriteriet ovan är serien (absolut)konvergent om $Q|x| < 1$, dvs då $|x| < 1/Q$ (såvida inte $Q = 0$ men då behövs inget krav på x) och divergent då $|x| > 1/Q$. Vårt R är alltså $R = 1/Q$ då $Q \neq 0$ och $R = \infty$ då $Q = 0$.



Exempel

För vilka x konvergerar $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} x^k$?

Lösning. Rotkriteriet:

$$\left| \frac{x^k}{k^2} \right|^{1/k} = \frac{|x|}{k^{2/k}} = |x| \exp\left(-\frac{2 \ln k}{k}\right) \rightarrow |x|$$

då $k \rightarrow \infty$ eftersom $(\ln k)/k \rightarrow 0$. Med andra ord ger $|x| < 1$ konvergens och $|x| > 1$ divergens (enligt rotkriteriet). Vi undersöker $x = \pm 1$ speciellt och ser att både

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{och} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

är konvergenta (absolutkonvergenta till och med). Svaret blir alltså $-1 \leq x \leq 1$.



Exempel

Bestäm konvergensområdena för följande potensserier. Med andra ord, finn konvergensradien och avgör även om serierna konvergerar då $x = \pm R$.

$$\begin{array}{llll} \text{(i)} \sum_{k=1}^{\infty} kx^{2k} & \text{(ii)} \sum_{k=2}^{\infty} (\ln k)^{-1}x^k & \text{(iii)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k!} & \text{(iv)} \sum_{k=0}^{\infty} 3^k x^k \\ \text{(v)} \sum_{k=0}^{\infty} 3^k x^{3k} & \text{(vi)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k x^k}{2^k \sqrt{k}} & \text{(vii)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+1)^k}{k 2^k} & \text{(viii)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{x^{2k}}. \end{array}$$

Lösning. Vi tar en i taget.

(i) Enligt kvotkriteriet konvergerar serien åtminstone då

$$1 > Q = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)|x|^{2k+2}}{k|x|^{2k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) |x|^2 = |x|^2$$

så $|x| < 1$. Konvergensradien är alltså $R = 1$. När $x = 1$ ges serien av

$$\sum_{k=1}^{\infty} k 1^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} k = \infty$$

och när $x = -1$ ges serien av $\sum_{k=1}^{\infty} k(-1)^k$ som divergerar enligt divergenstestet då termerna inte går mot noll. Konvergensområdet är $-1 < x < 1$.

(ii) Vi använder kvotkriteriet igen och ser att

$$\frac{|\ln(k+1)|^{-1}|x|^{k+1}}{|(\ln k)^{-1}||x|^k|} = \frac{|x|^{k+1}}{\ln(k+1)} \cdot \frac{\ln k}{|x|^k} = \frac{\ln k}{\ln\left(k\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right)} |x| = \frac{\ln k}{\left(1 + \frac{\ln(1+1/k)}{\ln k}\right) \ln k} |x| \rightarrow |x|,$$

då $k \rightarrow \infty$. Konvergensradien blir således $R = 1$. När $x = 1$ får vi

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1^k}{\ln k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k} \geq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

eftersom $\ln k \leq k$ och $\sum_{k=2}^{\infty} 1/k = \infty$. När $x = -1$ ges summan av $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln k}$ vilken är konvergent enligt Leibniz konvergenstest (visa det!). Konvergensområdet blir $-1 \leq x < 1$.

(iii) Vi använder kvotkriteriet igen (ofta lämpligt när $k!$ är inblandat):

$$\frac{2^{k+1}|x|^{k+1}/(k+1)!}{2^k|x|^k/k!} = \frac{2^{k+1}|x|^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{2^k|x|^k} = \frac{2|x|}{k+1} \rightarrow 0,$$

då $k \rightarrow \infty$. Här är alltså $R = \infty$ och någon undersökning av $x = \pm R$ är inte aktuell. Konvergensområdet är $-\infty < x < \infty$.

(iv) Här är rotkriteriet lämpligt och $(3^k|x|^k)^{1/k} = 3|x|$ så $3|x| < 1$ ger absolutkonvergens. Alltså är $R = 1/3$. När $x = \pm 1/3$ erhåller vi $\sum_{k=1}^{\infty} 3^k(\pm 1/3)^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} (\pm 1)^k$ som divergerar i båda fallen. Konvergensområdet är $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$.

(v) Här är rotkriteriet lämpligt och $(3^k|x|^{3k})^{1/k} = 3|x|^3$ så $3|x|^3 < 1$ ger absolutkonvergens. Alltså är $R = 1/\sqrt[3]{3}$. När $x = \pm 1/\sqrt[3]{3}$ erhåller vi $\sum_{k=1}^{\infty} 3^k(\pm \sqrt[3]{3})^{-3k} = \sum_{k=1}^{\infty} 3^k 3^{-k} (\pm 1)^k$ som divergerar i båda fallen. Konvergensområdet är $-\frac{1}{\sqrt[3]{3}} < x < \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

(vi) Vi har

$$\left(\frac{k^k|x|^k}{2^k\sqrt{k}} \right)^{1/k} = \frac{k|x|}{2k^{1/2k}} \rightarrow \infty$$

då $k \rightarrow \infty$ eftersom $k^{1/2k} \rightarrow 1$ då $k \rightarrow \infty$. Alltså är $R = 0$. Koefficienterna växer alltså för snabbt för att vi ska få något vettigt. Konvergensområdet är $x = 0$.

(vii) Vi använder kvotkriteriet och ser att

$$\left| \frac{(x+1)^{k+1}}{(k+1)2^{k+1}} \cdot \frac{k2^k}{(x+1)^k} \right| = \frac{|x+1|}{2} \cdot \frac{1}{1+1/k} \rightarrow \frac{|x+1|}{2}$$

då $k \rightarrow \infty$. Serien är alltså absolutkonvergent då $|x+1| < 2 \Leftrightarrow -3 < x < 1$. Vi undersöker nu speciellt $x = -3$ och $x = 1$. Först $x = -3$ där

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^k}{k2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

är konvergent enligt Leibniz kriterie ($1/k$ är strängt avtagande mot noll). När $x = 1$ är serien divergent eftersom detta blir den harmoniska serien. Konvergensområdet blir således $-3 \leq x < 1$.

(viii) Den här är lite annorlunda eftersom vi har negativa exponenter av x . Detta kommer att innebära att vi får konvergens **utanför** en konvergensradie i stället. Vi undersöker med rotkriteriet:

$$\left| \frac{2^k}{x^{2k}} \right|^{1/k} = \frac{2}{|x|^2}$$

för alla k . Kravet blir alltså att $2/|x|^2 < 1$ vilket är ekvivalent med att säga $|x|^2 > 2$ eller att $|x| > \sqrt{2}$. När $x = \pm\sqrt{2}$ blir serien divergent i båda fallen (termerna blir identiskt lika med ett). Konvergensområdet blir $x > \sqrt{2}$ och $x < -\sqrt{2}$.

11.2 Termvis derivering och integrering

Det vi ger oss in på nu är inte helt enkelt egentligen utan kräver begrepp som *likformig* konvergens. Men som tur är beter sig potensserier så snällt att dessa operationer fungerar utan problem när $|x|$ är mindre än konvergensradien.



Sats. Låt $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ ha konvergensradien $R > 0$. Då gäller att f kan deriveras kontinuerligt oändligt många gånger på $] - R, R[$ och att

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} \quad \text{samnt} \quad \int_0^x f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1},$$

där dessa potensserier har samma konvergensradie R .

Det faktum att vi kan derivera hur många gånger som helst leder till intressanta följder kopplat till Maclaurinutvecklingar. Vi återkommer kort till detta snart.



Termer "försvinner" vid derivering

Observera att summan justeras vid derivering av en potensserie då c_0 -termen försvinner. Deriverar man två gånger försvinner både c_0 - och c_1 -termerna, så

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2}.$$

Annars skulle det trilla ut negativa exponenter på x vid derivering vilket är omöjligt. Man kan dock även betrakta serier som har negativa exponenter (så kallade *Laurant-serier*), men sådana termer kan aldrig dyka upp från en potensserie som vi definierat tidigare. Vi kommer ofta indexera om serier som den ovan, i.e.,

$$f''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2}x^k,$$

vilket underlättar när vi vill jämföra serier.



Exempel

Räkna ut serierna $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{4^k}$ och $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k2^k}$.

Lösning. Serierna är båda två konvergenta (absolutkonvergenta till och med) eftersom termerna avtar tillräckligt snabbt. Vi betraktar nu ”hjälpserierna” $\sum_{k=0}^{\infty} kx^k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}x^k$. Båda dessa serier har konvergensradie $R = 1$ (visa det). Dessutom, eftersom

$$kx^k = xkx^{k-1} = x \frac{d}{dx} x^k$$

så följer det att

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = x \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} x^k = x \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

eftersom det blir derivatan av en geometrisk serie med kvoten x . Således kan vi (med $x = 1/4$) räkna ut att

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{4^k} = \frac{1/4}{(1-1/4)^2} = \frac{4}{9}.$$

På liknande sätt ser vi att

$$\frac{1}{k}x^k = \int_0^x t^{k-1} dt, \quad k = 1, 2, \dots,$$

och därmed att

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}x^k &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x t^{k-1} dt = \int_0^x \left(\sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1} \right) dt = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} t^k \right) dt \\ &= \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-x). \end{aligned}$$

Detta kan vi använda för att beräkna den andra serien (med $x = 1/2$):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k2^k} = -\ln(1-1/2) = \ln 2.$$

11.3 Feluppskattning

Om man bara tar med ett ändligt antal termer i potensserien, kan man säga något om hur bra approximation detta ger?



Exempel

Bestäm n så att $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} < 10^{-4}$ för $|x| < \frac{1}{2}$.

Lösning. Enklast är att observera att $k! \geq (n+1)!$ för $k \geq n+1$ och därför skriva

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right| < \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=n+1}^{\infty} |x|^k = \frac{1}{(n+1)!} |x|^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} |x|^k = \frac{1}{(n+1)!} \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

Vi ser att med $n = 5$ blir nämnaren $6! \cdot 2^5 = 720 \cdot 32 > 21000$, så hela serien blir $< 10^{-4}$.

**Exempel**

Beräkna $\ln 2$ som ett rationellt tal med ett fel på högst 10^{-4} .

Lösning. Vi kan så klart gå tillbaka till Maclaurinutvecklingar, men vi kan även använda serien vi tog fram i förra exemplet. Där visade vi att $\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k 2^k}$. Då är alltså

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k 2^k} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k 2^k}.$$

Vi uppskattar den sista termen och ser hur stort N måste vara för att vi säkert ska få denna del av serien $< 10^{-4}$. Alltså,

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k 2^k} \leq \frac{1}{N+1} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{N+1} 2^{-N-1} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = \frac{2^{-N-1}}{N+1} \frac{1}{1-2^{-1}} = \frac{2^{-N}}{N+1}.$$

Enklare är nu att testa värden på N och se att om $N = 15$ så räcker det eftersom

$$2^{-15} = \frac{1}{1024 \cdot 32} \leq \frac{1}{10^4}.$$

Närmevärdet ges alltså av $\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{k 2^k}$ (vilket är ett rationellt tal).

11.3.1 Alternnerande serier

När det gäller alternnerande serier av Leibniz-typ (så att $|a_k|$ är avtagande) så kan vi göra en enklare uppskattning av felet. Om $a_{n+1} > 0$ (liknande resultat gäller om $a_{n+1} < 0$) har vi

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots = a_{n+1} + (a_{n+2} + a_{n+3}) + (a_{n+4} + a_{n+5}) + \cdots,$$

där varje parentes är ≤ 0 eftersom $|a_k|$ är avtagande (och serien är alternnerande). Detta medför alltså att

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| \leq a_{n+1}$$

om $a_{n+1} > 0$.

**Exempel**

Visa att $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln k}$ konvergerar och hitta ett n så att $\sum_{k=3}^n \frac{(-1)^k}{\ln k}$ approximerar serien med ett fel på högst 10^{-4} .

Lösning. Serien är alternerande och $\left| \frac{(-1)^k}{\ln k} \right| = \frac{1}{\ln k}$ är strängt avtagande mot noll så serien är konvergent enligt Leibniz sats. Dessutom gäller att

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln k} \right| \leq \frac{1}{\ln(n+1)},$$

så om felet ska vara $< 10^{-4}$ krävs att

$$\ln(n+1) > 10^4 \quad \Leftrightarrow \quad n > \exp(10^4) - 1 \approx 10^{4342}.$$

Ganska många termer alltså. Är det förvånande?



Exempel

Upprepa samma procedur som i förra exemplet för $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{e^k}$.

Lösning. Man kan använda Leibniz sats, men serien är absolutkonvergent (varför?) så det är inte nödvändigt. Däremot bör vi använda det när det gäller felet. Vi har

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{e^k} \right| \leq \frac{1}{e^{n+1}},$$

så om felet ska vara $< 10^{-4}$ krävs att

$$\exp(n+1) > 10^4 \quad \Leftrightarrow \quad n > \ln(10^4) - 1 = 4 \ln 10 - 1 \approx 8.21.$$

Betydligt färre! Vad händer om vi uppskattar som geometrisk serie i stället? Vi undersöker:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{e^k} \right| \leq \frac{1}{e^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{e^k} = e^{-(n+1)} \frac{1}{1 - e^{-1}},$$

så det blir inte så jättestor skillnad när termerna går mot noll snabbt.

Kapitel 12

Tillämpningar av potensserier

Vi har introducerat potensserier

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$$

och visat att dessa har en *konvergensradie* R så serien är absolutkonvergent när $|x| < R$ och divergent när $|x| > R$. Vi tillåter $R = 0$ (konvergent endast i $x = 0$) och $R = \infty$ (konvergent för alla x). Vi konstaterade att för $|x| < R$ gick det att *termvis* derivera och integrera potensserier:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} \quad \text{och} \quad \int_0^x f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1},$$

där dessa ”nya” potensserier har samma konvergensradie.

12.1 Lösningar till DE på serieform

Genom att ansätta en lösning som en serie $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ och låta ekvationen ge villkor på koefficienterna c_k kan man ofta hitta lösningar till DE:er som man inte kan lösa med de metoder vi tidigare använt. Speciellt i de fall då vi inte har konstanta koefficienter eftersom dessa är svåra att behandla. Men låt oss börja med något ”enkelt.”



Exempel

Utnyttja att den unika lösningen till $y' - y = 0$, $y(0) = 1$, ges av $y(x) = e^x$ för att hitta en serieutveckling för e^x .

Lösning. Vi ansätter en potensserie på formen $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ och undersöker när denna löser differentialekvationen. Vi skriver ut den termvisa deriveringen av $y(x)$ och indexerar om serien så vi summerar termer av typen x^k i stället för x^{k-1} :

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} x^k.$$

Nu söker vi koefficienterna c_k så att

$$0 = y'(x) - y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)c_{k+1}x^k - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} ((k+1)c_{k+1} - c_k)x^k$$

där vi utnyttjar att båda serierna är absolutkonvergenta för att slå ihop summorna. För att detta nu ska bli noll för alla x (med $|x| < R$) måste $(k+1)c_{k+1} - c_k = 0$ för $k = 0, 1, 2, 3, \dots$. Vi vet också att $y(0) = 1$ vilket ger att $c_0 = 1$ (varför?). Med andra ord uppfyller c_k det rekursiva sambandet $c_0 = 1$ och $c_{k+1} = c_k/(k+1)$ för $k = 1, 2, \dots$. Vi itererar några steg och ser vad som händer:

$$\begin{aligned} c_0 &= 1, \\ c_1 &= \frac{c_0}{0+1} = 1, \\ c_2 &= \frac{c_1}{1+1} = \frac{1}{2}, \\ c_3 &= \frac{c_2}{2+1} = \frac{1}{2 \cdot 3}, \\ c_4 &= \frac{c_3}{3+1} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}, \\ &\vdots \\ c_{k+1} &= \frac{c_k}{k+1} = \frac{1}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

Vi får alltså serien $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Konvergensraden blir $R = \infty$ eftersom

$$\frac{|x|^{k+1}/(k+1)!}{|x|^k/k!} = \frac{k!}{(k+1)!}|x| = \frac{1}{k+1}|x| \rightarrow 0,$$

då $k \rightarrow \infty$. Vi känner igen svaret från Maclaurinutvecklingen av e^x , vilket är vad vi ville visa. Mer noggrant, vi vet sedan tidigare att ekvationen har den entydiga lösningen $y(x) = e^x$ (vi visar detta genom att använda en integrerande faktor). Vi har nu visat att även $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ löser

ekvationen för alla $x \in \mathbf{R}$. Således måste $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, $x \in \mathbf{R}$.

Vi kan även komma åt ekvationer vi inte kunnat lösa tidigare som i följande exempel.



Exempel

Finn alla lösningar till ekvationen $y'' + xy' + y = 0$ som kan uttryckas som en potensserie.

Lösning. Vi ansätter $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Då blir

$$\begin{aligned} xy' &= x \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} k c_k x^k \\ y'' &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} x^k \end{aligned}$$

där vi indexerat serierna lämpligt för att nu kunna undersöka ekvationen:

$$\begin{aligned} 0 &= y'' + xy' + y = \sum_{k=0}^{\infty} ((k+2)(k+1)c_{k+2} + kc_k + c_k) x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)((k+2)c_{k+2} + c_k) x^k \end{aligned}$$

vilket medför att $c_{k+2} = -\frac{c_k}{k+2}$ för $k = 0, 1, 2, \dots$. Eftersom c_{k+2} bara beror på c_k kommer det att dyka upp två "sorters" termer (det är två steg mellan k och $k+2$). Vi skiljer därför nu på udda och jämna k . Först jämna index. Alltså,

$$\begin{aligned} c_2 &= -\frac{c_0}{2} \\ c_4 &= -\frac{c_2}{4} = \frac{c_0}{2 \cdot 4} \\ c_6 &= -\frac{c_4}{6} = -\frac{c_0}{2 \cdot 4 \cdot 6} \\ &\vdots \\ c_{2k} &= -\frac{c_{2k-2}}{2k} = \frac{(-1)^k c_0}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k} = \frac{(-1)^k c_0}{2^k \cdot k!} \end{aligned}$$

och för udda k ,

$$\begin{aligned} c_3 &= -\frac{c_1}{3} \\ c_5 &= -\frac{c_3}{5} = \frac{c_1}{3 \cdot 5} \\ c_7 &= -\frac{c_5}{7} = -\frac{c_1}{3 \cdot 5 \cdot 7} \\ &\vdots \\ c_{2k+1} &= -\frac{c_{2k-1}}{2k+1} = \frac{(-1)^k c_1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k+1)} = \frac{(-1)^k \cdot 2^k \cdot k! \cdot c_1}{(2k+1)!}. \end{aligned}$$

Ibland använder man skrivsättet $(2k+1)!! = (2k+1)(2k-1)(2k-3)\cdots 5 \cdot 3$, dvs produkten av alla udda positiva heltal mindre än eller lika med $2k+1$. Analogt kan man definiera $(2k)!!$ som produkten av de jämna heltalen. Vi kan nu skriva upp hur lösningarna $y(x)$ ser ut:

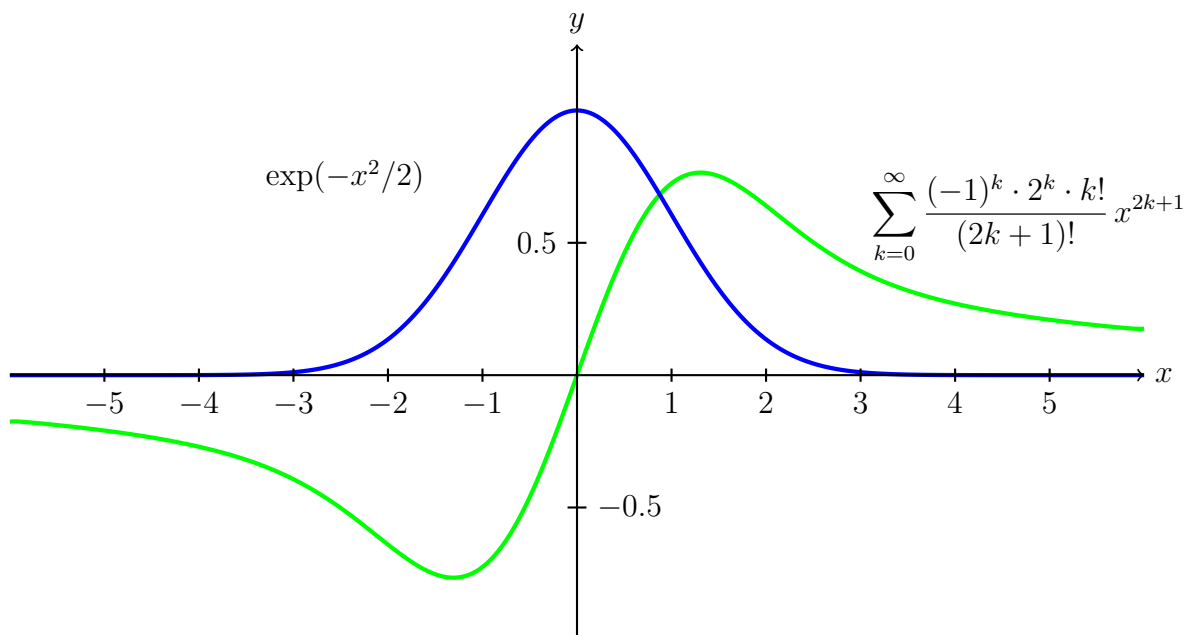
$$y(x) = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k \cdot k!} x^{2k} + c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2^k \cdot k!}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

För vilka x ? Vi undersöker konvergensradierna och ser att dessa är $R = \infty$ i båda fallen. Våra lösningar löser alltså ekvationen på hela $\mathbf{R}$. Konstanterna c_0 och c_1 är godtyckliga och kan till exempel bestämmas om begynnelse- eller randvillkor är givna.

