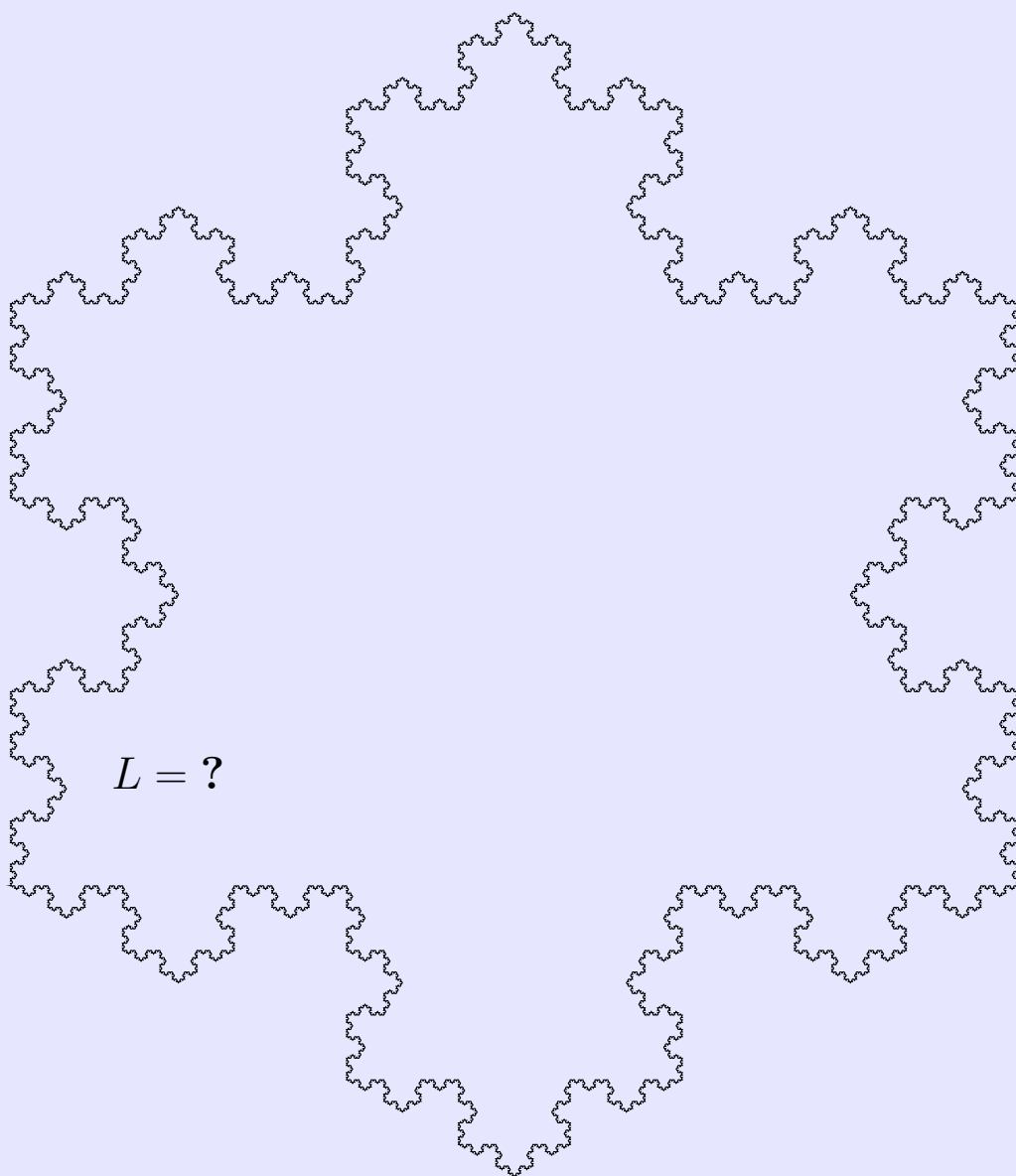


TATA42: Envariabelanalys 2 VT 2017

Föreläsningsanteckningar

Johan Thim, MAI



TATA42: Föreläsning 1

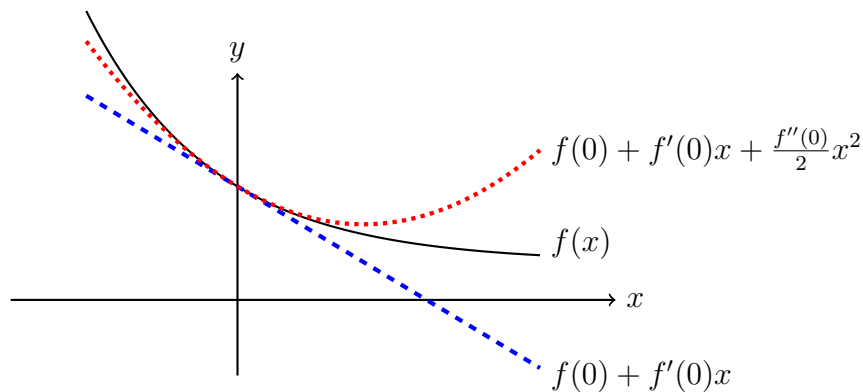
Maclaurinutvecklingar

Johan Thim*

29 mars 2017

1 Introduktion

Tänk er följande situation. En snäll funktion f är given, men vi skulle vilja approximera den på något sätt med ett uttryck av enklare slag (polynom) som åtminstone är giltigt nära en given punkt $x = a$. Vanliga metoder som vi redan känner till inkluderar att bara approximera f med en konstant $f(a)$ (f 's värde i $x = a$) eller kanske med hjälp av tangenten till f i $x = a$. Båda metoderna är vettiga, men om vi behöver en bättre approximation då? Konstanten är ett polynom av grad noll och tangenten ett polynom av grad 1. Hur hittar vi en approximation av godtycklig grad n ? Vi söker alltså ett polynom $p(x)$ som stämmer överens med f nära en punkt $x = a$. Låt oss illustrera vad vi menar.



Det verkar rimligt att välja koefficienterna i polynomet $p(x)$ så att $p(a) = f(a)$, $p'(a) = f'(a)$ och så vidare (att uttrycken har samma derivatorer upp till önskad ordning i $x = a$). Detta är också precis vad vi kommer att göra!

2 Expansion av snälla funktioner

Vi kan göra detta systematiskt när $x = 0$ med hjälp av en så kallad Maclaurinutveckling. Vi kommer hela tiden att kräva att funktioner är tillräckligt snälla (deriverbara) för vårt ändamål. I allmänhet kräver vi att f är kontinuerligt deriverbar $n + 1$ gånger om vi vill approximera med ett polynom av grad n . Vi skriver detta lite kortare som $f \in C^{n+1}$, underförstått att detta gäller nära origo. Vi kan utläsa detta som " f tillhör klassen av $(n+1)$ -gånge

*johan.thim@liu.se