Den första serien kan vi utan allt för stora problem se blir $c_0 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ (visa det). Den andra serien är lite svårare att analysera. Man kan dock visa att den kan skrivas

$$c_1 \frac{2x}{|x|\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \int_0^{|x|\sqrt{2}/2} \exp(s^2) ds.$$

Vi ritar upp funktionerna för $c_0 = c_1 = 1$. Den gröna är den udda serien och den blåa den jämna.



Inte direkt den typen av funktioner vi funnit tidigare när vi löst linjära DE av andra ordningen! Följdfråga: är $y(x)$ enligt ovan den allmänna lösningen till ekvationen i fråga eller finns det fler?

Vi kan även prata om potensserier kring andra punkter än $x = 0$; jämför med hur vi gick från Maclaurinpolynom till Taylorpolynom. Vi arbetar alltså i det här läget med serier

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k.$$

Funktioner som kan uttryckas i form av potensserier enligt detta kallas analytiska.



Analytisk funktion

Definition. En funktion f kallas analytisk i en punkt $x = x_0$ om det finns ett öppet intervall $I =]x_0 - c, x_0 + c[$ så att $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$ för alla $x \in I$. Med andra ord så konvergerar potensserien till f nära x_0

När vi ansätter potensserier för att lösa DE söker vi alltså analytiska lösningar (åtminstone analytiska i $x = 0$). Det är värt att notera här att det finns funktioner som är kontinuerligt deriverbara till och med oändligt många gånger men som fortfarande inte är analytiska. Betrakta exemplet från föreläsning 3 där $f(x) = \exp(-1/x^2)$ för $x \neq 0$ och $f(0) = 0$. Maclaurinserien till denna funktion är identiskt lika med noll (samtliga $c_k = 0$) vilket så klart endast stämmer överens i just $x = 0$ (det finns alltså inget öppet intervall). Men i övrigt är funktionen snäll. Men man kan konstruera exempel (oändligt deriverbara) som inte är analytiska i en enda punkt. Exempelvis är

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\sqrt{k}} \cos kx$$

faktiskt en funktion som är oändligt många gånger kontinuerligt deriverbar men som inte är analytisk i en enda punkt. Kul va! Dagens patologiska exempel är därmed avklarat. Faktum är

att mängden av snälla funktioner som inte är analytiska i en enda punkt är betydligt större¹ än mängden av analytiska funktioner.

Det är inte heller så trevligt att alla analytiska funktioner enkelt kan representeras som så kallade elementära funktioner. Exempelvis går lösningarna till följande DE under namnet *Airy*-funktioner.



Exempel

Finn alla analytiska (i $x = 0$) lösningar till $y'' - xy = 0$.

Lösning. Vi söker analytiska lösningar och ansätter då en potensserie $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Då ges ekvationen av

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1)x^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+2}(k+2)(k+1)x^k - \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1}x^k \\ &= 2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_{k+2}(k+2)(k+1) - c_{k-1})x^k \end{aligned}$$

Alltså måste $c_2 = 0$ och för $k = 1, 2, \dots$ måste $c_{k+2} = c_{k-1}/(k+2)(k+1)$. Vi erhåller alltså 3 ”sorters” koefficienter så vi betraktar c_{3k} , c_{3k+1} och c_{3k+2} . Det följer från att $c_2 = 0$ att $c_{3k+2} = 0$ för $k = 0, 1, 2, \dots$. Vi fortsätter med c_{3k} :

$$\begin{aligned} c_3 &= \frac{c_0}{3 \cdot 2} \\ c_6 &= \frac{c_3}{6 \cdot 5} = \frac{c_0}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} \\ c_9 &= \frac{c_6}{9 \cdot 8} = \frac{c_0}{9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} \\ &\vdots \\ c_{3k} &= \frac{c_{3k-3}}{3k(3k-1)} = \frac{(3k-2)!!! c_0}{(3k)!}, \end{aligned}$$

där $n!!!$ definieras som produkten av alla heltal n , $n-3$, $n-6$, $n-9$ och så vidare till vi hamnar i 1, 2 eller 3. Exempelvis är $12!!! = 12 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3$ och $14!!! = 14 \cdot 11 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 2$. På liknande sätt har vi

$$\begin{aligned} c_4 &= \frac{c_1}{4 \cdot 3} \\ c_7 &= \frac{c_4}{7 \cdot 6} = \frac{c_1}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} \\ c_{10} &= \frac{c_7}{10 \cdot 9} = \frac{c_1}{10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} \\ &\vdots \\ c_{3k+1} &= \frac{c_{3k-2}}{3k(3k+1)} = \frac{(3k-1)!!! c_1}{(3k+1)!}. \end{aligned}$$

¹I Baires mening. Mängden av funktioner analytiska i någon punkt — sett som delmängd av $C^\infty(I)$ på ett intervall I — är av den första kategorin. Detta innebär att den mängden är betydligt mindre än komplementet som består av C^∞ -funktioner på I som inte är analytiska i en enda punkt.

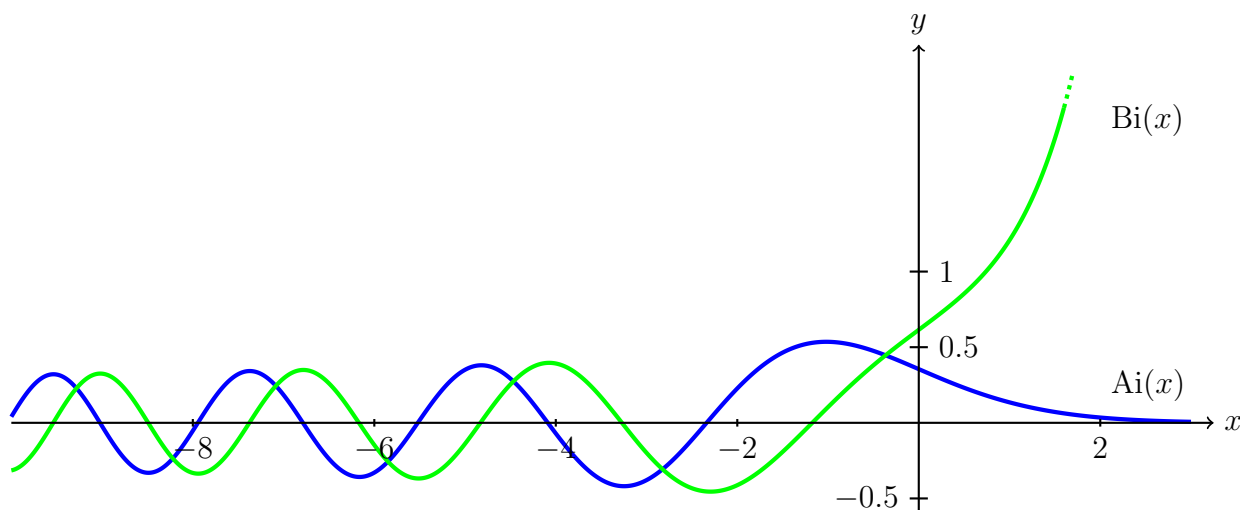
Vi kan nu skriva upp hur lösningarna $y(x)$ ser ut:

$$y(x) = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3k-2)!!!}{3k!} x^{3k} + c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3k-1)!!!}{(3k+1)!} x^{3k+1}.$$

Vi låter här $(-2)!!! = 1$ och $(-1)!!! = 1$ för att underlätta notationen. För vilka x ? Vi undersöker konvergensradierna och ser att dessa är $R = \infty$ i båda fallen. Våra lösningar löser alltså ekvationen på hela $\mathbf{R}$ och är analytiska på hela $\mathbf{R}$ också. Dessa funktioner brukar som sagt kallas Airy-funktioner och vi kan definiera

$$\text{Ai}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3k-2)!!!}{3k!} x^{3k} \quad \text{och} \quad \text{Bi}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3k-1)!!!}{(3k+1)!} x^{3k+1}$$

för $x \in \mathbf{R}$. Vi skissar upp funktionerna (den blå är $\text{Ai}(x)$ och den gröna är $\text{Bi}(x)$).



Dessa funktioner är speciellt roliga eftersom de först beter sig svängande innan de "plötsligt" bestämmer sig för att agera som exponentialfunktioner i stället. Fascinerande!

12.2 Maclaurinserier

Entydighetssatsen för Maclaurinutvecklingar medför att om f är en analytisk funktion i $x = 0$ så måste $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$, dvs en potensserie $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ **måste** ha $c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.



Exempel

Låt oss återigen betrakta $f(x) = e^x$. Vi visar att $r(x) \rightarrow 0$ för varje $x \in \mathbf{R}$ om antalet termer i Maclaurinpolynomet går mot oändligheten.

Lösning. Lagranges form på resttermen för utvecklingen av ordning n ges av $r(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}$ för något ξ mellan 0 och x (där x är fixt). Då är

$$|r(x)| \leq \frac{e^\xi}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \frac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0, \quad \text{då } n \rightarrow \infty$$

enligt standardgränsvärde eftersom $a^n/n! \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$ (vi låter alltså $a = |x|$ och utnyttjar att $e^\xi \leq e^{|x|} < \infty$). Eftersom resttermen går mot noll har vi visat att

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbf{R}.$$



Konvergensradie från rekursionsformel

Ansatsen $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ till ekvationen $(1 + 3x^2)y' = 2xy$ med kravet $y(0) = 1$ leder till

$$(k+2)c_{k+2} = (2-3k)c_k \quad \Leftrightarrow \quad c_{k+2} = \frac{2-3k}{k+2}c_k, \quad \text{samtidigt } c_0 = 1 \text{ och } c_1 = 0.$$

Då gäller att samtliga $c_{2k+1} = 0$ och svaret fås på formen $\sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}x^{2k}$ (udda termer försvinner).

Låt nu $b_k = c_{2k}$ så att $y = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{2k}$. Kvottestet visar att vi har absolutkonvergens då

$$1 > \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|b_{k+1}x^{2(k+1)}|}{|b_k x^{2k}|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|c_{2k+2}|}{|c_{2k}|}x^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{2-3 \cdot 2k}{2k+2} \right| x^2 = 3x^2 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Vi sammanfattar några av de kända Maclaurinserierna med deras respektive konvergensområden. Jämför med motsvarande Maclaurinutvecklingar från föreläsning 3.



Maclaurinserier

(i) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad -\infty < x < \infty.$

(ii) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots, \quad -1 < x \leq 1.$

(iii) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots, \quad -\infty < x < \infty.$

(iv) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \cdots, \quad -\infty < x < \infty.$

$$\begin{aligned}
 \text{(v)} \quad (1+x)^\alpha &= x + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots \\
 &\quad + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots, \quad -1 < x < 1. \\
 \text{(vi)} \quad \arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots, \quad -1 \leq x \leq 1.
 \end{aligned}$$

12.3 Modifierade serieansatser

Vi har tidigare stött på DE av Euler-typ,

$$x^2 y'' + a x y' + b y = 0,$$

som vi kunde lösa genom att substituera $t = \ln x$ (för $x > 0$). Lösningarna kan även fås genom att finna rötterna till $r^2 + (a-1)r + b = 0$ och bilda $c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}$ om $r_1 \neq r_2$ och $c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_1} \ln x$ om $r_1 = r_2$ (komplexa rötter kräver lite omskrivning för att få över allt på reell form). Man visar detta genom att ansätta x^r som lösning och se vilka villkor man får på r . Utför detta! Kan man göra något liknande för ekvationer där a och b beror på x ?



Exempel

Hitta lösningar till Bessels DE av ordning 0 och $1/2$, dvs $x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2)y = 0$ med $\nu = 0$ och $\nu = 1/2$.

Lösning. En direkt potensserieansats visar sig resultera i svårlösta problem så vi ansätter i stället en modifierad ansats $y(x) = x^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ där r måste bestämmas på något sätt. Vi deriverar glatt och ser vad vi får:

$$\begin{aligned}
 y'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+r) x^{k+r-1} \\
 y''(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+r)(k+r-1) x^{k+r-2}
 \end{aligned}$$

från vilket det följer att ekvationen kan skrivas

$$\begin{aligned}
 0 &= x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2)y \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+r)(k+r-1) x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+r) x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+r+2} - \nu^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+r} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k ((k+r)(k+r-1) + k+r - \nu^2) x^{k+r} + \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2} x^{k+r} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k ((k+r)^2 - \nu^2) x^{k+r} + \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2} x^{k+r} \\
 &= c_0 (r^2 - \nu^2) x^r + c_1 ((1+r)^2 - \nu^2) x^{r+1} + \sum_{k=2}^{\infty} (c_k ((k+r)^2 - \nu^2) + c_{k-2}) x^{k+r}.
 \end{aligned}$$

Här ser vi att endera måste $c_0 = 0$ eller så måste $r = \pm\nu$ för att ekvationen ska vara sann (för alla $x > 0$). Vidare måste $c_1 = 0$ om inte $r = -1/2$. Sen blir det rekursiva sambandet

$$c_k = \frac{-c_{k-2}}{(k+r)^2 - \nu^2}, \quad k = 2, 3, 4, \dots$$

Fall 1: $\nu = 0$. Här ser vi att $r = 0$ för att slippa sätta $c_0 = 0$. Då blir $c_1 = 0$ vilket ger alla udda termer = 0. Vi undersöker de jämna:

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{-c_0}{2^2} \\ c_4 &= \frac{-c_2}{4^2} = (-1)^2 \frac{c_0}{2^2 \cdot 4^2} = (-1)^2 \frac{c_0}{2^{2+2} \cdot 2^2} \\ c_6 &= \frac{-c_4}{6^2} = (-1)^3 \frac{c_0}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} = (-1)^3 \frac{c_0}{2^{2+2+2} \cdot 2^2 \cdot 3^2} \\ &\vdots \\ c_{2k} &= \frac{-c_{2k-2}}{(2k)^2} = \frac{(-1)^k c_0}{2^{2k} (k!)^2}. \end{aligned}$$

Vi erhåller alltså $y(x) = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} (k!)^2} x^{2k}$. Konvergensradien hittar vi till exempel med kvotkriteriet:

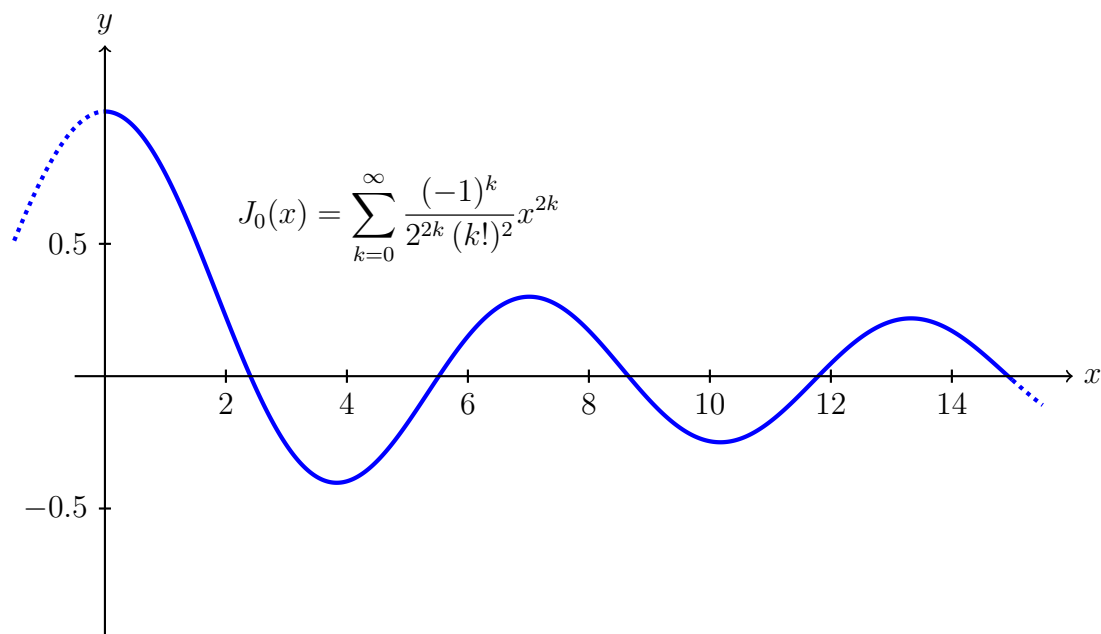
$$\left| \frac{x^{2(k+1)}}{2^{2(k+1)} ((k+1)!)^2} \cdot \frac{2^{2k} (k!)^2}{x^{2k}} \right| = \frac{|x|^2}{4} \left(\frac{1}{k+1} \right)^2 \rightarrow 0$$

då $k \rightarrow \infty$. Serien konvergerar alltså för alla x . Dubbelroten som vi fann ovan ($r = 0$) är anledningen till att vi bara erhåller en "sorts" lösning. För att hitta en oberoende lösning till krävs en hel del arbete till så vi stannar här.

Den lösning vi hittat brukar kallas *Bessels* funktion av ordning 0 och betecknas

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} (k!)^2} x^{2k}.$$

Det är en svängande funktion med avtagande amplitud.



Fall 2: $\nu^2 = 1/4$. Här ser vi att $r = \pm 1/2$ för att slippa sätta $c_0 = 0$. När det gäller c_1 beror det på om $\nu = 1/2$ eller om $\nu = -1/2$. För $\nu = 1/2$ måste $c_1 = 0$ på samma sätt som i fall 1. För $\nu = -1/2$ är c_1 godtycklig eftersom $(1+r)^2 - \nu^2 = 0$ i det fallet. Vi undersöker de jämna koefficienterna först:

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{-c_0}{2(2 \pm 1)} \\ c_4 &= \frac{-c_2}{4(4 \pm 1)} = (-1)^2 \frac{c_0}{2(2 \pm 1) \cdot 4(4 \pm 1)} \\ c_6 &= \frac{-c_4}{6(6 \pm 1)} = (-1)^3 \frac{c_0}{2(2 \pm 1) \cdot 4(4 \pm 1) \cdot 6(6 \pm 1)} \\ &\vdots \\ c_{2k} &= \frac{-c_{2k-2}}{2k(2k \pm 1)} = (-1)^k \frac{c_0}{2(2 \pm 1) \cdot 4(4 \pm 1) \cdot 6(6 \pm 1) \cdots 2k(2k \pm 1)}. \end{aligned}$$

För $\nu = 1/2$ är det plussen som gäller och vi ser då att $c_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$ för $k = 0, 1, 2, \dots$. Vi erhåller alltså

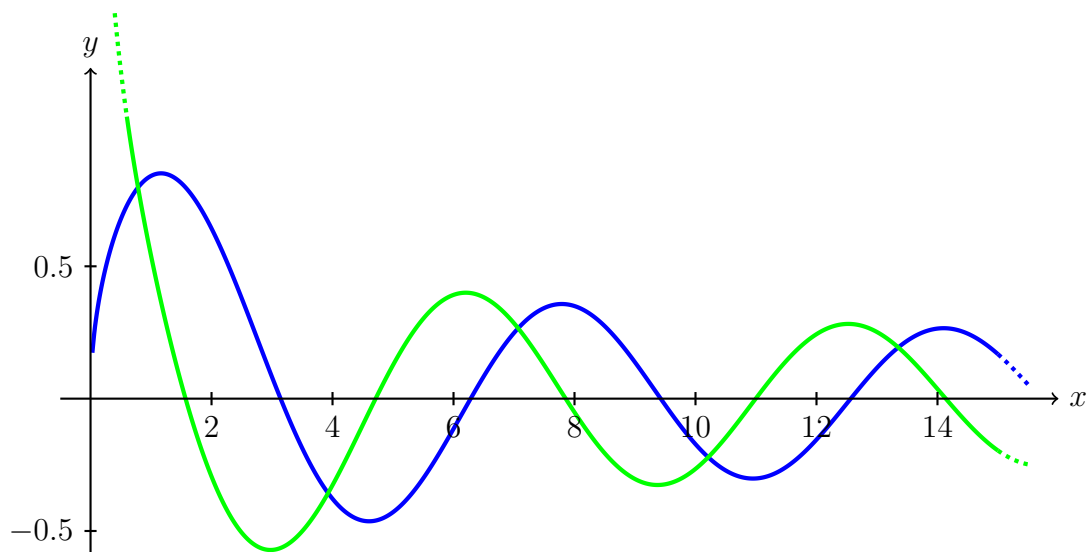
$$y(x) = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1/2} = c_0 x^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = c_0 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

eftersom vi känner igen Maclaurinutvecklingen för $\sin x$. Serien konvergerar för alla x , men vi har kravet $x > 0$ från tidigare så vi har enbart lösningar för $x > 0$.

När det gäller $\nu = -1/2$ är c_1 godtycklig och vi kan ta fram koefficienterna $c_{2k+1} = \frac{(-1)^k c_1}{(2k+1)!}$ samt $c_{2k} = \frac{(-1)^k c_0}{(2k)!}$ för $k = 0, 1, 2, \dots$. Detta ger oss lösningarna

$$y(x) = c_0 x^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + c_1 x^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = c_0 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + c_1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

för $x > 0$. Vi erhöi här precis Maclaurinutvecklingarna för $\cos$ respektive $\sin$. Dessa funktioner kan ritas upp (den gröna är $\cos$ -termen och den blåa är $\sin$ -termen).



Kapitel 13

Oändlig summering – en återblick

13.1 Generaliserade integraler

Påminn er om följande definition. Om f är kontinuerlig på $]a, b[$ så definierar vi den *generaliserade* integralen enligt

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{s \rightarrow a^+} \int_s^c f(x) dx + \lim_{t \rightarrow b^-} \int_c^t f(x) dx, \text{ där } a < c < b,$$

om båda gränsvärdena existerar ändligt (oberoende av varandra). I fallet då båda gränsvärdena existerar kallar vi integralen för **konvergent**, annars **divergent**.

Om $\int_a^b |f(x)| dx < \infty$ kallar vi $\int_a^b f(x) dx$ för **absolutkonvergent**. Notera att en absolutkonvergent integral *alltid* är konvergent och att

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

För att avgöra konvergens använder vi ofta jämförelsesatser.

13.1.1 Jämförelsesatser



Sats. Om $0 \leq f(x) \leq g(x)$ för $a < x < b$ så gäller $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

(i) $\int_a^b g(x) dx$ konvergent $\Rightarrow \int_a^b f(x) dx$ konvergent.

(ii) $\int_a^b f(x) dx$ divergent $\Rightarrow \int_a^b g(x) dx$ divergent.



Sats. Låt f och g vara icke-negativa kontinuerliga funktioner sådana att:

(i) $\int_a^b f(x) dx$ och $\int_a^b g(x) dx$ är generaliserade **endast** i $x = b$;

(ii) $0 < \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$.

Då gäller att

$$\int_a^b f(x) dx \text{ är konvergent} \Leftrightarrow \int_a^b g(x) dx \text{ är konvergent.}$$

Generalisering i $x = a$ istället fungerar analogt, men se till att endast en punkt är generaliserad i taget. Dela upp integralen annars. För att använda dessa satser är det användbart att ha något enkelt att jämföra med.



Vanliga jämförelsefunktioner

(i) $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx < \infty$ om och endast om $\alpha < 1$;

(ii) $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx < \infty$ om och endast om $\alpha > 1$.

Givetvis går det bra att jämföra med något mer komplicerat, även om analysen av $\int g(x) dx$ då blir mer komplicerad.



Exempel

Konvergerar integralen $\int_0^\infty \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \arctan x}{x\sqrt{\ln(1+x)}} dx$? Motivera noggrant.

Lösning. Eftersom integralen är generaliserad både i 0 och ∞ så delar vi upp i två delar:

$$\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \arctan x}{x\sqrt{\ln(1+x)}} dx + \int_1^\infty \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \arctan x}{x\sqrt{\ln(1+x)}} dx.$$

Vi börjar med att undersöka integralen på $[0, 1]$. För $x \in]0, 1]$ gäller att

$$\left| \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \arctan x}{x\sqrt{\ln(1+x)}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{\arctan x}{x} \frac{1}{\sqrt{x^{-1} \ln(1+x)}}.$$

Nu vet vi att $x^{-1} \arctan x \rightarrow 1$ och $x^{-1} \ln(1+x) \rightarrow 1$ då $x \rightarrow 0$, så

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x}{x} \frac{1}{\sqrt{x^{-1} \ln(1+x)}} = 1.$$

Låt därför $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ och $f(x) = g(x) \frac{\arctan x}{x} \frac{1}{\sqrt{x^{-1} \ln(1+x)}}$ för $x > 0$. Då är $f, g \geq 0$ för $x > 0$ och både f och g är kontinuerliga för $x > 0$. Vidare visade vi ovan att

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1 \in]0, \infty[\text{ då } x \rightarrow 0^+,$$

så enligt jämförelsesatsen på gränsvärdesform följer det att

$$\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \arctan x}{x \sqrt{\ln(1+x)}} dx$$

kommer vara absolutkonvergent eftersom vi vet att $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx < \infty$.

Vi undersöker nu integralen på $[1, \infty[$. Vi skriver

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \arctan x}{x \sqrt{\ln(1+x)}} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)\right) \arctan x}{x \sqrt{\ln(1+x)}} \\ &= \frac{1}{x \sqrt{x} \sqrt{\ln(1+x)}} \left(1 + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)\right) \arctan x \end{aligned}$$

så vi låter $g(x) = \frac{1}{x^{3/2} \sqrt{\ln(1+x)}}$ för $x > 0$. Då gäller att

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left(1 + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)\right) \arctan x \rightarrow \frac{\pi}{2}, \text{ då } x \rightarrow \infty.$$

Eftersom f och g är kontinuerliga och icke-negativa på $]1, \infty[$ samt att gränsvärdet mot ∞ för f/g är $\frac{\pi}{2} \in]0, \infty[$ så följer det från jämförelsesatsen på gränsvärdesform att $\int_1^\infty f(x) dx$ är konvergent om och endast om $\int_1^\infty g(x) dx$ är konvergent. Vi undersöker denna integral:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2} \sqrt{\ln(1+x)}} dx \leq \frac{1}{\sqrt{\ln 2}} \int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}} dx$$

eftersom $\ln(1+x) \geq \ln 2$ för $x \geq 1$. Den sista integralen är känd som konvergent ($\alpha = 3/2$ är större än 1).

Svar. Konvergent!

13.2 Numeriska Serier

Om a_k , $k = 0, 1, 2, \dots$ är en talföljd definierar vi **serien** s enligt

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$$

i de fall då detta gränsvärde existerar. Vi kallar $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ för **delsummor** av $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Analogt med integraler (många resultat har en motsvarighet men inte alla så var försiktig) kallar vi en serie för **absolutkonvergent** om $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ är konvergent.

Ett mycket användbart resultat är divergenstestet. Märk väl att det *endast* är en implikation. Det finns gått om fall där termerna går mot noll men serien fortfarande är divergent (tex $a_k = 1/k$).



Divergenstestet

Sats. Om $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \neq 0$ så är $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.



Vanliga serier

(i) Den geometriska serien $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ om och endast om $|q| < 1$. Annars divergent.

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} < \infty \Leftrightarrow \alpha > 1$.



Sats. Om $0 \leq a_k \leq b_k$ för alla k så är $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k$. Speciellt gäller att

(i) $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent,

(ii) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ divergent.



Cauchys integralkriterium

Sats. Om $f(x) \geq 0$ är en avtagande funktion för $x \geq 1$ så gäller att

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) < \infty \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx < \infty.$$

**Exempel**

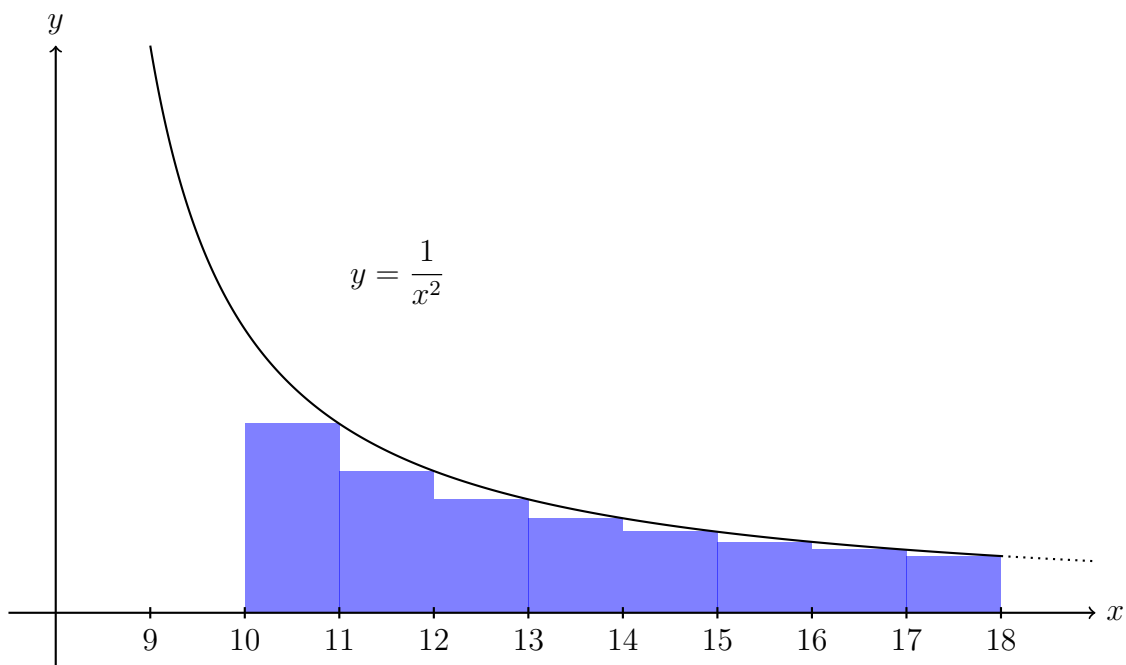
Visa att $\sum_{k=11}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{1}{10}$.

Lösning. Eftersom funktionen $f(x) = 1/x^2$ är positiv och strängt avtagande för $x \geq 1$, så kommer

$$\sum_{k=11}^n \frac{1}{k^2} < \int_{10}^n \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{10}^n = \frac{1}{10} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{10}$$

för alla $n > 10$. Således kommer delsummorna i den positiva serien att vara uppåt begränsade, så serien är konvergent och dess värde är begränsat av

$$\sum_{k=11}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{1}{10}.$$



Sats. Om $a_k \geq 0$ och $b_k \geq 0$ samt

$$0 < \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} < \infty$$

så gäller att

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty.$$

**Rot- och kvotkriteriet**

Sats. Om $Q = \lim_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{1/k}$ eller $Q = \lim_{k \rightarrow \infty} |a_{k+1}/a_k|$ existerar så är $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolutkonvergent om $Q < 1$ och divergent om $Q > 1$.

**Leibniz sats**

Sats. Om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är en serie sådana att

- (i) serien är alternerande så att $a_{k+1} = -a_k$ för alla k som det summeras över,
- (ii) seriens termer går mot noll: $a_k \rightarrow 0$,
- (iii) absolutbeloppet av seriens termer avtar monotont: $|a_k| \geq |a_{k+1}| \geq |a_{k+2}| \geq \dots$,

så är serien konvergent. En serie som uppfyller dessa krav uppfyller även att

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| \leq |a_{n+1}|.$$

13.3 Potensserier

Dessa definieras som

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$$

för de x där detta uttryck har mening (dvs serien konvergerar).

Varje potensserie $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ har en maximal *konvergensradie* R så att serien är absolutkonvergent då $|x| < R$ och divergent då $|x| > R$. Vidare gäller att f kan deriveras kontinuerligt oändligt många gånger på $] - R, R[$ och att

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} \quad \text{samtidigt} \quad \int_0^x f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1},$$

där dessa potensserier har samma konvergensradie R .

**Exempel**

För vilka $x \in \mathbf{R}$ konvergerar $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{3k}}{8^k \ln k}$?

Lösning. Vi börjar med att bestämma konvergensradien R för serien. Eftersom

$$\left| \frac{x^{3k}}{8^k \ln k} \right|^{1/k} = \left(\frac{|x|}{2} \right)^3 e^{-\frac{1}{k} \ln \ln k} \rightarrow \left(\frac{|x|}{2} \right)^3, \quad \text{då } k \rightarrow \infty,$$

så är serien enligt rotkriteriet absolutkonvergent då

$$\left(\frac{|x|}{2} \right)^3 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < 2$$

och divergent om $x > 2$ eller $x < -2$. Kvar att undersöka är punkterna $x = \pm 2$. Om $x = 2$ ges serien av

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{3k}}{8^k \ln k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k}$$

som är divergent eftersom $\ln k \leq k$ och den harmoniska serien är divergent. Om $x = -2$ kan serien uttryckas

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-2)^{3k}}{8^k \ln k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln k}.$$

Eftersom termerna i denna serie avtar mot noll, dvs $1/\ln(k+1) < 1/\ln k$ och $1/\ln k \rightarrow 0$, samt att serien är alternerande, följer det att serien är konvergent enligt Leibniz kriterium.

Svar: $-2 \leq x < 2$.

13.4 Uppskattningar

Vi har tagit fram verktyg för att överskatta (eller underskatta) både hela serier och svansen på serier. Detta är ett viktigt verktyg för att både uppskatta storlek på funktionsvärden (om en funktion är given som en potensserie) eller hur många termer man behöver ta med för att få en bra approximation.



Exempel

Låt $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k}$ för $-1 < x \leq 1$. Visa att

$$-\frac{391}{960} < f(1/2) < -\frac{77}{192} \quad \text{och} \quad \frac{131}{192} < f(-1/2) < \frac{667}{960}.$$

Lösning. Kvot- eller rottestet visar att serien har konvergensradie 1, så det är inga problem att betrakta $f(\pm 1/2)$. Om $x = 1/2$ så är serien alternerande och termernas belopp avtar monotont mot noll. Alltså konvergerar även serien enligt Leibniz kriterium och vi kan använda uppskattningar för sådana serier. Vi har därmed att

$$f(1/2) = \underbrace{-\frac{1}{2} + \frac{1}{12} - \frac{1}{24}}_{=-5/12} + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k k} \leq -\frac{5}{12} + \frac{(-1)^4}{16 \cdot 4} = -\frac{77}{192},$$

där vi utnyttjat att svansen på serien är positiv och utgör en serie konvergent enligt Leibniz kriterium. På liknande sätt ser vi att

$$f(1/2) = \underbrace{-\frac{1}{2} + \frac{1}{12} - \frac{1}{24} + \frac{1}{64}}_{=-77/192} + \sum_{k=5}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k k} \geq -\frac{77}{192} - \frac{1}{32 \cdot 5} = -\frac{391}{960}.$$

där vi utnyttjat att svansen på serien nu är negativ och utgör en serie konvergent enligt Leibniz kriterium. Vi tar alltså med olika många termer beroende på om vi vill att svansen ska vara positiv eller negativ!

Om $x = -1/2$ så är inte serien längre alternerande så vi måste hitta på något annat. Vi ser att

$$f(-1/2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k} = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{64}}_{=131/192} + \sum_{k=5}^{\infty} \frac{1}{k 2^k}$$

och

$$0 < \sum_{k=5}^{\infty} \frac{1}{k 2^k} < \frac{1}{5} \sum_{k=5}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \frac{1}{1 - 1/2} = \frac{1}{5 \cdot 2^4} = \frac{1}{80},$$

där vi överskattade med en geometrisk serie som har kvoten $1/2$ och första term $(1/2)^5$. Således måste

$$\frac{131}{192} < f(-1/2) < \frac{131}{192} + \frac{1}{80} = \frac{667}{960}.$$

Notera att vi faktiskt vet att $f(1/2) = \ln(2/3)$ och att $f(-1/2) = \ln 2$ (varför?). Ovanstående argument ger alltså uppskattningar för $\ln(2/3)$ och $\ln 2$.

13.5 DE med potensserieansats

Vi kan även använda en potensserieansats för att hitta lösningar till linjära differentialekvationer. Åtminstone kan vi finna de lösningar som kan representeras som en potensserie.



Exempel

Lös ekvationen $y' - 2xy = 1$, $y(0) = 0$, med potensserieansats. I svaret skall anges (minst) fyra nollskilda koefficienter, rekursionsformeln för seriens koefficienter och potensseriens konvergensradie.

Lösning. Vi ansätter en potensserie

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

med konvergensradie $R > 0$. Då gäller att

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1} (k+1) x^k$$

samt

$$2xy(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2c_k x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} 2c_{k-1} x^k.$$

Alltså måste

$$1 = y' - 2xy = c_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_{k+1}(k+1) - 2c_{k-1}) x^k.$$

Eftersom koefficienterna är entydiga så innebär detta att $c_1 = 1$ samt att

$$c_{k+1}(k+1) - 2c_{k-1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_{k+1} = \frac{2c_{k-1}}{k+1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Villkoret att $y(0) = 0$ ger att $c_0 = 0$, vilket resulterar i att

$$c_2 = c_4 = c_6 = \dots = 0.$$

För udda index ser vi att

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_3 &= \frac{2c_1}{3} = \frac{2}{3} \\ c_5 &= \frac{2c_3}{5} = \frac{2^2}{3 \cdot 5} \\ c_7 &= \frac{2c_5}{7} = \frac{2^3}{3 \cdot 5 \cdot 7} \\ &\vdots \\ c_{2k+1} &= \frac{2^k}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k+1)}. \end{aligned}$$

Svaret ges alltså av serien

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} x^{2k+1}$$

då de jämna termerna försvinner. Här är c_{2k+1} koefficienterna vi bestämde ovan. Konvergensradien kan vi enklast finna medelst kvottestet:

$$\left| \frac{c_{2(k+1)+1} x^{2(k+1)+1}}{c_{2k+1} x^{2k+1}} \right| = \left| \frac{c_{2k+3}}{c_{2k+1}} \right| |x|^2 = \left| \frac{2}{2k+3} \right| |x|^2 \rightarrow 0,$$

där vi använde rekursionsformeln

$$\frac{c_{k+1}}{c_{k-1}} = \frac{2}{k+1}$$

som vi härledde ovan. Konvergensradien är således oändlig.