kontinuerligt deriverbara funktioner.” Detta betyder att funktionen f , första derivatan f' , andra derivatan f'' och så vidare till och med $f^{(n+1)}$ existerar och är kontinuerliga funktioner.



Maclaurinutveckling

Om $f \in C^{n+1}$ så gäller att

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r(x),$$

där *resten* $r(x)$ är liten nära noll. Polynomet

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

kallas för Maclaurinpolynomet för f av ordning n .

Observera att graden för p_n är högst n (det kan hända att termer försvinner på grund av att någon derivata är noll i origo).

Bevis. Vi utnyttjar upprepade partiell integration. Genom ett smart val av primitiv funktion, $\frac{d}{dt}(t-x) = 1$, erhåller vi att

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t) dt = f(0) + \int_0^x 1 \cdot f'(t) dt \\ &= f(0) + \left[(t-x)f'(t) \right]_0^x - \int_0^x (t-x)f''(t) dt = f(0) + xf'(0) - \int_0^x (t-x)f''(t) dt \\ &= f(0) + xf'(0) - \left[\frac{(t-x)^2}{2} f''(t) \right]_0^x + \int_0^x \frac{(t-x)^2}{2} f^{(3)}(t) dt \\ &= f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \int_0^x \frac{(t-x)^2}{2} f^{(3)}(t) dt \\ &= f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \left[\frac{(t-x)^3}{3!} f^{(3)}(t) \right]_0^x - \int_0^x \frac{(t-x)^3}{3!} f^{(4)}(t) dt \\ &= f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f^{(3)}(0) - \int_0^x \frac{(t-x)^3}{3!} f^{(4)}(t) dt \\ &= \cdots = p_n(x) + (-1)^n \int_0^x \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt. \end{aligned}$$

Här får vi ”på köpet” en representation av resten $r(x)$, nämligen att

$$r(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

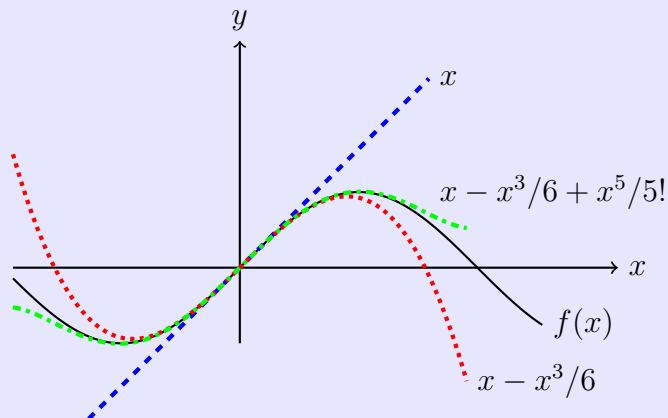
Detta brukar kallas Lagranges restterm på integralform; vi återkommer till detta!