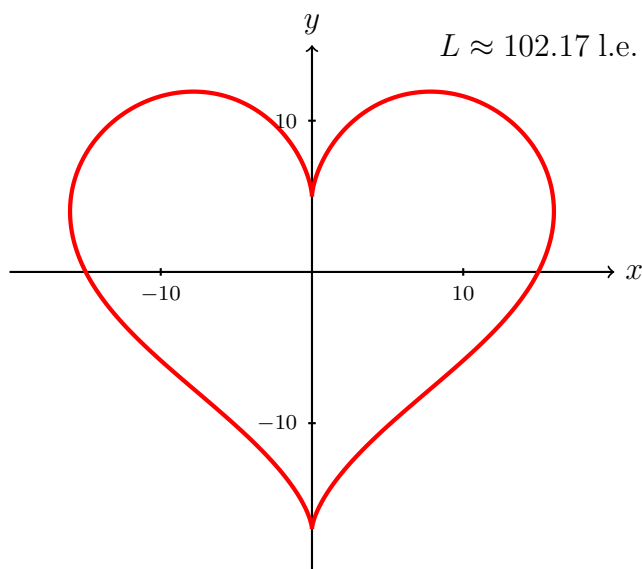
Svar: $y(x) = x + \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^5}{15} + \frac{8x^7}{105} + \dots$, $R = \infty$.

Kapitel 14

Kurvlängd, area och volym

14.1 Kurvlängd

Vi börjar med att betrakta situationen då en kurva i planet ges på parameterform: $(x(t), y(t))$. Detta innebär att både x - och y -koordinaterna simultant uttrycks som funktioner av någon parameter t som varierar i ett intervall. Till exempel skulle $x(t) = \cos t$ och $y(t) = \sin t$, där vi låter $0 \leq t \leq 2\pi$, beskriva cirkeln $x^2 + y^2 = 1$. På detta sätt kan vi även få med fallet då en kurva inte kan uttryckas som en funktion $y = f(x)$. Exempelvis kan kurvan som bestäms av $x = 16 \sin^3 t$ och $y = 13 \cos t - 5 \cos 2t - 2 \cos 3t - \cos 4t$ med $0 \leq t \leq 2\pi$ ritas enligt följande¹.



Att beskriva detta som ett funktionssamband $y = f(x)$ förefaller ganska omöjligt. Omvänt däremot, om vi utgår från en funktion kan vi alltid skapa en parameterframställning.



Parameterform för en funktionskurva

Om kurvan vi är intresserad av ges av en funktion f på ett intervall $[a, b]$, i.e., $y = f(x)$ för $a \leq x \leq b$, så kan vi beskriva detta på parameterform genom att till exempel välja $x = t$ och $y = f(t)$, där $a \leq t \leq b$.

¹En dödskanie visade sig vara för svår att beskriva matematiskt...

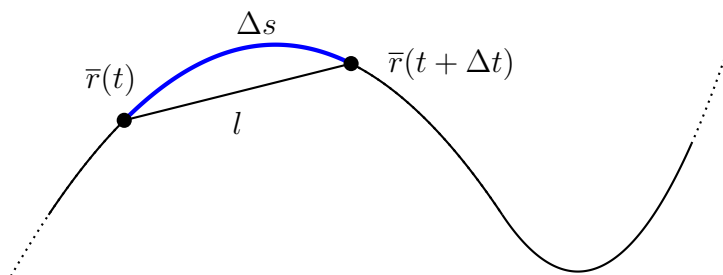
Än så länge har vi egentligen inte ställt några krav på ingående funktioner, men för att på något (enkelt) sätt kunna definiera vad vi menar med kurvlängd kommer vi att kräva att funktionerna är kontinuerligt deriverbara (dvs f är deriverbar och f' är kontinuerlig). Vi brukar sammanfatta detta villkor genom att säga att $f \in C^1([a, b])$. Vi antar underförstått att detta gäller om inget annat anges.



Sats. Om $x \in C^1([a, b])$ och $y \in C^1([a, b])$ så ges längden av kurvan $(x(t), y(t))$ för de t där $a \leq t \leq b$, av

$$L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Vi skissar beviset lite informellt bara för att se att det verkar rimligt; det finns ett mer precist bevis i kursboken. Vi ritar en figur och funderar över hur vi kan approximera längden av en liten del av kurvan. Låt $\Delta t > 0$ vara ett litet tal och låt $\bar{r}(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbf{R}^2$. Vi har följande principfigur:



Då är det lilla bågelementet $\Delta s \approx l$ om Δt är litet och kurvan glatt (ges av deriverbar funktion). Längden l i sin tur kan vi beräkna genom

$$\begin{aligned} l &= |\bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}(t)| \\ &= \sqrt{(x(t + \Delta t) - x(t))^2 + (y(t + \Delta t) - y(t))^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}\right)^2} \Delta t \rightarrow \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \end{aligned}$$

då $\Delta t \rightarrow 0$. Vi väljer nu att kalla det sista uttrycket för *bågelementet* ds . Med andra ord, vi definierar

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$



Exempel

Räkna ut omkretsen för en cirkel med radie R .

Lösning. Vi vet redan svaret, men vi använder satsen ovan för att illustrera. Lämpligen representerar vi cirkeln som $x(t) = R \cos t$ och $y(t) = R \sin t$ för $0 \leq t \leq 2\pi$. Detta är ett sätt att parametrisera cirkeln på. Eftersom ingående funktioner är snälla erhåller vi då kurvlängden

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} |R| \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt \\ &= R \int_0^{2\pi} dt = 2\pi R, \end{aligned}$$

eftersom $|R| = R$ då $R > 0$.

Ovanstående är ett specialfall för kurvlängd då vi använder polära koordinater. Mer generellt låter vi radien vara en given funktion $r = h(t)$, så $x(t) = r(t) \cos t$ och $y(t) = r(t) \sin t$. Satsen ovan implicerar att $ds = \sqrt{h(t)^2 + h'(t)^2} dt$ (visa det). Låt oss sammanfatta detta användbara resultat.



Kurvlängd i polära koordinater

Om en kurva Γ ges i polära koordinater, $x = r \cos t$ och $y = r \sin t$, där $r = h(t)$ för $\alpha \leq t \leq \beta$ och h är kontinuerlig, så kan längden av Γ beräknas enligt

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{h(t)^2 + (h'(t))^2} dt.$$



Kurvlängd av en funktionskurva

Om vi är intresserade av längden av kurvan $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, kan vi enkelt ställa upp uttrycket för detta genom att parametrisera som i exemplet tidigare: $x(t) = t$ och $y(t) = f(t)$. Då är $x'(t) = 1$ och $y'(t) = f'(t)$ och längden ges av

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (\star)$$

Rent konkret blir kalkylerna ofta ganska jobbiga eftersom integranden innehåller kvadratrötter av andragsuttryck. Som tur är behandlades många sådana situationer i envariabel-ettan!



Exempel

Räkna ut längden av kurvan $y = x^2$ för $0 \leq x \leq 1$.

Lösning. Vi ser att kurvan ges av en C^1 -funktion och att $y = f(x)$ med $f(x) = x^2$. Då ges alltså kurvlängden av

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2} dx &= \int_0^1 1 \cdot \sqrt{1 + 4x^2} dx \\ &= \left[x\sqrt{1 + 4x^2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{4x^2}{\sqrt{1 + 4x^2}} dx \\ &= \sqrt{5} - \int_0^1 \frac{1 + 4x^2}{\sqrt{1 + 4x^2}} dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2}} dx \\ &= \sqrt{5} - \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx + \left[\frac{1}{2} \ln(2x + \sqrt{1 + 4x^2}) \right]_0^1 \\ &= - \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx + \sqrt{5} + \frac{\ln(2 + \sqrt{5})}{2}, \end{aligned}$$

där vi utnyttjat välkänd (näja..) primitiv funktion till $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Eftersom vi får tillbaka integralen med ”rätt” tecken har vi nu

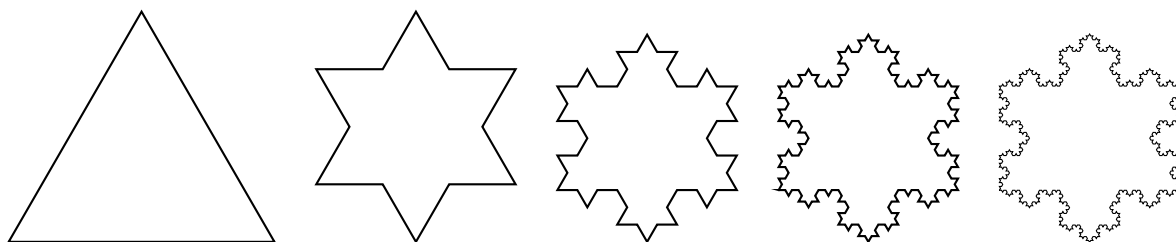
$$\int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \frac{2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5})}{4}.$$

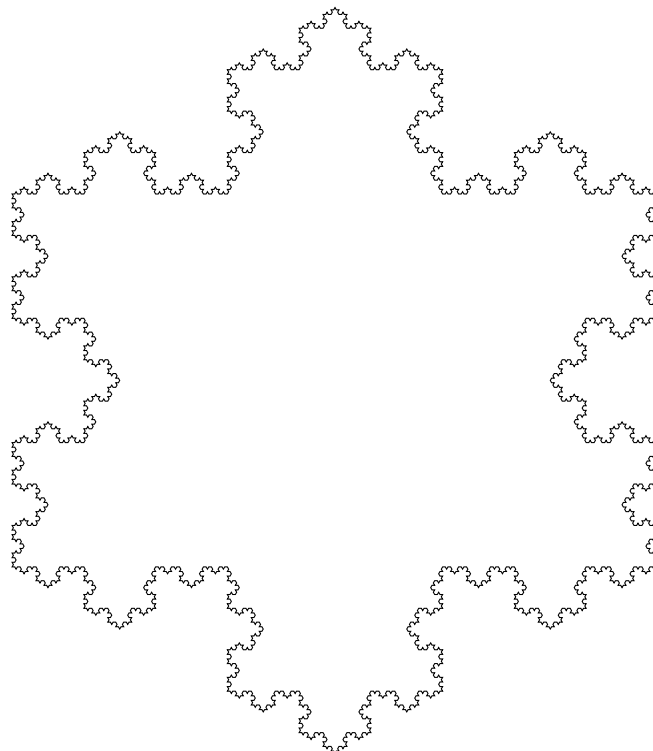


Definition av kurvlängd

Om $f \in C^1$ kan man definiera längden L av en kurva direkt med $(\star)$ ovan, men observera att vi inte direkt kan använda satsen som definition av kurvlängd för alla kurvor. Betrakta till exempel fallet då $f(x) = |x|$. Som bekant är f inte deriverbar i origo och därmed fungerar inte satsen som formulerad. Men vi vet också att man kan dela upp Riemannintegraler i två delar och därmed kunna räkna ut längden av kurvan på varje del och summera dessa. Detta fungerar även om vi har många fler punkter där f' inte finns (åtminstone så länge detta är ett ändligt antal). Vad händer sen?

Ett exempel på en kurva där det går åt skogen att räkna ut längden är Kochs snöflinga. Man startar med en liksidig triangel och delar sedan varje sida i tre delar och ersätter den mittersta med en ny liksidig triangel. Processen upprepas på alla nya linjesegment om och om igen oändligt många gånger. Den kurva som uppstår visar sig inte ha någon parametrisering som är deriverbar i en enda punkt! Hur ska vi definiera längden av en sådan kurva? Vi ritar de sex första stegen.





Faktum är att $L = \infty$ är den enda rimliga definitionen. Varför? Låt L_n vara kurvlängden för iteration n och antag att kantlängden i den första triangeln är 1. Då är $L_1 = 3$. När $n = 2$ får varje linjesegment längden $1/3$ och varje sida ger upphov till 4 nya kanter. Således blir kurvlängden när $n = 2$ inget annat än $L_2 = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} = 4$. När $n = k$ finns det $3 \cdot 4^k$ kanter, var och en av dessa har längden 3^{-k} . Alltså ges den totala kurvlängden L_k för iteration k av precis $L_k = 3 \cdot 4^k \cdot 3^{-k} = 3 \left(\frac{4}{3}\right)^k$. När $n \rightarrow \infty$ är det således tydligt att $L_n \rightarrow \infty$.

Vad blir arean som innesluts av kurvan? Är frågan rimlig? Vid iteration $k - 1$ finns $3 \cdot 4^{k-1}$ kanter, så vid iteration k läggs det till $3 \cdot 4^{k-1}$ trianglar, var och en med arean $\frac{3^{-k} \cdot 3^{-k} \sqrt{3}}{4}$. Således blir totala arean A_n vid iteration n (med $n \geq 2$)

$$\begin{aligned} A_n &= A_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3 \cdot 4^{k-1} 9^{-k} \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4 \cdot 9} \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{4}{9}\right)^k = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{1 - (4/9)^{n-1}}{1 - 4/9} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right) \rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{5}, \quad \text{då } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

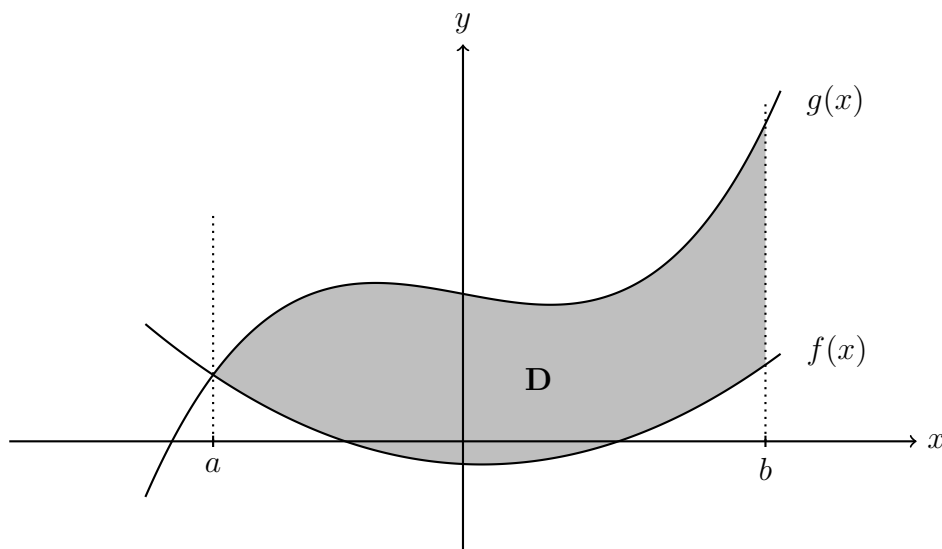
En rimlig tolkning på arean som omsluts av snöflingan är alltså $2\sqrt{3}/5$.

14.2 Plan area

Om $g(x) \geq f(x)$ på ett intervall $[a, b]$ så ges arean A mellan f och g av

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x)) \, dx$$

under förutsättning att funktionerna är tillräckligt snälla. Området vars area vi är intresserade av är $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$.



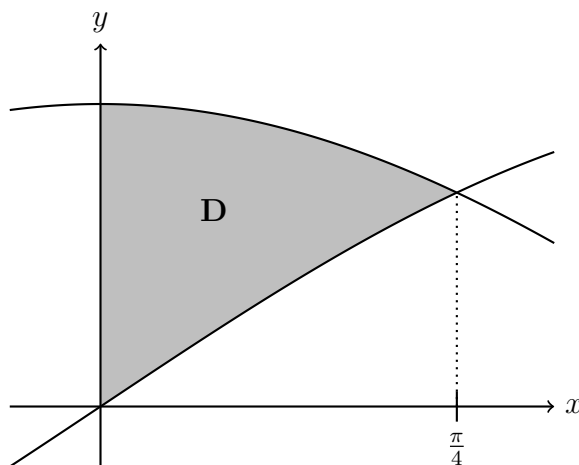
Exempel

Räkna ut arean mellan $y = \cos x$ och $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi/4$.

Lösning. Arean ges av

$$A = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx = [\sin x + \cos x]_0^{\pi/4} = \sqrt{2} - 1$$

vilket är positivt så svaret är inte helt orimligt. Vi bör även kontrollera att $\cos x \geq \sin x$ för $0 < x < \pi/4$. En figur visar tydligt hur situationen ser ut, och här är alltså den skuggade arean lika med $\sqrt{2} - 1 \approx 0.41$ areaenheter.

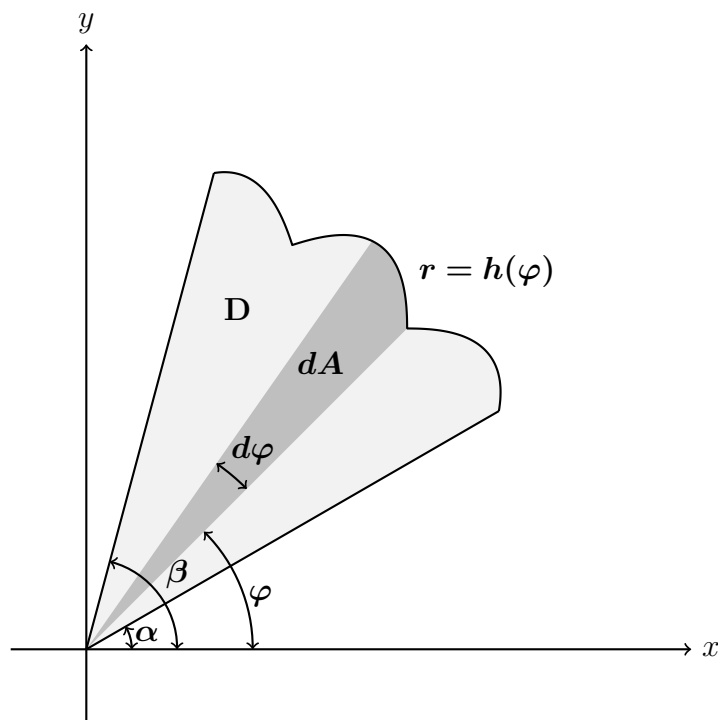


14.2.1 Area i polära koordinater

Polära koordinater är användbara i situationer då vi har lättare att beskriva hur långt från origo något befinner sig än att precisera hur variation ser ut direkt i x - och y -koordinater. Vi har som bekant $x = r \cos \varphi$ och $y = r \sin \varphi$ och kan då betrakta områden som ges på formen

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq r \leq h(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta\}$$

där $h(\varphi)$ är någon kontinuerlig funktion och $\alpha \leq \beta$. Vi skissar hur situationen ser ut.



Arenan av detta område kan beräknas enligt följande:

$$A(D) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{h(\varphi)^2}{2} d\varphi.$$

Motiveringen till areaformeln kommer från att vi kan betrakta ett litet areaelement vid vinkeln φ enligt

$$dA = \pi h(\varphi)^2 \cdot \frac{d\varphi}{2\pi} = \frac{h(\varphi)^2}{2} d\varphi$$

eftersom det är en del av en disk med radien $h(\varphi)$. Vi summerar dessa areaelement och erhåller formeln ovan.

14.3 Volym

Både rotationsarea- och rotationsvolymberäkningar hör egentligen hemma i en flervariabelanalyskurs, men på grund av rotationssymmetrin kan vi ofta reducera area- och volymberäkningar till ett fall med bara en variabel. Mycket av kommande formler är lite ”handviftande” men visar ändå på hur kraftfulla verktyg integral- och differentialkalkyl är.

14.3.1 Rotationsvolym via skivor

Vi börjar med att beskriva det som brukar kallas skivformeln. Vi betraktar en icke-negativ funktion $f(x)$ och låter området

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$$

rotera ett varv kring x -axeln. För varje värde $x \in [a, b]$ uppstår då en disk (skiva) med area $A(x) = \pi f(x)^2$ eftersom radien för disken ges av funktionsvärdet i punkten x : $r = f(x)$.

Vi multiplicerar med dx för att få en infinitesimal cylinder (höjden är alltså dx) som har volymen $dV = A(x) dx = \pi f(x)^2 dx$. Vi summerar dessa och erhåller då den så kallade skivformeln:

$$V = \int_a^b dV = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$



Skivformeln

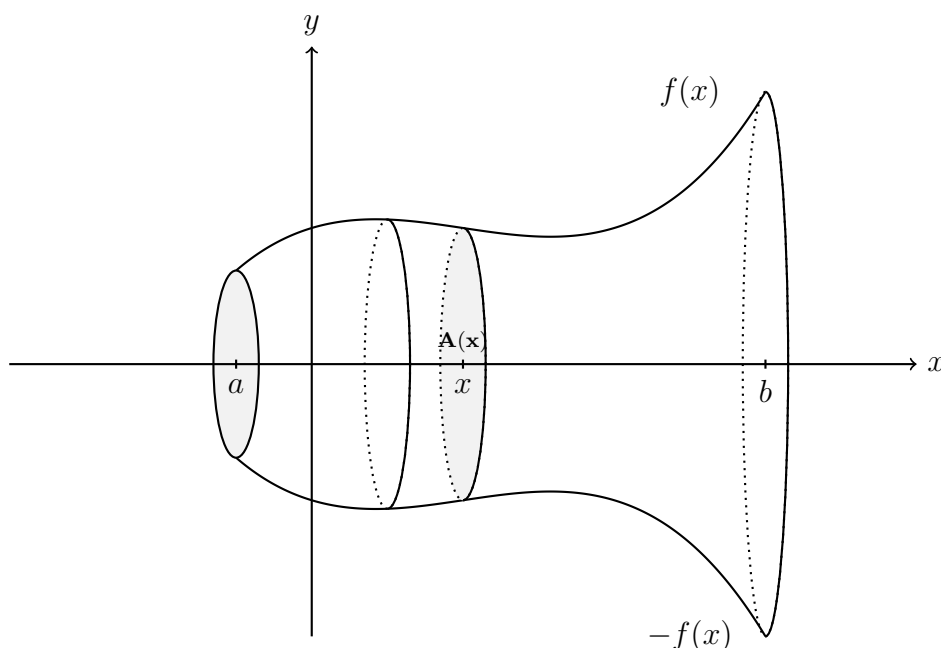
Sats. Om $f(x) \geq 0$ är kontinuerlig så ges volymen V som uppstår då området

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$$

roterar ett varv kring x -axeln av

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Vi bevisar inte satsen utan nöjer oss med argumentet ovan. En principskiss visar också hur vi summerar små skivor för att få hela volymen. Formeln är även känd som brödskeivformeln. Varför tror du formeln fått det namnet?



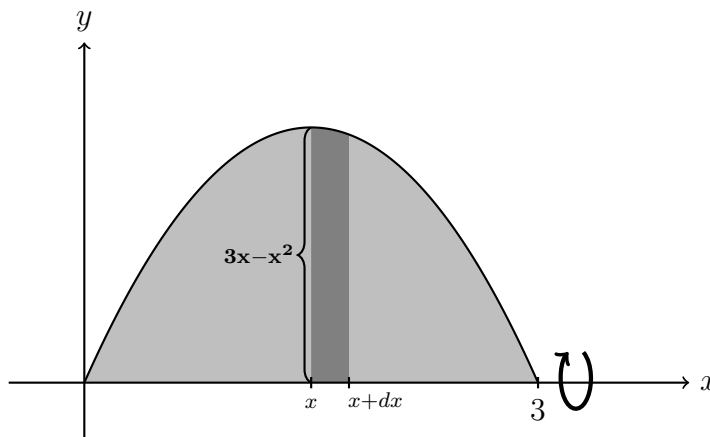
Exempel

Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området som begränsas av kurvan $y = 3x - x^2$ och x -axeln roteras ett varv kring x -axeln.

Lösning. Kurvan $y = 3x - x^2$ skär x -axeln då $3x - x^2 = 0$, vilket sker precis då $x = 0$ och $x = 3$. För $0 \leq x \leq 3$ är $3x - x^2 \geq 0$, så volymen vi söker ges av

$$\pi \int_0^3 (3x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^3 (9x^2 - 6x^3 + x^4) dx = \pi \left[3x^3 - \frac{3x^4}{2} + \frac{x^5}{5} \right]_0^3 = \pi \left(81 - \frac{3^6}{10} \right).$$

Man bör se till att detta uttryck åtminstone är positivt (varför?). En figur är också på sin plats:



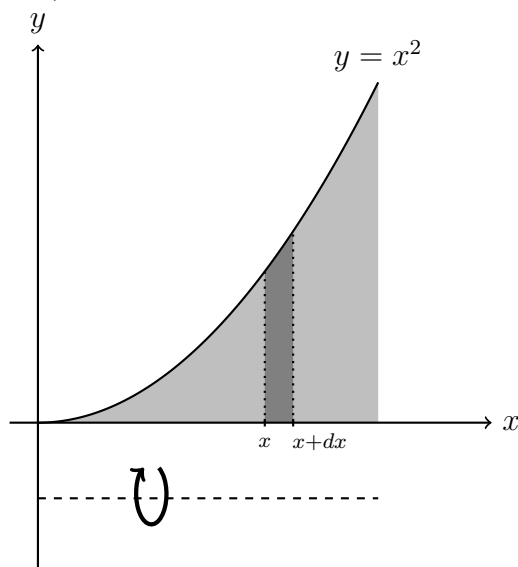
Vi kan även ta hänsyn till ihåligheter i rotationskroppen som i följande exempel.



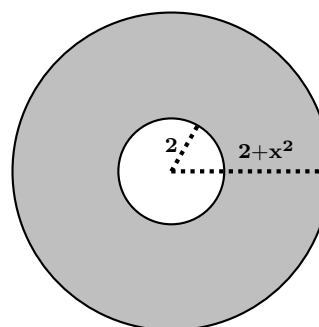
Exempel

Bestäm volymen då området $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq x^2$, roterar ett varv kring $y = -2$.

Lösning. Det vanligaste felet är att man missar att det är en viss specifik yta som roterar runt en axel, inte området mellan en kurva och rotationsaxeln. De cylindrar som uppstår (med höjd dx) är INTE homogena utan har ett hålrum. Vi skissar hur situationen ser ut i planet:



Ett tvärsnitt vid x :



Således kommer volymen att ges av

$$\pi \int_0^3 (x^2 + 2)^2 dx - \pi \cdot 2^2 \cdot 3 = \pi \left(\left[\frac{x^5}{5} + \frac{4x^3}{3} + 4x \right]_0^3 - 12 \right) = \pi \left(\frac{243}{5} + 36 + 12 - 12 \right) = \frac{423\pi}{5},$$

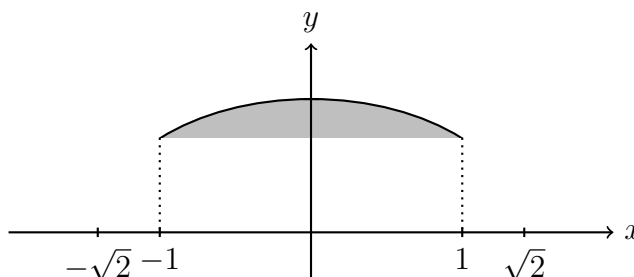
där vi helt enkelt dragit bort volymen av den ihåliga cylindern med radie 2 och höjd 3.



Exempel

Beräkna volymen av ett klot med radie $\sqrt{2}$ där vi skär ut en cylinder med radie 1 som har x -axeln som sin symmetriaxel.

Lösning. Vi tänker oss att klotet uppstår vid rotation av disken $x^2 + y^2 \leq 2$ kring x -axeln. Cylindern uppstår när vi roterar området mellan $y = 1$ och x -axeln kring x -axeln. Cylindern får oändlig volym så hur reder vi ut hur mycket som ligger i klotet? Ett sätt är skissa situationen.



Kurvan $x^2 + y^2 = 2$ skär linjen $y = 1$ precis då $x = \pm 1$. Vi ser då att skivformeln med en undre gräns $y = 1$ istället för $y = 0$ (x -axeln) ger att den eftersökta volymen blir

$$V = \pi \int_{-1}^1 (\sqrt{2 - x^2} - 1)^2 dx = \pi \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \frac{4\pi}{3}.$$



Rotation kring axlar parallella med x -axeln

Vi kan rotera kring en linje $y = c$ i stället för kring x -axeln om vi kräver att $f(x) \geq c$. Det enda som ändras är radien eftersom det nu är relativt $y = c$ och inte $y = 0$, så skivformeln får utseendet

$$\pi \int_a^b (f(x) - c)^2 dx.$$

Samma formel gäller om $f(x) \leq c$. Det viktiga är att vi ligger på ena sidan av rotationsaxeln.

14.3.2 Rotationsvolym via cylindrar

Om vi vill rotera kring y -axeln i stället är det ofta enklast att göra med "rörformeln." Vi betraktar samma område $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$ med tillägget att $a \geq 0$ (så hela området är på ena sidan av rotationsaxeln). Vid ett fixt $x \in [a, b]$ tänker vi oss en cylinder med höjden $f(x)$ och radien x . Detta ger mantelarean $M(x) = 2\pi x f(x)$. Vi multiplicerar med en liten tjocklek för att få ett volymselement $dV = M(x) dx = 2\pi x f(x) dx$. Vi summerar dessa volymelement och erhåller då den så kallade cylinderformeln:

$$V = \int_a^b dV = \int_a^b M(x) dx = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$



Cylinderformeln

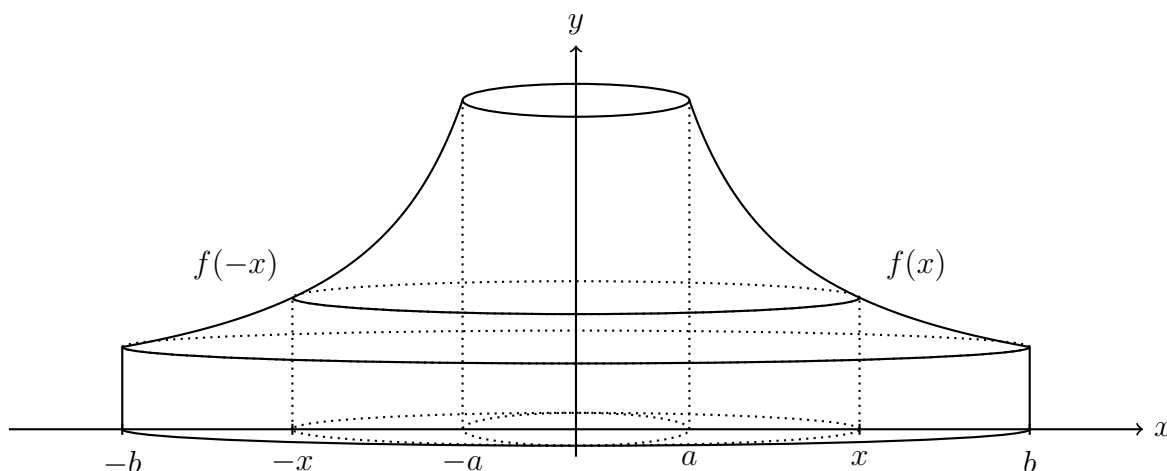
Sats. Låt $a \geq 0$ och $f(x) \geq 0$. Volymen V som uppstår då området

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$$

roteras ett varv kring y -axeln ges av

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

Vi försöker skissa situationen.



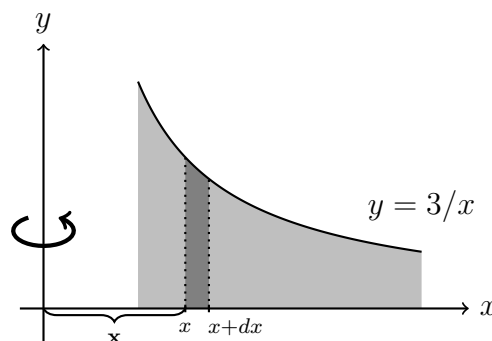
Exempel

Beräkna rotationsvolymen som uppstår då området som begränsas av kurvan $y = 3/x$, x -axeln och $1 \leq x \leq 4$, roteras ett varv kring y -axeln.

Lösning.

För givet $x \in [1, 4]$ är radien för vår cylinder x (avståndet till y -axeln) och höjden ges av $3/x$. Alltså är mantelarean $2\pi(3/x)x = 6\pi$ och vårt volymselement blir helt enkelt $6\pi dx$. Alternativt direkt via rörformeln:

$$2\pi \int_1^4 x \frac{3}{x} dx = 2\pi \int_1^4 3 dx = 18\pi.$$



Rotation kring axlar parallella med y -axeln

Det är inget magiskt med y -axeln, utan rotation kan ske kring vilken linje $x = c$ som helst utan större modifikation. Det enda som ändras är kravet att $a \geq 0$ byts ut mot att $a \geq c$ och att radien för våra cylindrar nu ges av $r = x - c$, eller att $b \leq c$ och $r = c - x$.



Exempel

Beräkna rotationsvolymen som uppstår då området som begränsas av kurvan $y = 3/x$, x -axeln och $1 \leq x \leq 4$, roteras ett varv kring (a) linjen $x = 1$ (b) linjen $x = 5$.

Lösning. Situationen är väldigt snarlik föregående exempel.

(a) För givet $x \in [1, 4]$ är radien för vår cylinder $x - 1$ (avståndet till rotationsaxeln) och höjden ges av $3/x$. Rörformeln ger nu att volymen ges av

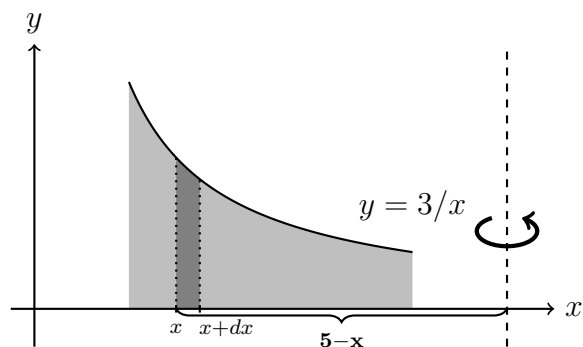
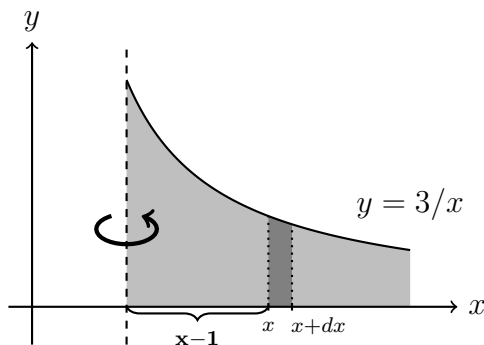
$$\begin{aligned} 2\pi \int_1^4 (x-1) \frac{3}{x} dx &= 2\pi \int_1^4 \left(3 - \frac{3}{x}\right) dx \\ &= 6\pi [x - \ln|x|]_1^4 \\ &= 6\pi (3 - 2\ln 2). \end{aligned}$$

Observera att denna volym är strikt mindre än volymen i förra exemplet. Precis som sig bör.

(b) Nu befinner vi oss på andra sidan rotationsaxeln, och "radien" för rotationen ges då istället av $r = 5 - x$. Sålunda,

$$V = 2\pi \int_1^4 (5-x) \frac{3}{x} dx = 2\pi (15 \ln 4 - 9).$$

Volymen är åtminstone större en noll (eftersom $\ln 4 > 1$) så inget direkt orimligt.



Kapitel 15

Rotationsarea och tyngdpunkter

15.1 Rotationsarea

När vi ska beräkna rotationsarea kommer vi att utföra liknande manövrar som vi gjorde för rotationsvolym, men vi kommer så klart att betrakta små areaelement i stället för små volymselement.

15.1.1 Rotationsarea kring x -axeln

Vi betraktar en funktion $f(x) \geq 0$ och låter kurvan

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = f(x), a \leq x \leq b\}$$

rotera ett varv kring x -axeln, där $a < b$. För varje värde $x \in [a, b]$ uppstår då en cirkel som har omkrets $2\pi f(x)$ eftersom radien för cirkeln ges av funktionsvärdet: $r = f(x)$ (avståndet till rotationsaxeln). Vi multiplicerar med bågelementet ds för att få en infinitesimal cylinder (höjden är alltså ds) vars mantelarea blir $dA = 2\pi f(x)ds$. Vi summerar dessa och erhåller då följande.



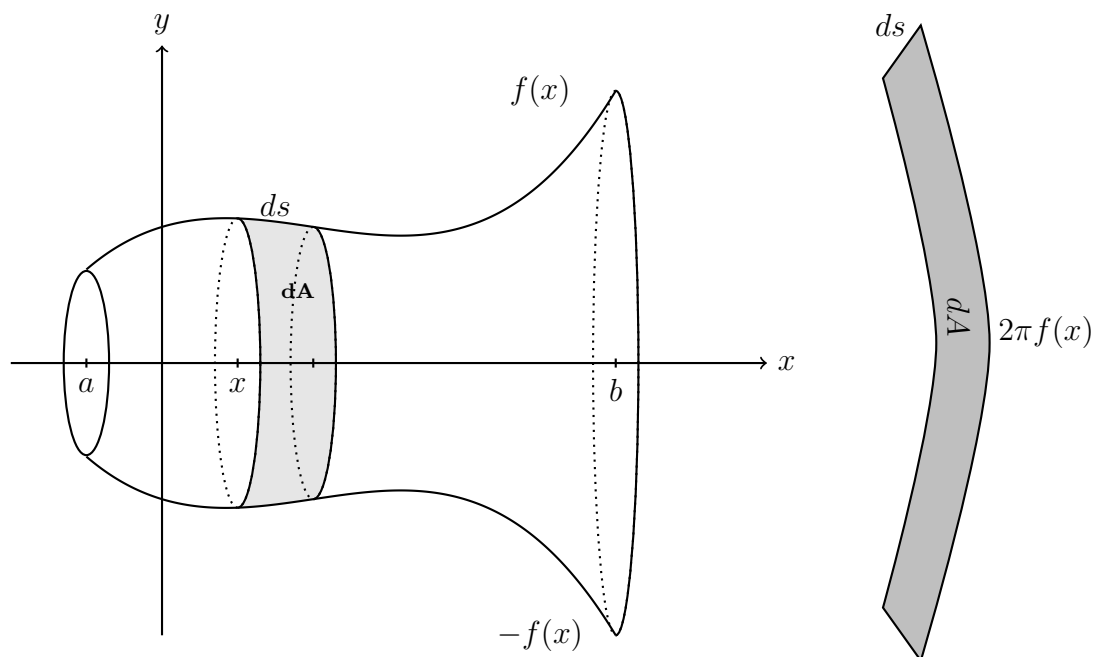
Sats. Om $f(x) \geq 0$ är kontinuerligt deriverbar och $a < b$ så ges arean A som uppstår då kurvan

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = f(x), a \leq x \leq b\}$$

roterar ett varv kring x -axeln av

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) ds = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Vi bevisar inte satsen utan nöjer oss med argumentet ovan. En principskiss visar också hur vi summerar mantelarean av dessa små cylindrar för att få hela rotationsarean.