Det finns nu flera frågor. Vad menas med att resten är liten nära noll? Vad händer om vi är intresserade kring en punkt $x = a$ och $a \neq 0$? Innan vi svarar på dessa frågor, låt oss betrakta ett exempel.



Utveckling av $\sin x$

$$\begin{aligned}\sin x &= 0 + \cos 0x + \frac{-\sin 0}{2!}x^2 \\ &\quad + \frac{-\cos 0}{3!}x^3 + \dots \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\end{aligned}$$



Desto fler termer vi tar med (ju högre grad polynomet p_n har), desto bättre stämmer polynomet överens med funktionen nära noll. Precis som önskat. Resttermen är helt enkelt felet $r(x) = f(x) - p_n(x)$. Tydligt är att detta fel beror på både x och gradtalet n .

3 Resttermen

Hur hanterar vi resttermen? Ett sätt är att jämföra med uttryck av typen x^n som vi vet hur de beter sig nära noll. På grund av konstruktionen måste r uppfylla att

$$r(0) = r'(0) = r''(0) = \dots = r^{(n)}(0) = 0$$

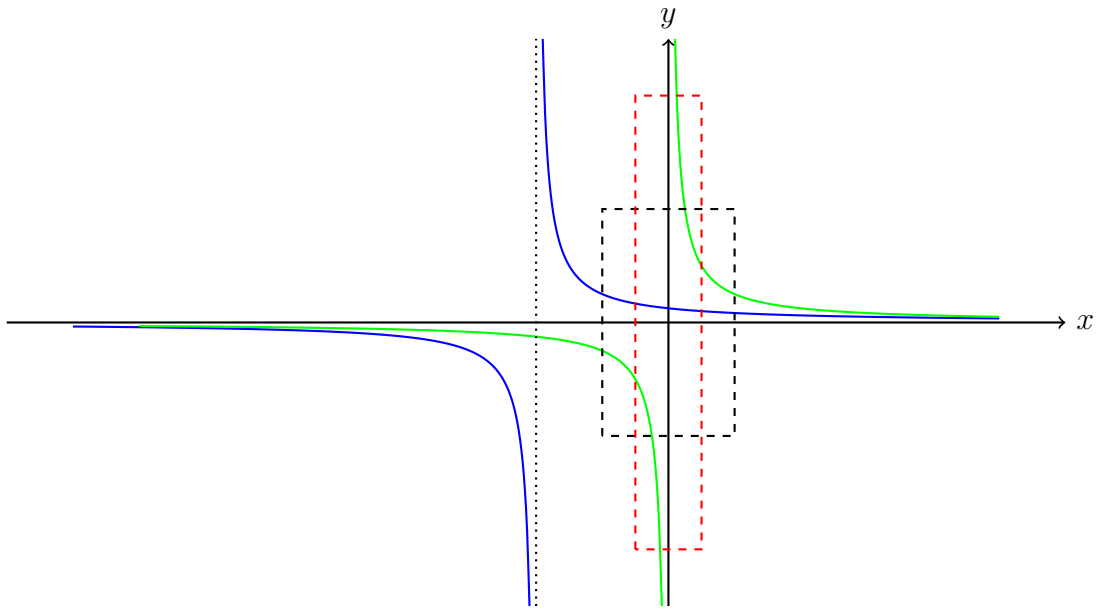
eftersom koefficienterna i $p_n(x)$ valts för just detta ändamål (visa detta!). Vidare följer det att $r^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$ (förutsatt att $f^{(n+1)}$ är definierad) eftersom $p_n^{(n+1)}(x)$ blir identiskt lika med noll. Det finns flera följder av denna likhet, och en variant som gör det enkelt för oss att räkna är att uttrycka resttermen med hjälp av stora ordo.



Stora ordo

Definition. Vi säger att $f(x) = O(x^n)$ då x är nära noll om det finns en begränsad funktion $B(x)$ så att $f(x) = B(x)x^n$ för x nära noll.

En funktion begränsad nära noll är något som inte "exploderar" när vi befinner oss nära origo. Skissar man en graf ska man kunna rita in grafen i en rektangel. Till exempel $\frac{1}{x}$ är **inte** begränsad nära origo. Men $\frac{1}{x+1}$ är begränsad nära nollan (men **inte** nära -1). Det är alltså en lokal egenskap.