I den högra figuren har vi "klippt upp" bandet som skapas när vi roterar ds kring x -axeln. Vi ser här att "kantlängderna" blir precis ds och $2\pi f(x)$, så det är rimligt att area-elementet ges av $dA = 2\pi f(x) \cdot ds$.



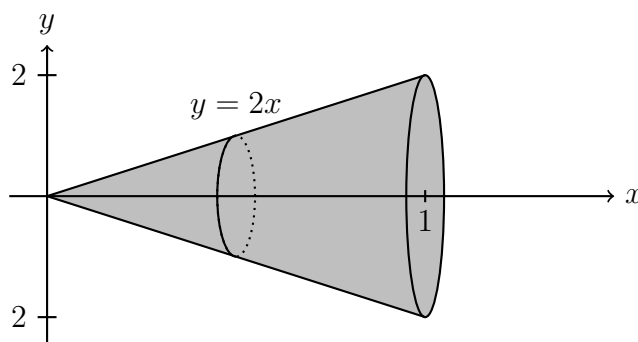
Exempel

Beräkna mantelarean av den kropp som uppstår då kurvan $y = 2x$, $0 \leq x \leq 1$, roteras ett varv kring x -axeln.

Lösning. Arealen kommer att ges av

$$2\pi \int_0^1 2x\sqrt{1+2^2}dx = 4\sqrt{5}\pi \int_0^1 x dx = 2\sqrt{5}\pi.$$

Precis som för rotationsvolymer bör man se till att detta uttryck åtminstone är positivt (varför?). Vidare är det objekt som uppstår en kon i detta fall (med basradien 2 och höjden 1) och vi räknar alltså ut mantelarean på denna!





Rotation kring axlar parallella med x -axeln

Vi kan rotera kring en linje $y = c$ i stället för kring x -axeln med samma teknik om vi bara kräver att endera $f(x) \geq c$ eller $f(x) \leq c$ (att vi befinner oss på ena sidan av rotationsaxeln med andra ord). Det som ändras är radien eftersom det nu är relativt $y = c$ och inte $y = 0$, så

$$A = 2\pi \int_a^b |f(x) - c| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

15.1.2 Rotationsarea för rotationer kring y -axeln

Om vi vill rotera kring y -axeln i stället använder vi oss av ett liknande argument som i "rörformeln" för rotationsvolymer. Vi betraktar samma kurva

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = f(x), a \leq x \leq b\}$$

med tillägget att $a \geq 0$ (så hela kurvan är på ena sidan av rotationsaxeln). Däremot måste inte $f(x) \geq 0$ längre. Vid ett fixt $x \in [a, b]$ tänker vi oss ett litet bågelement ds på höjden $f(x)$. Detta roteras kring y -axeln och det uppstår då en liten rotationsarea $dA = 2\pi x \cdot ds$ eftersom omkretsen för cirkeln är $2\pi x$ för radien x . Vi summerar dessa areaelement och erhåller följande formel.



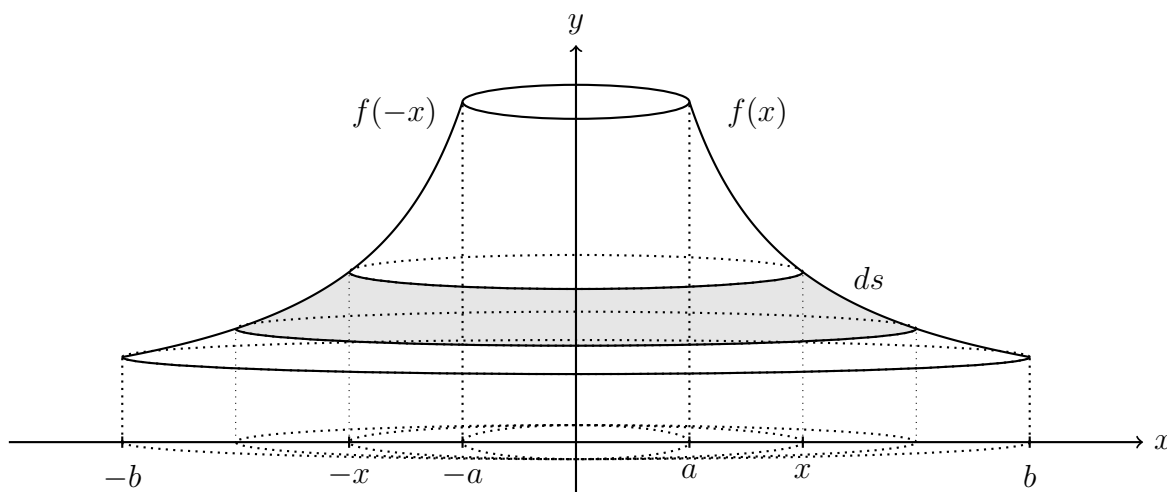
Sats. Låt $0 \leq a < b$. Arian A som uppstår då kurvan

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = f(x), a \leq x \leq b\}$$

roteras ett varv kring y -axeln ges av

$$A = 2\pi \int_a^b x ds = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Vi försöker skissa situationen.



Man kan göra samma sorts ”uppklippning” här som i fallet då vi roterade kring x -axeln, vilket motiverar formeln $dA = 2\pi x \cdot ds$ för areaelementet.



Exempel

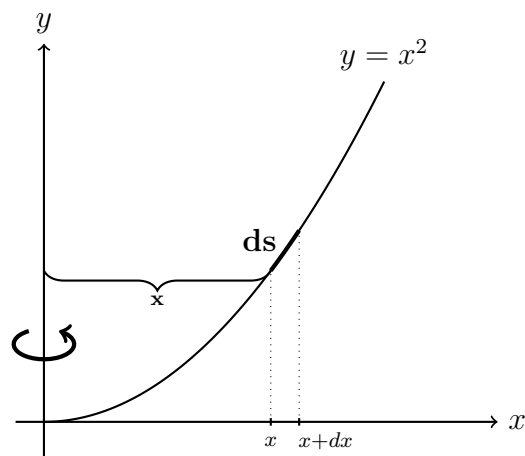
Beräkna rotationsarean som uppstår då kurvan $y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$ roteras ett varv kring y -axeln.

Lösning.

Eftersom $y' = 2x$ erhåller vi arean

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^2 x \sqrt{1 + (2x)^2} dx \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^2 8x \sqrt{1 + 4x^2} dx \\ &= \frac{\pi}{4} \left[\frac{2(1 + 4x^2)^{3/2}}{3} \right]_0^2 \\ &= \frac{(17^{3/2} - 1)\pi}{6} = \frac{(17\sqrt{17} - 1)\pi}{6}. \end{aligned}$$

Rimligt svar? Våldigt svårt att säga, men det är åtminstone positivt!



Rotation kring axlar parallella med y -axeln

Precis som för rotationsvolym är det inget magiskt med y -axeln, utan rotation kan ske kring vilken linje $x = c$ som helst. Det enda som ändras är kravet att $a \geq 0$ byts ut mot att $a \geq c$ eller $c \geq b$ och att radien nu ges av $r = |x - c|$.

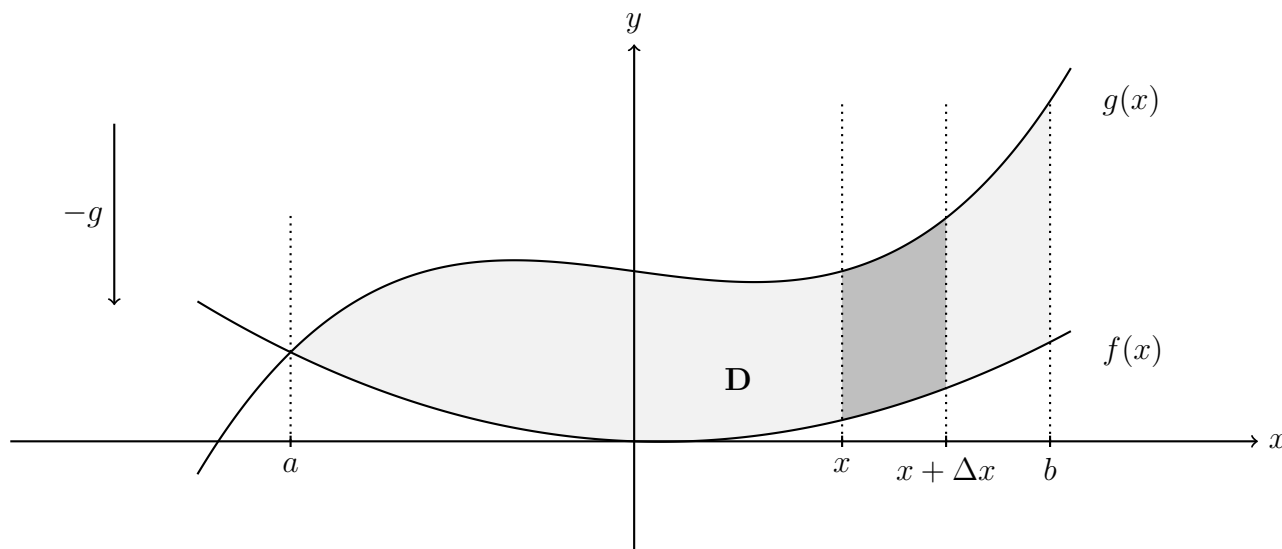
15.2 Tyngdpunkter

Låt oss fokusera på det plana fallet i 2 dimensioner. Generalisering till 3 dimensioner sker naturligt efter det med volym i stället för area (dA blir dV och så vidare). I det 2-dimensionella fallet inkluderar vi även fallet med kurvor och i det fallet behöver dA bytas ut mot bagelementet ds . Vi tänker oss också att densiteten är konstant lika med ett så att area (eller volym respektive kurvlängd) är det samma som massa.

Låt oss fokusera på situationen där ett område D beskrivs av

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x) \leq y \leq g(x), a \leq x \leq b\}$$

där vi antar att $f(x) \leq g(x)$. Vidare tänker vi oss att gravitationen verkar i negativa y -axelns riktning. Vi markerar ett litet område mellan x och $x + \Delta x$ i figuren nedan.



Detta område ger upphov till ett vridande moment kring origo som approximativt har storleken $x(g(x) - f(x))\Delta x$. Massan för motsvarande område ges av $(g(x) - f(x))\Delta x$ (densiteten är ett) och vi vet från fysiken att tyngdpunkt ges av totalt moment delat på total massa. Det förefaller alltså rimligt att definiera området D 's tyngdpunkt x_t med avseende på y -axeln genom

$$x_t = \frac{\int_a^b x(g(x) - f(x)) dx}{\int_a^b (g(x) - f(x)) dx} = \frac{\int_a^b x dA}{\int_a^b dA}$$

där dA är area-elementet $(f(x) - g(x)) dx$. Vidare kan vi även använda detta element för att definiera D 's tyngdpunkt y_t med avseende på x -axeln:

$$y_t = \frac{\int_a^b y dA}{\int_a^b dA}.$$

Ofta behöver man här arbeta lite med dA för att uttrycka detta i y i stället för x när vi söker y_t . För enkla geometriska objekt är det ganska enkelt att se vart tyngdpunkten ligger. I en cirkel är det i mitten och samma sak gäller en rektangel. Hur går det med en triangel?



Exempel

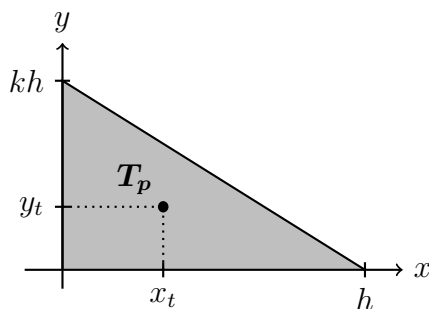
Finn tyngdpunkten T_p för en rätvinklig triangel.

Lösning. Betrakta en rätvinklig triangel där hypotenusan ges av $y = -kx + kh$, $0 \leq x \leq h$ och $k > 0$.

Tyngdpunkten x_t med avseende på y -axeln ges av

$$\frac{1}{A} \int_0^h x(-kx + kh) dx = \frac{kh^3}{6A},$$

där $A = \int_0^h (-kx + kh) dx = \frac{kh^2}{2}$, så $x_t = \frac{h}{3}$. På en tredjedel av höjden alltså.



Samma gäller så klart y_t (på en tredjedel av höjden i y -axelns riktning alltså) pga symmetriskäl. Men vi kan räkna ut det också om vi vill. Vi har

$$y_t = \frac{1}{A} \int_0^{kh} y \left(h - \frac{y}{k} \right) dy = \dots = \frac{kh}{3},$$

där vi skrivit om $dA = (h - y/k) dy$ med avseende på y .

15.3 Repetition



Exempel

Bestäm volymen som uppstår då det begränsade området mellan $y = 4x - x^2 + 1$ och $y = 1$ roterar ett varv kring $x = -2$.

Lösning. Kurvan $y = 4x - x^2 + 1$ skär $y = 1$ precis då

$$4x - x^2 + 1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x(4 - x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ eller } x = 4.$$

Det begränsade området ges därför av $1 \leq y \leq 4x - x^2 + 1$ och $0 \leq x \leq 4$.

Vi ställer upp rotationsvolymen med cylinderformeln. Det lilla area-elementet dA vid x har en tjocklek dx . Om denna area roteras kring $x = -2$ så uppstår en tunn cylinder som har tjockleken dx och höjden

$$4x - x^2 + 1 - 1 = 4x - x^2.$$

Denna cylinder har mantelarean

$$M(x) = 2\pi(x + 2)(4x - x^2)$$

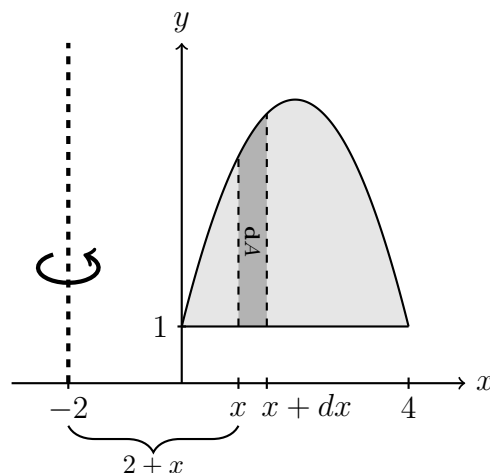
eftersom avståndet från dA till rotationsaxeln (vågrätt) är $x + 2$.

Volymselementet blir med andra ord

$$dV = M(x)dx = 2\pi(2 + x)(4x - x^2)dx$$

och därmed erhåller vi den eftersökta volymen genom att summera dessa volymselement:

$$V = \int_0^4 dV = 2\pi \left[4x^2 + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^4 = \frac{256\pi}{3}.$$



15.4 Sammanfattande exempel för rotationsvolymer

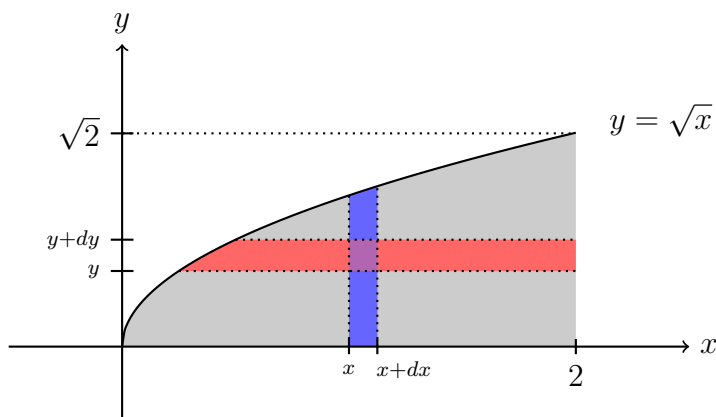
I föregående exempel har vi använt skivformeln för rotation kring axlar parallella med x -axeln och rörformeln för rotation parallell med y -axeln, men det är inget krav. Följande exempel belyser detta.



Exempel

Låt området D ges av det begränsade området mellan kurvan $y = \sqrt{x}$, x -axeln och linjen $x = 2$. Bestäm volymen V_x då D roterar ett varv kring x -axeln och volymen V_y då D roterar ett varv kring y -axeln.

Lösning. Vi börjar med att rita en figur (alltid en bra idé).



Vi ser att för kurvan gäller att $y = \sqrt{x}$ om och endast om $y^2 = x$ (både x och y är icke-negativa). Vi kan alltså uttrycka kurvan både som en funktion av x och som en funktion av y . På detta sätt kan alla rotationsvolymer ställas upp på två olika sätt: med avseende på x och med avseende på y . Vi ställer upp volymen som uppstår vid rotation kring x -axeln först:

$$V_x = \pi \int_0^2 (\sqrt{x})^2 dx = \frac{\pi}{2} [x^2]_0^2 = 2\pi$$

alternativt

$$V_x = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} y(2 - y^2) dy = 2\pi \left[y^2 - \frac{y^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi.$$

Angående den andra formeln kan vi säga att vi egentligen roterar en cylinder med basradie $\sqrt{2}$ och höjd 2 (längs x -axeln) och drar bort volymen som uppstår från kurvan $x = y^2$.

Om vi roterar kring y -axeln i stället erhåller vi via "rörformeln" att

$$V_y = 2\pi \int_0^2 x\sqrt{x} dx = 2\pi \left[\frac{2}{5} x^{5/2} \right]_0^2 = \frac{16\pi\sqrt{2}}{5}.$$

Alternativt kan vi använda skivformeln där vi återigen måste skära bort delar ur rotationen med hjälp av en cylinder:

$$V_y = \pi \int_0^{\sqrt{2}} (2^2 - (y^2)^2) dy = \pi \left(4\sqrt{2} - \frac{2^{5/2}}{5} \right) = \frac{16\pi\sqrt{2}}{5}.$$

Kapitel 16

Inför tentan...

16.1 Maclaurin- och Taylorutvecklingar

Lär er de s.k. standardutvecklingarna (för e^x , $\cos x$ etc) och även "formeln" som gäller för alla snälla funktioner kring godtycklig punkt $x = a$:

$$\begin{aligned} f(x) &= p_n(x) + r(x) \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + O((x-a)^{n+1}). \end{aligned}$$

Här är $p_n(x)$ Taylorpolynomet av ordning n (med grad $\leq n$) och resten $r(x)$ på ordo-form. Med $a = 0$ erhåller vi Maclaurinutvecklingen. Om Taylorutveckling kring $x = a$ sökes, försök introducera en variabel $t = x - a$ så att $t \approx 0$ då $x \approx a$. Skriv om $f(x)$ i variabeln t och utveckla m.a.p. t (använd gärna elementära Maclaurinutvecklingar här).

16.1.1 Tillämpningar med rest på ordo-form

- Se till att du behärskar ordo-kalkyl. Principfel i hanteringen av ordo-termer kan aldrig ge godkända uppgifter.
- Hitta utvecklingar genom ansatser, t ex genom att ansätta $\tan x = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + O(x^7)$ (tan är udda) och utnyttja utvecklingar för $\sin x$ och $\cos x$ samt att $\cos x \cdot \tan x = \sin x$ alternativt utvecklingen för $\arctan x$ samt att $\arctan(\tan x) = x$.
- Gränsvärden för kvoter: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$. Utveckla $f(x)$ och $g(x)$ och ange resten på ordo-form. Börja med nämnaren och utveckla sedan täljaren så du kommer "förbi" första termen i nämnaren.
- Gränsvärden mot någon oändlighet, ofta $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x))$. Bryt ut det som dominerar och hitta nya variabler som går mot noll då $x \rightarrow \infty$ (tex $t = 1/x$). Observera att det går bra att ha olika variabler i olika delar av uttrycken så länge man byter tillbaka till x innan gränsvärdet räknas ut.
- Anpassa mot polynom, speciellt för att hitta asymptoter eller annat beteende mot oändligheten. Till exempel hitta a och b så $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{1+x^2} - ax - b) = 0$. Bryt ut det som dominerar ur roten och Maclaurinutveckla i ny variabel!