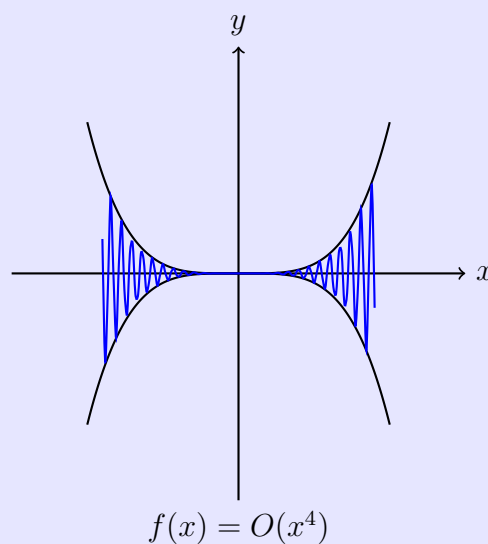
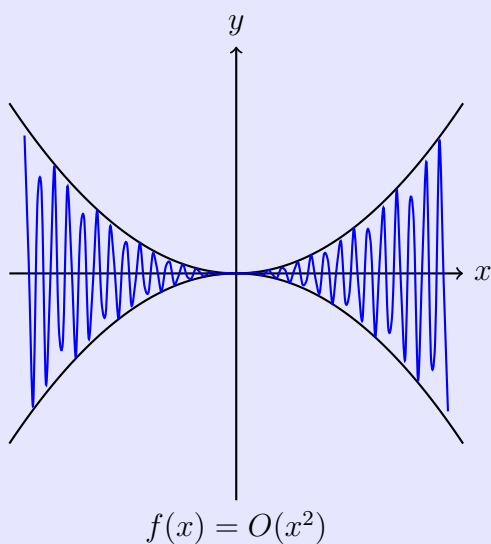
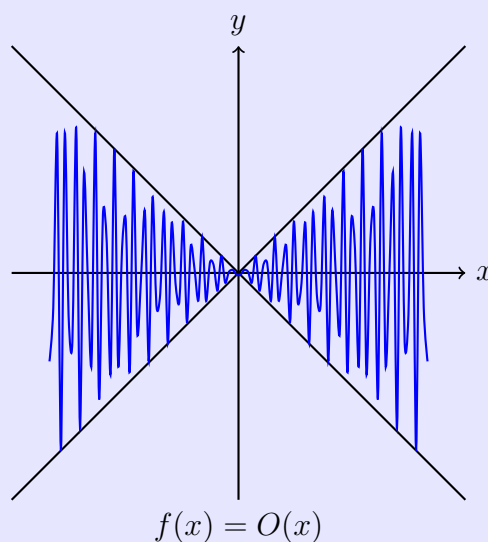
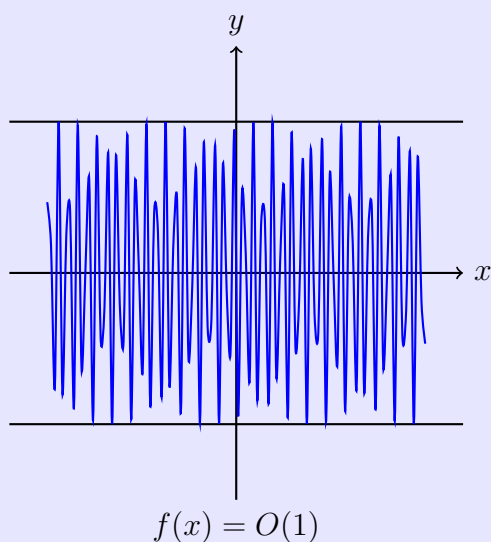


I figuren kan man se att det går att stänga in $1/(x+1)$ nära origo (svart rektangel), men det är omöjligt att rita en rektangel som täcker $1/x$ oavsett hur liten sidlängd man väljer parallellt med x -axeln (röda försöket). En bra sak att komma ihåg är att alla funktioner som är kontinuerliga nära origo är begränsade nära origo. Däremot behöver så klart inte en begränsad funktion vara kontinuerlig.



Vad innebär det att $f(x) = O(x^n)$?

Ofta handlar det om att beskriva hur snabbt en funktion $f(x)$ går mot noll (eller kvalitativt hur liten den är nära noll). Man kan då tänka sig att uttrycket i ordotermen ger en gräns för hur stor $f(x)$ kan vara och mer eller mindre ”trycker ihop” grafen för $f(x)$ på ett visst sätt nära origo. Betrakta följande exempel (där $f(x)$ är den blåa kurvan).



Vi kommer att ägna oss en hel del åt så kallade ordo-kalkyler. Följande samband gäller.



Egenskaper för stora ordo

För x nära noll och $m, n \geq 0$ gäller:

- (i) $O(x^n) \pm O(x^m) = O(x^m)$ om $m \leq n$ ("lägst vinner");
- (ii) $O(x^n)O(x^m) = O(x^{m+n})$;
- (iii) Om $f(x) = O(x^n)$ och $m \leq n$ så är $f(x) = O(x^m)$ (vi kan *sänka* exponenten);
- (iv) $B(x)O(x^n) = O(x^n)$ om $B(x)$ är begränsad;
- (v) $O(x^m)^n = O(x^{mn})$ och $O((O(x^m))^n) = O(x^{mn})$;
- (vi) $O(x^n) \rightarrow 0$ då $x \rightarrow 0$ om $n > 0$.