- Avgöra om stationära punkter är maximum eller minimum. Utveckla funktionen och studera beteendet som dominerar. Vad händer när man flyttar sig lite från den stationära punkten? Tänk $\cos x = 1 - x^2/2 + O(x^4) = 1 - x^2(1/2 + O(x^2))$. Om man flyttar sig lite från $x = 0$ blir tillskottet negativt eftersom $1/2$ dominerar $O(x^2)$ i parentesen. En maxpunkt alltså!

16.1.2 Restterm på Lagranges form

Uppskatta fel i Maclaurinutvecklingar (eller Taylor) i andra punkter än bara väldigt nära en viss punkt (origo). Om $f \in C^{n+1}$ nära $x = a$ gäller att

$$\begin{aligned} f(x) &= p_n(x) + r(x) \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \end{aligned}$$

för något ξ mellan a och x . Notera att ξ beror på x (samt även a och n). Nytt x ger nytt ξ , så var försiktig med hanteringen och uppskatta helst bort allt ξ -beroende i uttrycket när något ska göras.

Vanliga exempel på användningsområden:

- Funktionsvärden i en viss punkt, ex. $\cos \frac{1}{4}$.
- Visa olikheter som exempelvis att $|\sin x - (x - x^3/3!)| \leq |x|^5/120$.
- Uppskatta numeriskt värde på integral där vi inte har någon känd primitiv funktion: utveckla integranden och uppskatta felet över hela integrationsområdet. Polynomet är enkelt att integrera och med tillräckligt många termer är felet litet!

16.2 Generaliserade integraler

- Om $0 \leq f(x) \leq g(x)$ gäller att

$$\int_a^b g(x) dx < \infty \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x) dx < \infty$$

och

$$\int_a^b f(x) dx = \infty \quad \Rightarrow \quad \int_a^b g(x) dx = \infty.$$

- Om $f, g \geq 0$, alla integraler endast är generaliserade i $x = b$ och $0 < \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$ gäller att

$$\int_a^b f(x) dx < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^b g(x) dx < \infty.$$

Vid användning: bryt ut det som dominerar i $f(x)$ nära $x = b$ och räkna ut gränsvärdet för "det som blir över:"

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) \cdot \frac{f(x)}{g(x)} dx.$$

Motsvarande sats gäller om generaliseringen är i punkten $x = a$ (men bara en i taget!).

- Finns eller uppstår problem i flera punkter: dela upp integralen! För konvergens måste *alla* delar vara konvergenta. Om någon är divergent är hela integralen divergent. Se upp så din jämförelseintegral (dvs integralen av $g(x)$) inte blir generaliserad i fler punkter! Dela upp området om så behövs.
- Kända jämförelsefunktioner:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < 1$$

och

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1.$$

- Absolutkonvergens. En absolutkonvergent integral är alltid konvergent. Kan även användas innan jämförelsesats tillämpas för att se till att integranden är ickenegativ. Observera att det finns villkorligt konvergenta integraler som inte är absolutkonvergenta.

16.3 Serier

Teorin är i många avseenden parallell med den för generaliserade integraler, men vi har bara problem i oändligheten och det finns vissa andra skillnader. Till exempel finns inget divergenstest för integraler (integranden behöver inte punktvis gå mot noll för konvergens).

Kortfattat. En **serie** $s = \sum_{k=m}^{\infty} a_k$ konvergerar om **delsummorna** $s_n = \sum_{k=m}^n a_k$ konvergerar till s då $n \rightarrow \infty$, dvs

$$s = \sum_{k=m}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n a_k$$

om gränsvärdet existerar. Serien består av summan av **termerna** a_k , $k = m, m+1, \dots$. Att säga att termerna konvergerar, dvs att $a_k \rightarrow a$ för något a då $k \rightarrow \infty$, är alltså något helt annat än att säga att serien konvergerar, dvs att delsummorna $s_n \rightarrow s$. Divergenstestet säger att $a = 0$ är nödvändigt för att $s_n \rightarrow s$ (men *inte* tillräckligt). Var *mycket* tydlig med vad det syftas på när något säges konvergera (eller divergera).

- Förstå hur konvergens för en serie definieras via delsummor.
- Divergenstestet, i.e., om termerna a_k *inte* går mot noll är serien divergent.
- Skillnad på absolutkonvergens och konvergens.
- Jämförelsesatserna för $0 \leq a_k \leq b_k$ respektive att $0 \leq a_k/b_k \rightarrow L$ med $0 < L < \infty$. Om $0 \leq a_k \leq b_k$ gäller att

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$$

och

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \infty.$$

samt om $0 < \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} < \infty$ gäller att

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty.$$

Grundprincip för gränsvärdestestet: bryt ut det som dominerar mot oändligheten och betrakta vad som blir kvar. Är gränsvärdet strikt mellan 0 och ∞ är det den dominerande faktorn som avgör konvergens eller divergens (om positiva uttryck erhålls).

- Geometrisk serie: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ om $|q| < 1$. Då $|q| \geq 1$ är serien divergent.

- Kända jämförelseserier:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1.$$

- Cauchys jämförelseprincip: om $f(x) \geq 0$ och $f(x)$ är avtagande för $x \geq 1$ är

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{\infty} f(x) dx < \infty.$$

Se till att förstå hur uppskattningarna går till via över- och undertrappor för funktionen f .

Detta ger också möjlighet till uppskattning av hur stor "svansen" $\sum_{k=n+1}^{\infty} f(k)$ är (och även för hela serien så klart).

- Leibniz-serier $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ där a_{k+1} och a_k har olika tecken för alla k (alternerande) och

$$|a_1| \geq |a_2| \geq |a_3| \geq \dots$$

samt $a_k \rightarrow 0$ (avtar mot noll). Alltså **TRE** krav (och dessa måste preciseras på tentan). Dessa serier konvergerar alltid! För feluppskattning gäller för Leibniz-serier att

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| \leq |a_{n+1}|.$$

Detta är **inte** sant för godtyckliga konvergenta serier!

16.4 Potensserier

- Kvot- och rottestet. En serie $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ är absolutkonvergent om

$$Q = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|} < 1$$

eller om

$$Q = \lim_{k \rightarrow \infty} |c_k|^{1/k} < 1.$$

Om $Q > 1$ är serien divergent. Om $Q = 1$ vet vi inget och inte heller om inget av gränsvärdena existerar. Dessa test kan även användas för "vanliga" numeriska serier.

- Ta fram konvergensradie för potensserie från kvot- eller rottestet. Testet ger en olikhet av formen $Q < 1$ där Q innehåller $|x|$. Lös ut $|x|$ för att hitta R så att $|x| < R$. Se upp om potensserien till exempel bara innehåller jämna potenser (x^{2k}) eller dylikt.
- Avgöra konvergens när $|x| = R$ (två fall, $x = \pm R$, sätt in i serien och undersök som numerisk serie!).
- Termvis derivering och integrering (ok för $|x| < R$, konvergensradien för den ursprungliga serien).
- Utnyttja derivering eller integrering för att räkna ut numeriska serier som exempelvis $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k}$. Kom ihåg att $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ om $|x| < 1$.

16.5 Differentialekvationer

16.5.1 Linjära ekvationer av ordning ett

Skriv om på formen

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x)$$

med konstant faktor 1 framför y' . Integrerande faktor: $e^{F(x)}$ där $F'(x) = f(x)$. Multiplicera med denna och VL blir $(e^{F(x)}y(x))'$ och HL blir $g(x)e^{F(x)}$. Integrera och lös ut y .

16.5.2 Separabla ekvationer

Kom ihåg att här ingår definitionsområdet för lösningen i svaret! Detta är det största sammanhängande intervall där funktionen är C^1 . Tekniken är separation av variabler:

$$g(y)\frac{dy}{dx} = h(x) \quad \Leftrightarrow \quad \int g(y) dy = \int h(x) dx.$$

Se upp vid divisioner! Kan dyka upp lösningar eller ge problem i definitionsområden (y respektive x).

16.5.3 Linjära DE av ordning två och högre med konstanta koefficienter

Två delar: homogen- och partikulärlösning. Den homogena hittas genom att hitta nollställen till det karakteristiska polynomet $p(r)$. En partikulärlösning hittas genom att ansätta något lämpligt. Kom ihåg förskjutningsregeln:

$$p(D)e^{ax}z(x) = e^{ax}p(D+a)z(x).$$

Denna förenklar mycket! Kan användas oavsett hur högerledet ser ut så länge det är en faktor e^{ax} med.

Superposition

Kom ihåg att man kan dela upp partikulärlösning i flera delar. Om HL består av, e.g., $e^x + 7$ kan vi hitta en partikulärlösning y_{p1} som matchar e^x och en annan y_{p2} som matchar 7. Den totala fås som $y_p = y_{p1} + y_{p2}$.

Tabell 16.1: Ansatser för partikulärlösningar.

Högerled	Ansats	Undantag ¹
$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$	$b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$ $x(b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0)$ $x^2(b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0)$ $\dots$	$r = 0$ rot $r = 0$ dubbelrot $r = 0$ trippelrot $\dots$
$A_1 \sin kx + A_2 \cos kx$	$B_1 \sin kx + B_2 \cos kx$ $x(B_1 \sin kx + B_2 \cos kx)$ $x^2(B_1 \sin kx + B_2 \cos kx)$ $\dots$	$r = \pm ik$ rot $r = \pm ik$ dubbelrot $r = \pm ik$ trippelrot $\dots$
$e^{ax}, a \in \mathbf{C}$	Be^{ax} Bxe^{ax} $Bx^2 e^{ax}$ $\dots$	$r = a$ rot $r = a$ dubbelrot $r = a$ trippelrot $\dots$
$q(x)e^{ax}$	$z(x)e^{ax}$	inga undantag ²
$A_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + A_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$	$B_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + B_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$ $B_1 x e^{\alpha x} \cos \beta x + B_2 x e^{\alpha x} \sin \beta x$ $\dots$	$r = \alpha \pm i\beta$ rot $r = \alpha \pm i\beta$ dubbelrot $\dots$

¹ Om undantagsfallet inträffar försöker vi med ansatsen på nästa rad.² Ger ekvation för z . Nytt högerled där e^{ax} försvunnit. Hitta *en* lösning till denna ekvation!

16.5.4 Ekvationer av Eulertyp

Ekvationer av typen $a_n x^n y^{(n)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = g(x)$, $x > 0$, löses genom variabelbytet $t = \ln x$ och introduktionen av $z(t) = y(e^t)$. Kom ihåg kedjeregeln! Leder till linjär ekvation med konstanta koefficienter.

16.5.5 Integralekvationer

I denna kurs är tanken att derivera fram en diffekv. och lösa den i stället. Begynnelsevillkor fås genom att välja någon smart punkt $x = a$ i integralekvationen så integralen försvinner (om möjligt). Kom ihåg integralkalkylens fundamentalsats som medför att

$$\frac{d}{dx} \int_{f(x)}^{g(x)} y(t) dx = y(f(x))f'(x) - y(g(x))g'(x)$$

om $f, g \in C^1$.

16.5.6 Analytiska lösningar (potensserier)

Lösa differentialekvationer genom potensserieansats. Lite bökigt men principen är enkel. Se till att förstå hur serien kan summeras om (omindexeras) så det blir enklare att matcha koefficienter. Kom ihåg också att termer "försvinner" vid derivering av potensserie.

16.6 Längd, area och volym

- Plan area (till exempel mellan kurvor). Även på polär form!
- Kurvlängd för funktioner på formen $y = f(x)$ och parameterform $x = x(t)$ och $y = y(t)$. Kom ihåg bågelementet $ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$.
- Rotationsarea och rotationsvolym för rotationer kring linjer $x = a$ och $y = b$. Kom ihåg skiv- och rörformler. Viktigaste steget är att få upp korrekta integraler i denna kurs.

Se till att ni kan rita ”principskisser” för de olika situationerna (och att dessa hänger ihop med formlerna). En principskiss innebär inte att funktionen måste se ut precis som i uppgiften utan behöver bara motivera formeln som används.

Bilaga A

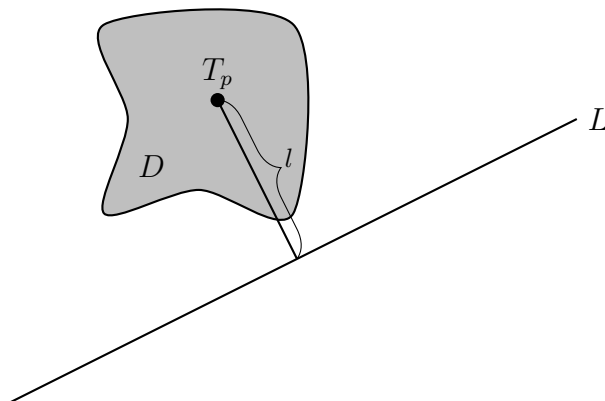
Guldins regler

A.1 Pappos-Guldins regler

Vi ska nu ställa upp kraftfulla regler för både rotationsvolym och rotationsareor där vi utnyttjar tyngdpunkter. Problemet flyttas nu till att bestämma tyngdpunkten i stället för böjiga rotationsuppställningar. Därmed har vi inte sagt att det alltid är enklare att räkna ut tyngdpunkten, men vissa fall förenklas avsevärt med de tekniker vi nu går genom (speciellt kommer vi åt fallen med lutande rotationsaxlar).

A.1.1 Rotationsvolym

Vi låter D vara ett plant område som ligger helt på ena sidan av en linje L . Beteckna det vinkelräta avståndet mellan tyngdpunkten T_p och linjen L med l . Detta är alltså det kortaste avståndet mellan T_p och linjen L .



Om D roteras ett varv kring linjen L uppstår en rotationsvolym. Denna volym kan då beräknas med hjälp av Pappos-Guldins regel som säger att volymen som uppstår ges av arean för D gånger tyngdpunktens väg vid rotationen:

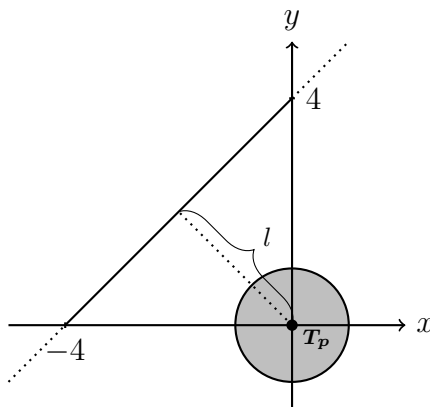
$$V = A(D) \cdot 2\pi l.$$



Exempel

Låt disken $x^2 + y^2 \leq 1$ rotera ett varv kring linjen $y = 4 + x$. Bestäm rotationsvolymen som uppstår.

Lösning. Diskens tyngdpunkt ligger i centrum som i detta fall är origo. Det kortaste avståndet från origo till tyngdpunkten blir $\sqrt{8}$ (betrakta triangeln med hörn i $(-4, 0)$, $(0, 4)$ och $(0, 0)$) samt cirkeln).

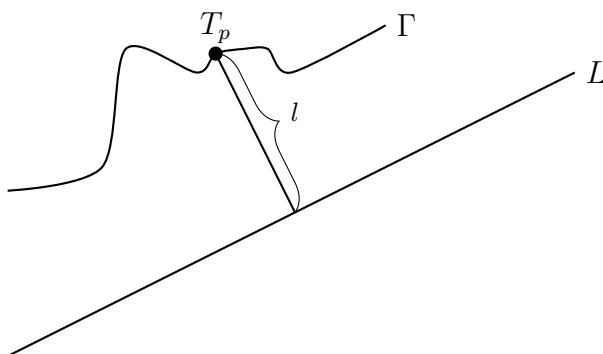


Tyngdpunktens väg blir alltså $2\pi\sqrt{8} = 4\pi\sqrt{2}$. Pappos-Guldin ger nu att den eftersökta volymen blir

$$V = \pi \cdot 4\pi\sqrt{2} = 4\pi^2\sqrt{2}.$$

A.1.2 Rotationsarea

Vi låter Γ vara en plan kurva som ligger helt på ena sidan av en linje L . Beteckna det vinkelräta avståndet mellan tyngdpunkten T_p för den plana kurvan och linjen L med l . Precis som tidigare är detta det kortaste avståndet mellan T_p och linjen L .



Om Γ roteras ett varv kring linjen L uppstår en rotationsarea. Denna area kan beräknas med hjälp av Pappos-Guldins regel som säger att arean som uppstår ges av kurvlängden s för Γ gånger tyngdpunktens väg vid rotationen:

$$A = s \cdot 2\pi l.$$

Observera att tyngdpunkten i allmänhet inte hamnar på tråden (den behöver inte hamna inne i området i det två-dimensionella fallet heller).

A.1.3 Pappos-Guldin lokalt och baklänges

Pappos-Guldins regler kan även med fördel användas lokalt. Med detta menar vi att de små area- och volymelement vi tidigare betraktat vid rotation kan användas tillsammans med de typer av summationsargument vi ägnat oss åt. Speciellt är detta lämpligt när man roterar kring lutande axlar, vilket vi återkommer till. Vi illustrerar med ett exempel (en gammal tentauppgift).



Exempel

Bestäm volymen som uppstår då det begränsade området mellan $y = 4x - x^2 + 1$ och $y = 1$ roterar ett varv kring $x = -2$.

Lösning. Kurvan $y = 4x - x^2 + 1$ skär $y = 1$ precis då

$$4x - x^2 + 1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x(4 - x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ eller } x = 4.$$

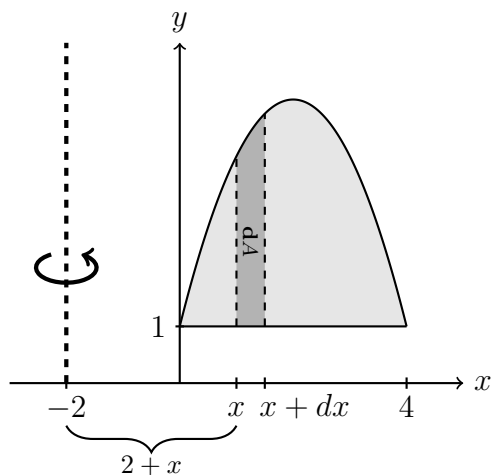
Det begränsade området ges därför av $1 \leq y \leq 4x - x^2 + 1$ och $0 \leq x \leq 4$.

För ett litet area-element dA vid x med tjocklek dx så ligger tyngdpunkten approximativt $2+x$ från rotationsaxeln vågrätt. Tyngdpunktens väg för dA blir således $2\pi(2+x)$. Vidare ges dA av en rektangel med höjden $4x - x^2 + 1 - 1$ och bredden dx , så $dA = (4x - x^2)dx$. Enligt Pappos-Guldins formel ges nu det lilla volymselementet dV av

$$dV = 2\pi(2+x)dA = 2\pi(2+x)(4x - x^2)dx$$

och därmed erhåller vi den eftersökta volymen genom att summera dessa volymselement:

$$V = \int_0^4 dV = 2\pi \left[4x^2 + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^4 = \frac{256\pi}{3}.$$



Självklart kan integralen även ställas upp direkt med hjälp av "cylinderformeln."

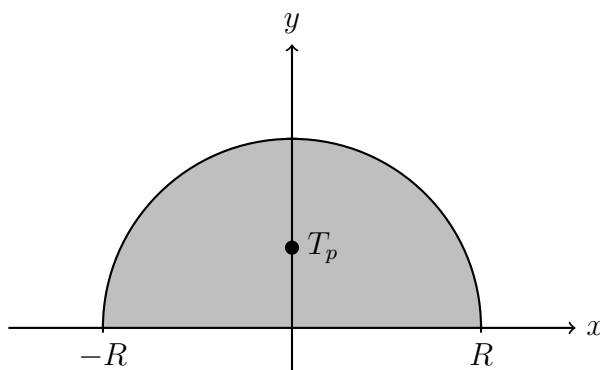
Faktum är att vi kan använda Pappos-Guldins regler "baklänges" för att hitta tyngdpunkten för en kurva eller ett område i planet. Vi illustrerar med ett exempel.