Observera speciellt fallet (i) med $n = m$ och minus; vi har alltså

$$O(x^n) - O(x^n) = O(x^n).$$

Ordo-termer tar **aldrig** ut varandra eftersom det kan vara olika funktioner $B(x)$ i de olika uttrycken. Vi kan även ha negativa exponenter som till exempel $O\left(\frac{1}{x}\right)$, då ofta underförstått att detta gäller när $x \rightarrow \infty$ istället för nära noll (annars är ordo-termin inte liten). Vi kan även tänka oss uttryck som $O(|x|^\alpha)$ för α som inte är heltal. Viss försiktighet krävs dock så att allt är definierat ($\alpha = 1/2$ ger en kvadratroten som inte är så pigg på negativa tal som bekant, därav beloppet i uttrycket ovan). Ett annat speciellt fall är $O(1)$. Detta är alltså endast en begränsad funktion. I normala fall kan vi inte göra så mycket med detta uttryck så om det dyker upp behöver vi antagligen göra något annorlunda.



Exempel

Till exempel så gäller

$$\frac{x^2 + x^4 + O(x^5)}{x + x^3 + O(x^3)} = \frac{x^2(1 + x^2 + O(x^3))}{x + O(x^3)} = \frac{x^2(1 + x^2 + O(x^3))}{x(1 + O(x^2))} = x \cdot \frac{1 + x^2 + O(x^3)}{1 + O(x^2)},$$

och då bråket är begränsat nära noll (varför?) så är alltså allt lika med $O(x)$.

Man kan även hamna situationen att ordo-termer dyker upp i ordo-termer som i följande exempel.



Exempel

Om $t = x + O(x^2)$, vad är $1 + t + O(t^3)$?

Lösningar. Vi stoppar helt enkelt in vad t är och förenklar:

$$1 + t + O(t^3) = 1 + x + O(x^2) + O((x + O(x^2))^3) = 1 + x + O(x^2) + O(x^3) = 1 + x + O(x^2).$$

Här har vi undersökt $(x + O(x^2))^3$ och ser att den lägsta exponent som dyker upp är när termen $x \cdot x \cdot x$ dyker upp i produkten. Alltså måste detta uttryck vara $= O(x^3)$. Eftersom vi redan har en $O(x^2)$ -term så tillför detta inget och vi erhåller svaret ovan.

Om f är tillräckligt snäll (i meningen deriverbar) kan man visa att följande samband gäller.



Om $f \in C^{n+1}$ nära origo så är $f(x) = p_n(x) + O(x^{n+1})$, där $p_n(x)$ är Maclaurinpolynomet av ordning n .

Bevis. Kom ihåg Lagranges restterm på integralform:

$$f(x) = p_n(x) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Då måste

$$\begin{aligned} |r(x)| &= \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right| \leq \int_0^{|x|} \frac{|x-t|^n}{n!} |f^{(n+1)}(t)| dt \\ &\leq \frac{|x|^n}{n!} \max_{|t| \leq |x|} |f^{(n+1)}(t)| \int_0^{|x|} dt = B(x) |x|^{n+1}. \end{aligned}$$

Här är

$$B(x) = \frac{1}{n!} \max_{|t| \leq |x|} |f^{(n+1)}(t)|$$

begränsad på, tex, $-1 \leq x \leq 1$, eftersom $f^{(n+1)}(t)$ är en kontinuerlig funktion. Således måste $r(x) = O(x^{n+1})$.



Exempel

Maclaurinpolynomet av ordning n för $f(x) = e^x$ kan fås enkelt eftersom $f^{(n)}(x) = e^x$ för alla n , så $f^{(n)}(0) = 1$ och

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1}).$$



Exempel

Vi utvecklar $f(x) = \cos x$. Då är $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f^{(3)}(x) = \sin x$ och $f^{(4)}(x) = \cos x$. Sen börjar vi om med $-\sin x$ igen. Enligt formeln för Maclaurinutveckling erhåller vi nu

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6).$$

Polynomet $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$ är Maclaurinpolynomet av både ordning 4 och 5 samtidigt eftersom $f^{(5)}(0) = 0$ så x^5 -termen saknas. Även om polynomet har grad 4 (inte 5). När man vet om situationer som denna är det lämpligt att skriva $O(x^6)$ eftersom detta är mer precist. Vet man däremot inte om att x^5 -termen saknas måste man skriva $O(x^5)$.

Alla dessa ordo-termer ställer till lite bekymmer ibland (speciellt när man läser facit). Precis som ovan kan flera alternativ vara sanna men det betyder så klart inte att de är lika "bra". Ett annat exempel är $\sin x = x - x^3/6 + O(x^4)$ och $\sin x = x - x^3/6 + O(x^5)$? Båda är

korrekta. Vilken skulle du välja? Det är den sista man brukar finna i tabeller, men vi alltid kan sänka exponenten i ordo-termen ty

$$O(x^5) = B_1(x)x^5 = xB_1(x)x^4 = O(x^4)$$

där $O(x^4) = B_2(x)x^4$ med $B_2(x) = xB_1(x)$. Vi flyttar alltså ett av x :en till den begränsade termen (vilket är ok då x är begränsad nära noll). Vi tappar alltså lite information men likheten är fortfarande sann. Vi kan skriva $O(x^3)$ också, men då försvinner x^3 -termen in i ordo-termen. Slutsatsen blir att välja så hög exponent som möjligt.