Pappos-Guldin för att hitta T_p

Hitta tyngdpunkten för en halvdisk $x^2 + y^2 \leq R^2$, $y \geq 0$.

Lösning. Tyngdpunkten med avseende på y -axeln ligger så klart i $x_t = 0$. Hur hittar vi tyngdpunkten y_t med avseende på x -axeln? Vi skissar lösningen och grafiskt borde y_t ligga lite lägre än mittpunkten på y -axeln.



Vi ser att arean av det plana området ges av $A = \frac{\pi R^2}{2}$ samt att om detta område roteras kring x -axeln uppstår en rotationsvolym $V = \frac{4\pi R^3}{3}$ eftersom detta är ett klot. Tyngdpunktens väg under rotationen är helt enkelt $2\pi y_t$. Pappos-Guldins regel implicerar nu att

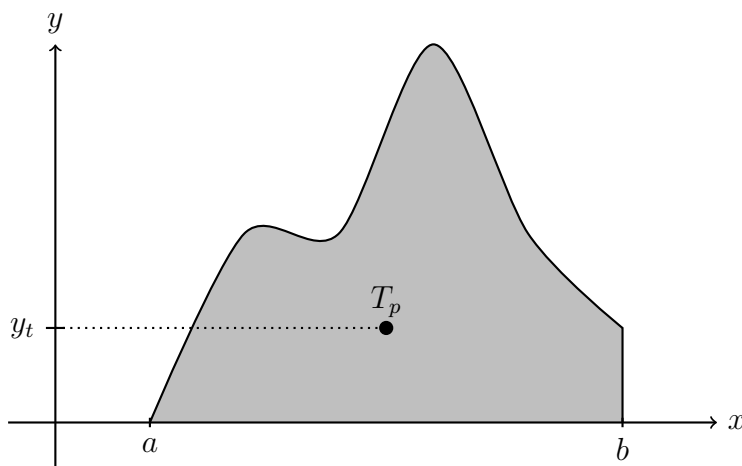
$$\frac{\pi R^2}{2} \cdot 2\pi y_t = \frac{4\pi R^3}{3} \quad \Leftrightarrow \quad y_t = \frac{4R}{3\pi}.$$

A.1.4 Tyngdpunkt för område definierat av en funktionsgraf

Exemplet ovan är ett specialfall av en mer generell situation då ett område ges som arean mellan en funktionskurva $y = f(x)$, x -axeln, $x = a$ och $x = b$ (förutsatt att $f \geq 0$). Man kan då visa att tyngdpunkten y_t ges av

$$y_t = \frac{\int_a^b f(x)^2 dx}{2 \int_a^b f(x) dx}.$$

Detta följer från Pappos-Guldin. En principfigur kan se ut enligt nedan.



Arean ges då av $A = \int_a^b f(x) dx$ och om vi roterar området ett varv kring x -axeln uppstår en rotationsvolym som av skivformeln beräknas till $V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$. Enligt Pappos-Guldins regler följer nu att $A \cdot 2\pi y_t = V$ ur vilket sambandet ovan kan lösas ut.

Vad skulle hända med motsvarande kalkyl för tyngdpunkten x_t och rotation kring y -axeln? Använda cylinderformeln och se vad som trillar ut. Bekant?

A.1.5 Lutande rotationsaxel

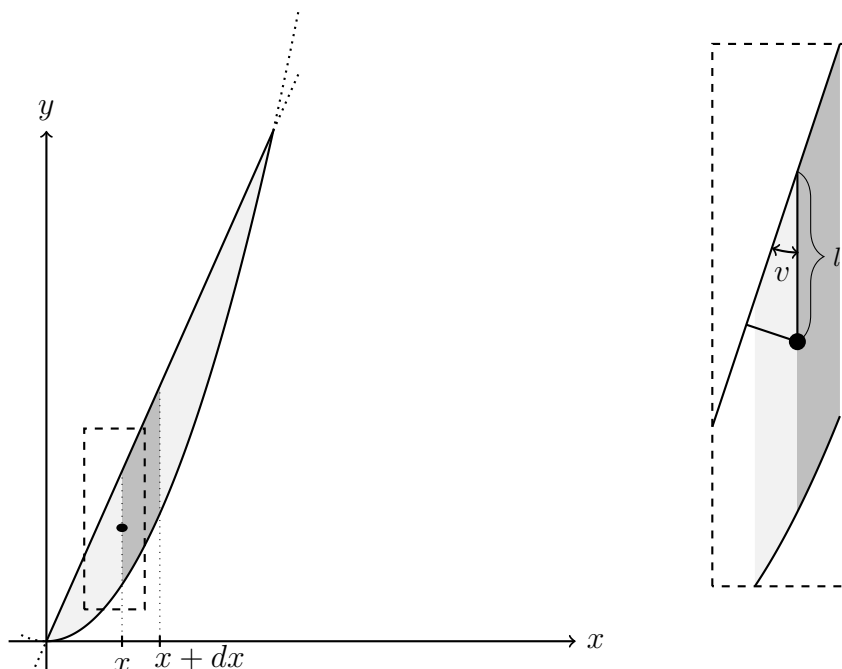
Med hjälp av Guldins regler kan vi även med ganska enkla metoder hantera situationer som att rotationen sker runt en lutande rotationsaxel.



Lutande rotationsaxel

Räkna ut rotationsvolymen som uppstår när det begränsade området mellan kurvorna $y = 3x$ och $y = x^2$ roterar ett varv kring $y = 3x$.

Lösning. Rotationsaxeln är inte parallell med vare sig y - eller x -axeln, men vi kan komma åt problemet med hjälp av Pappos-Guldin. Kurvorna skär varandra i $x = 0$ och $x = 3$ så det är området $x^2 \leq y \leq 3x$, $0 \leq x \leq 3$, som ska rotera kring $y = 3x$. Vi skissar problemet.



Tyngdpunkten för det mörkare skuggade areaelementet ligger approximativt i $x_t = x$ och y_t som mitt mellan $y = 3x$ och $y = x^2$. Låt l vara halva lodräta avståndet mellan $y = 3x$ och $y = x^2$, dvs $l = \frac{3x - x^2}{2}$. Detta är alltså det lodräta avståndet mellan $y = 3x$ och tyngdpunkten. Vi söker dock det vinkelräta avståndet för att kunna använda Pappos-Guldins formler (det är detta avstånd som ger sträckan tyngdpunkten förflyttar sig vid rotation). Lite geometri visar att vinkeln v kan uttryckas som $v = \arctan \frac{1}{k}$ om lutningen för linjen är $k > 0$. Därmed blir det vinkelräta avståndet $l \sin v = \frac{l}{\sqrt{1 + k^2}}$. Pappos-Guldins formel medför nu att rotationselementet dV kan ställas upp enligt

$$dV = 2\pi l \cdot dA = 2\pi l \cdot (3x - x^2)dx = \frac{\pi(3x - x^2)^2 dx}{\sqrt{1 + k^2}} = \frac{\pi(3x - x^2)^2 dx}{\sqrt{10}}$$

eftersom $k = 3$ i vårt fall. Vi summerar våra dV och erhåller då volymen av rotationskroppen:

$$V = \int_0^3 dV = \frac{\pi}{\sqrt{10}} \int_0^3 (9x^2 - 6x^3 + x^4) dx = \frac{81\pi}{10\sqrt{10}} = \frac{81\pi\sqrt{10}}{100}.$$

A.2 Rotationsvolym och rotationsarea i polära koordinater

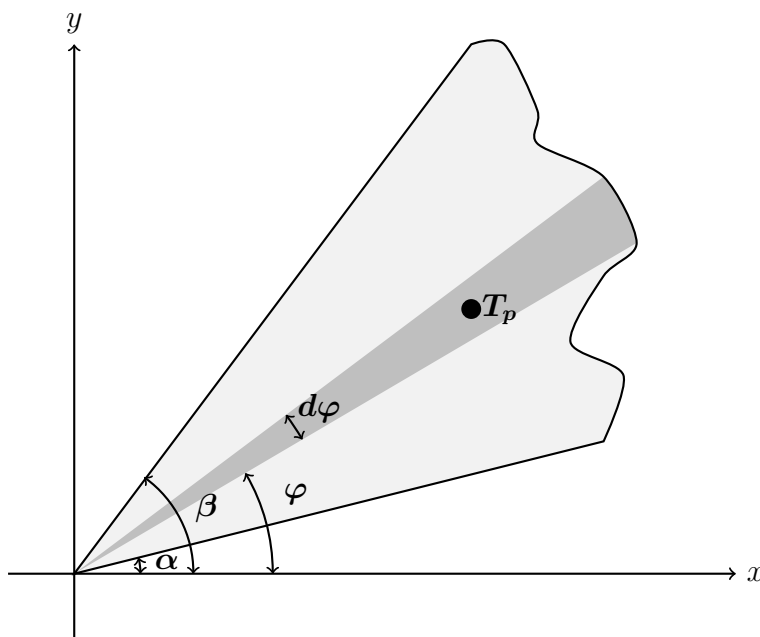
Låt $x = r \cos \varphi$ och $y = r \sin \varphi$ som vanligt när vi använder polära koordinater.

A.2.1 Rotationsvolym

Betrakta ett område

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq r \leq h(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta\}$$

där $h(\varphi)$ är någon kontinuerlig funktion. Vi skissar hur situationen ser ut. Det mörkare området är en mindre del för en liten vinkel $d\varphi$ vid någon vinkel φ .



Arean för detta area-element ges approximativt av $\pi h(\varphi)^2 \frac{d\varphi}{2\pi} = \frac{h(\varphi)^2}{2} d\varphi$, och eftersom vi kan betrakta det lilla området som en triangel finns tyngdpunkten T_p på $2/3$ av sträckan från origo. Alltså blir det vinkelräta avståndet från x -axeln till T_p approximativt $\frac{2}{3} h(\varphi) \sin \varphi$ och den väg tyngdpunkten förflyttar sig blir således $\frac{4\pi}{3} h(\varphi) \sin \varphi$. Volymselementet dV som uppstår ges alltså av Pappos-Guldins formel enligt $dV = \frac{4\pi}{3} h(\varphi) \sin \varphi \cdot \frac{h(\varphi)^2}{2} d\varphi$ och vi kan summera för att erhålla följande uttryck.



Rotationsvolym på polär form

Sats. Om området D roteras ett varv kring x -axeln ges rotationsvolymen av

$$V(D) = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} h(\varphi)^3 \sin \varphi d\varphi.$$

Det är inte direkt meningen att ni ska memorera formlerna här utan mer kunna upprepa principen. Låt oss betrakta ett exempel.



Exempel

Området $0 \leq r \leq \cos t$, $0 \leq t \leq \pi/2$, roteras ett varv kring linjen $x = -1$. Bestäm volymen för kroppen som uppstår.

Lösning. Sträckan från tyngdpunkten för ett litet vinkelområde vid vinkel t till y -axeln ges som $\frac{2}{3}h(t)\cos t = \frac{2\cos^2 t}{3}$ och således blir sträckan som tyngdpunkten förflyttar sig vid rotation

$$2\pi \left(\frac{2}{3} \cos^2 t + 1 \right)$$

Vi kan nu ställa upp ett volymselement enligt Pappos-Guldins formel:

$$dV = 2\pi \left(\frac{2}{3} \cos^2 t + 1 \right) \cdot \frac{\cos^2 t}{2} dt.$$

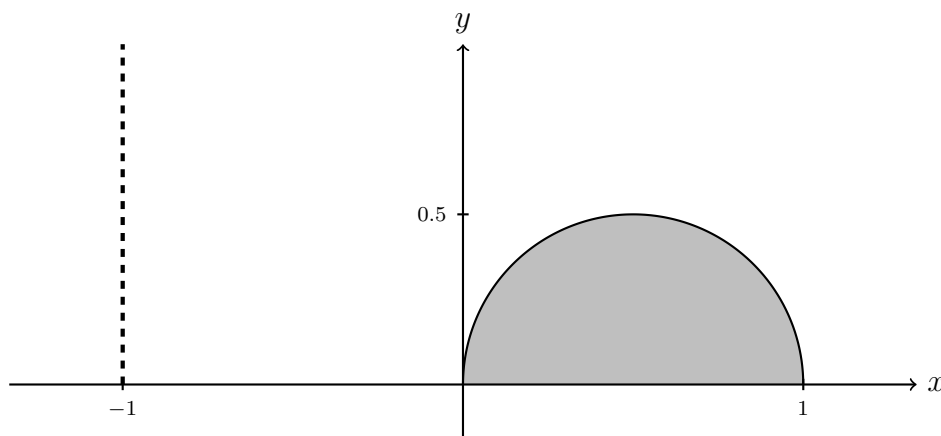
Här har vi utnyttjat att ett litet areaelement i polära koordinater kan skrivas $dA = \frac{h(t)^2}{2} dt$. Eftersom

$$\left(\frac{2}{3} \cos^2 t + 1 \right) \cdot \frac{\cos^2 t}{2} = \left(\frac{1}{3} (1 + \cos 2t) + 1 \right) \cdot \frac{1 + \cos 2t}{4} = \frac{3}{8} + \frac{5}{12} \cos 2t + \frac{1}{24} \cos 4t$$

följer det att

$$\int_0^{\pi/2} dV = 2\pi \int_0^{\pi/2} \left(\frac{3}{8} + \frac{5}{12} \cos 2t + \frac{1}{24} \cos 4t \right) dt = \frac{3\pi^2}{8}.$$

Låt oss även rita situationen.



En liten anmärkning. Området ser cirkulärt ut eller hur? Om $h(t) = \cos t$, $x = h(t)\cos t$ samt $y = h(t)\sin t$, ser vi att

$$x^2 + y^2 = \cos^4 t + \cos^2 t \sin^2 t = \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t) = \cos^2 t = x,$$

så

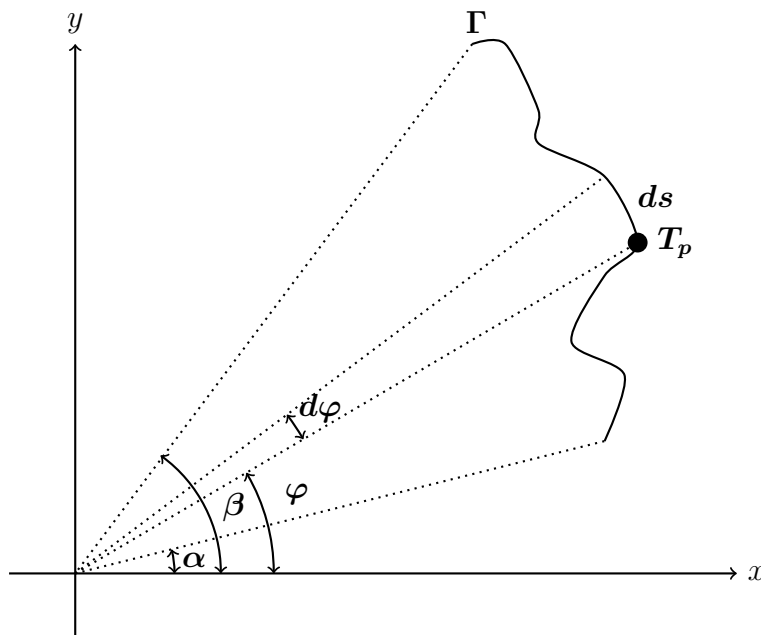
$$x^2 + y^2 = x \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}.$$

Alltså en cirkel med radie $1/2$ och centrum i $(1/2, 0)$. Då vet vi att arean av området är $\pi/8$ (halva disken) och att tyngdpunkten ligger vid $x_t = 1/2$. Alltså kan vi använda Pappos-Guldin på hela området direkt:

$$V = 2\pi \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi^2}{8}.$$

A.2.2 Rotationsarea

En kurva Γ ges av $r = h(\varphi)$ där $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ och $h(\varphi)$ är någon kontinuerligt deriverbar funktion roteras kring x -axeln. Det uppstår en rotationsarea och vi försöker skissa vad som händer.



Det lilla bågsegmentet ds ges som bekant av $ds = \sqrt{h(\varphi)^2 + h'(\varphi)^2} d\varphi$ och eftersom tyngdpunkten approximativt ligger vid $r = h(\varphi)$, så erhåller vi att tyngdpunktens väg vid rotation kring x -axeln blir $2\pi h(\varphi) \sin \varphi$ (jämför med rotationsvolymsfallet ovan). Arean som uppstår ges alltså av Pappos-Guldins formel:



Rotationsarea på polär form

Sats. Om kurvan Γ roteras ett varv kring x -axeln uppstår rotationsarean

$$A(D) = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} h(\varphi) \sin \varphi \sqrt{h(\varphi)^2 + h'(\varphi)^2} d\varphi.$$



Exempel

Visa att arean för ett klot med radie R ges av den bekanta formeln $A = 4\pi R^2$.

Lösning. Vi kan tänka oss kurvan som ges av $h(\varphi) = R$ för $0 \leq \varphi \leq \pi$ och låta den rotera ett varv kring x -axeln. Rotationsarean som uppstår ges då enligt ovan av

$$2\pi \int_0^{\pi} R \sin \varphi \sqrt{R^2 + 0^2} d\varphi = 2\pi R |R| \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi = 4\pi R^2,$$

eftersom $|R| = R$ då $R > 0$.

Sakregister

- Airy-funktioner, 111
- analytisk funktion, 110
- area
 - plan area, 133
 - polära koordinater, 134
- asymptot, 22
- Bessel-funktioner, 114
- bågelement, 130
- C^n , 7
- differentialekvation, 39
 - allmän lösning, 55
 - ansatser, 67
 - homogen, 52
 - komplex hjälpekvation, 74
 - komplexa koefficienter, 46
 - konstanta koefficienter, 51
 - kontroll, 66
 - linjär, 51
 - linjär, ordning 1, 40
 - lösningsskara, 42
 - partikulärlösning, 49
 - exponentialfunktioner, 58
 - modifierad ansats, 63
 - polynom, 57
 - sinus och cosinus, 59
 - potensserie, 107
 - separabel, 42
 - superpositionsprincipen, 60
 - villkor, 55
- differentialoperator, 50
- Eulerekvation, 65
- extrempunkt, 23
- förskjutningsregeln, 61
- generaliserad integral, 77
 - absolutkonvergens, 79
 - divergent, 78
 - jämförelse på gränsvärdesform, 84
 - jämförelsesats I, 81
 - konvergent, 78
 - linjäritet, 78
 - x^α , 82
- integralekvation, 47
- konvergensradie, 100
 - från rekursionsformel, 113
- kurva
 - längd, 129
 - parameterform, 129
 - polära koordinater, 131
- Lagranges restterm, 25
- Leibniz sats, 95
- lutande rotationsaxel, 161
- Maclaurinpolynom, 8
 - ordning, 8
- Maclaurinserie, 112, 113
- Maclaurinutveckling, 8
 - entydighet, 19
- ordo, 9
 - derivata, 20
- Pappos-Guldins regler, 157
- potensserie, 99
 - derivata, 103
 - integral, 103
 - uppskattning, 125
- restterm, 9
- riktningsfält, 39
- rotationsarea, 141
- rotationsvolym, 135
 - cylinderformeln, 138
 - skivformeln, 135
- serie, 88
 - absolutkonvergens, 94
 - alternerande, 94

- Cauchys integralkriterium, 92
- divergenstest, 89
- feluppskattning, 104
 - alternerande serie, 105
- geometrisk, 90
- jämförelsesats I, 91
- jämförelsesats på gränsvärdesform, 93
- kvotkriteriet, 99
- positiv, 91
- rotkriteriet, 99
- standardutvecklingar, 14
- Taylorutveckling, 16
- tyngdpunkt, 145
- Uppskattning
 - bestämd integral, 30
- uppskattning
 - funktionsvärde, 28