Se upp med ordo-kalkylen!

Ett varningens ord inför tentan: slarva inte med ordo-termerna! Uppgifter med principfel i ordo-hantering brukar rendera noll poäng. Påstå inte att ett uttryck är mer precist än det är genom att svara med för hög ordo-term (typiska fel i stil med $(x + x^3 + O(x^5))^2 \neq x^2 + 2x^4 + O(x^{10})$ där bästa korrekta ordo-termen är $O(x^6)$) och att inte använda termer som är meningslösa på grund av närvaron av en ordo-term (tex $7x^3 + O(x^3)$).

4 Standardutvecklingar

Låt oss samla några vanliga utvecklingar som med fördel kan memoreras för att snabbt kunna användas. Samtliga kan härledas direkt från formeln för Maclaurinutvecklingar även om några stycken kan göras lite enklare med vissa trick (vi undersöker ett par närmare på nästa föreläsning).



Vanliga funktioner

$$(i) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + O(x^n)$$

$$(ii) \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + O(x^{n+1})$$

$$(iii) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \pm \frac{x^{2k}}{(2k)!} + O(x^{2k+2})$$

$$(iv) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \pm \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + O(x^{2k+1})$$

$$(v) \quad \tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + O(x^{11})$$

$$(vi) \quad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots \\ + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^n + O(x^{n+1})$$

$$(vii) \quad \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + O(x^{2n+1})$$

Utvecklingen av $\tan x$ kanske bör kommenteras. Koefficienterna som trillar ut följer ett möns-

ter av s.k. Bernoullital, men detta ligger lite utanför kursen. Enklast kanske är att härleda de termer man behöver för situationen om inte tabellen finns tillgänglig eller memorerad. Ett krångligare exempel? Visst, man kan göra saker hur bökiga som helst!



Exempel

Finn Maclaurinutvecklingen för $\cos(\sin x)$ av ordning 5.

Lösning. Låt $t = \sin x$. Då är $t = x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)$, t är nära noll när x är nära noll (**viktigt!**), och

$$\begin{aligned}\cos t &= 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + O(t^6) = 1 - \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5) \right)^2 + \frac{1}{4!} (x + O(x^3))^4 + O(t^6) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3!} + O(x^6) + \frac{x^4}{4!} + O(x^6) + O((x + O(x^3))^6) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{4!} + O(x^6).\end{aligned}$$

Vad händer om vi betraktar $\sin(\cos x)$ istället? Undersök saken och var försiktig med ordotermen!

5 Taylorutvecklingar

Vi har nämnt problemet tidigare: vad händer om vi vill approximera f kring en punkt $x = a$ istället där $a \neq 0$? Vi kommer åt detta problem genom att betrakta $g(t) = f(t + a)$, så vi låter alltså $t = x - a$. Genom en Maclaurinutveckling av g erhåller vi då följande:

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{g''(0)}{2}t^2 + \dots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!}t^n + O(t^{n+1})$$

Här är $g(0) = f(a)$, $g'(0) = f'(a)$, och så vidare, och vi kan formulera uttrycket i variabeln x i stället. Vi summerar resultatet i följande sats.



Taylorutveckling

Om f är en $(n + 1)$ -gångs kontinuerligt deriverbar funktion nära $x = a$ så är

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + O((x - a)^{n+1}).$$

Observera här att termen $O((x - a)^{n+1})$ är liten när x är nära a i stället för när x är nära noll. Detta är viktigt! Konstruktionen med $g(t) = f(t + a)$ gör att vi i princip alltid kan anta att $a = 0$ när vi bevisar satser. Med andra ord gäller motsvarande satser för Taylorutvecklingar som gäller för Maclaurinutvecklingar.

Självklart kan man likt vid härledning av Maclaurinutvecklingar använda satsen ovan direkt (derivera och räkna ut $f(a)$, $f'(a)$ och så vidare) men ofta kan vi rädda situationen med en känd Maclaurinutveckling. Hur? Vi betraktar ett par exempel för att illustrera.



Exempel

Maclaurinutveckla polynomet $x^4 + 2x^2 - 3x + 4$ till ordning 2. Utveckla även polynomet $x^4 + 2x^2 - 3x + 4$ kring $x = 1$ med ordning 2.

Lösning. Maclaurinpolynomet av ordning 2 ges av $2x^2 - 3x + 4$ och utvecklingen kan skrivas

$$x^4 + 2x^2 - 3x + 4 = 2x^2 - 3x + 4 + O(x^3).$$

Nu råkar x^3 -termen saknas så vi skulle lika gärna (bättre) kunna skriva $O(x^4)$. Vad händer när vi söker en Taylorutveckling kring $x = 1$? Enklast är ofta att låta $t + 1 = x$ eftersom vi då har x nära ett när t nära noll. Alltså,

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^2 - 3x + 4 &= (t+1)^4 + 2(t+1)^2 - 3(t+1) + 4 \\ &= 1 + 4t + 6t^2 + 4t^3 + t^4 + 2(t^2 + 2t + 1) - 3(t+1) + 4 \\ &= 4 + 5t + 8t^2 + O(t^3) = 4 + 5(x-1) + 8(x-1)^2 + O((x-1)^3). \end{aligned}$$

Här kan vi **inte** skriva $O((x-1)^4)$ eftersom det finns en t^3 -term. Det kan alltså bli skillnad beroende på vilken punkt vi arbetar i (inte så förvånande om vi tänker efter).



Exempel

Taylorutveckla $1 + \sin(x)$ kring $x = \frac{\pi}{2}$.

Vi låter $x = t + \frac{\pi}{2}$. Om x är nära $\frac{\pi}{2}$ så är t nära 0. Vi Maclaurinutvecklar då

$$g(t) = f\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = 1 + \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = 1 + \cos t = 2 - \frac{t^2}{2} + O(t^4) = 2 - \frac{(x - \pi/2)^2}{2} + O((x - \pi/2)^4),$$

där vi använt den kända trigonometriska formeln $\sin(t + \pi/2) = \cos t$, $t \in \mathbf{R}$.

6 Tillämpningar

En vanlig tillämpning för Maclaurinutvecklingar är beräkning av gränsvärden.



Exempel

Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.

Vi löser detta genom att Maclaurinutveckla $\sin x$ (se tidigare exempel):

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{x - (x^3/6) + O(x^5)}{x} = 1 + O(x^2) \rightarrow 1, \text{ då } x \rightarrow 0.$$

Vi kan alltså Maclaurinutveckla uttryck istället för att memorera standardgränsvärden! Nästa föreläsning kommer att innehålla massvis med fler tillämpningar!

TATA42: Föreläsning 2

Tillämpningar av Maclaurinutvecklingar

Johan Thim*

29 mars 2017

1 Entydighet

Om vi har ett polynom som approximerar en snäll funktion bra, kan vi då vara säkra på att koefficienterna i polynomet är Maclaurinkoefficienterna? Faktum är att vi faktiskt kan det!



Entydighet

Om f är $(n+1)$ -gånge kontinuerligt deriverbar, dvs $f \in C^{n+1}$, och

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + O(x^{n+1})$$

så är $a_0 = f(0)$ och $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ för $k = 1, 2, \dots, n$.

Beviskiss: Maclaurinutvecklingen finns, så vi måste ha likheten

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + O(x^{n+1}) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + O(x^{n+1}).$$

Med $x = 0$ får vi $a_0 = f(0)$. Sen är det lockande att derivera för att bestämma a_1 , men ordotermen är obehaglig då den inte behöver vara deriverbar. Men om vi utnyttjar att $a_0 = f(0)$ kan vi förkorta bort ett x överallt (även i ordotermen):

$$a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^{n-1} + O(x^n) = f'(0) + \frac{f''(0)}{2!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n-1} + O(x^n).$$

Alltså är $a_1 = f'(0)$ och så vidare. Vi landar till slut i att

$$a_n + O(x) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + O(x),$$

där vi kan låta $x \rightarrow 0$.

*johan.thim@liu.se

2 Utvecklingar från derivatan

Om man vet en utveckling för derivatan $f'(x)$ kan man direkt hitta utvecklingen för $f(x)$ genom att betrakta integralkalkylens huvudsats:

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt.$$



Exempel

Härled Maclaurinutvecklingen för $\ln(1+x)$.

Lösning. Låt $f(x) = \ln(1+x)$. Som bekant ges derivatan av $f'(x) = \frac{1}{1+x}$. Vi kan utveckla denna som $(1+x)^{-1}$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + r(x).$$

Vi stannar på $n-1$ av en anledning. Eftersom $f(0) = \ln 1 = 0$ så är

$$\ln(1+x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \int_0^x r(t) dt.$$

Resttermen då? I detta fall så ser vi att Maclaurinpolynomet är en geometrisk summa, så

$$r(x) = \frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k = \frac{1}{1+x} - \frac{1 - (-x)^n}{1 - (-x)} = \frac{(-1)^n x^n}{1+x}.$$

Alltså blir (för $x > 0$) $|r(x)| \leq x^n$. Vi kan nu uppskatta integralen av feltermen. Om $x \geq 0$ gäller att

$$\left| \int_0^x r(t) dt \right| \leq \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} = O(x^{n+1})$$

eftersom $1+x \geq 1$. När $x < 0$ måste vi minst kräva att $-1 < x < 0$ (varför?). Men vi kan göra det enklare för oss och helt enkelt anta att $|x| \leq 1/2$. Då är $1+x \geq 1/2$ och $\frac{1}{1+x} \leq 2$. Liknande kalkyl som ovan ger oss $O(x^{n+1})$. Detta krävde ganska precis kunskap om resttermen, men det går att göra liknande argument även när vi inte har så enkla fall. Vi återkommer till detta i nästa föreläsning.

3 Utvecklingar via ansatser

Om man studerar utvecklingarna för $\sin x$ och $\cos x$ ser man att den udda funktionen $\sin$ endast har udda exponenter och att den jämna funktionen $\cos$ endast har jämna exponenter. Detta gäller generellt för udda respektive jämna funktioner.



Exempel

Använd utvecklingen för $\sin x$ för att finna Maclaurinpolynomet av ordning 4 för $\arcsin x$.

Lösning. Vi vet att $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$, så $\arcsin$ är udda. Det innebär alltså att $\arcsin x = a_1 x + a_3 x^3 + O(x^5)$. Vi söker a_1 och a_3 . Nu vet vi att $\sin \arcsin x = x$ för $-1 \leq x \leq 1$ och

eftersom $\sin x = x + x^3/6 + O(x^5)$ måste då

$$a_1x + a_3x^3 + O(x^5) - \frac{(a_1x + a_3x^3 + O(x^5))^3}{6} + O((a_1x + a_3x^3 + O(x^5))^5) = x.$$

Vänsterledet kan vi skriva om som

$$a_1x + \left(a_3 - \frac{a_1^3}{6}\right)x^3 + O(x^5)$$

och för att detta ska vara lika med högerledet x måste alltså $a_1 = 1$ och $a_3 - a_1^3/6 = 0$. Med andra ord erhåller vi att

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + O(x^5).$$

Kontrollera detta genom att derivera $f(x) = \arcsin x$ direkt!

4 Gränsvärden

En vanlig tillämpning för Maclaurinutvecklingar är beräkning av gränsvärden.



Exempel

Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1+x^2}}{x^2}$.

Vi löser detta genom att Maclaurinutveckla $\cos x$ och $\sqrt{1+x^2}$:

$$\begin{aligned} \frac{\cos x - \sqrt{1+x^2}}{x^2} &= \frac{1 - x^2/2 + O(x^4) - (1 + x^2/2 + O(x^4))}{x^2} \\ &= \frac{x^2(-1 + O(x^2))}{x^2} = -1 + O(x^2) \rightarrow -1, \text{ då } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Vi kan alltså Maclaurinutveckla uttryck istället för att memorera massvis med standardgränsvärden! Ofta är det också någon slags kancellation inblandad. Utvecklingar kan vara ett bra sätt att plocka bort beteende som är likadant i summor.



Exempel

Finn gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{\ln(1+x^3)}$.

Vi löser problemet analogt med föregående kalkyl:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{\ln(1+x^3)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{2} - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + O(x^5)}{x^3 + O(x^6)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3}x^3 + O(x^5)}{x^3 + O(x^6)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3} + O(x^2)}{1 + O(x^3)} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$



Exempel

Finn gränsvärdet (om det existerar) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan \sin^2 x - \tan x^2}{x^2 \ln(1+x^2)}$.

Lösning. Låt $t = \sin^2 x$. Då är

$$t = \left(x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)\right)^2 = x^2 + \frac{2x^4}{3!} + O(x^6)$$

och därmed är

$$\arctan t = t + O(t^3) = x^2 + \frac{2x^4}{3!} + O(x^6) + O((x^2 + O(x^4))^3) = x^2 + \frac{2x^4}{3!} + O(x^6).$$

Vidare är

$$\tan x^2 = x^2 + O(x^6)$$

och

$$x^2 \ln(1+x^2) = x^2(x^2 + O(x^4)) = x^4 + O(x^6).$$

Vi har alltså

$$\frac{\arctan \sin^2 x - \tan x^2}{x^2 \ln(1+x^2)} = \frac{x^2 + \frac{2x^4}{3!} - x^2 + O(x^6)}{x^4 + O(x^6)} = \frac{\frac{2}{3!} + O(x^2)}{1 + O(x^2)} \rightarrow \frac{2}{3!} = \frac{1}{3}.$$

5 Gränsvärden mot oändligheten

Vi behöver i fallet när vi söker ett gränsvärde mot oändligheten införa en ny variabel som går mot noll då $x \rightarrow \infty$. Den vanligaste tekniken vi använder är att bryta ut det som dominerar ur varje term och då få saker kvar som går mot noll. Dessa saker brukar ge lämplig ny variabel.



Exempel

Räkna ut gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[4]{x^2 + x^4} - \sqrt{1+x+x^2} \right)$.

Lösning. Vi försöker bryta ut det som dominerar i varje term. I den första är det x^4 -termen och i den andra x^2 -termen. Således har vi

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{x^2 + x^4} - \sqrt{1+x+x^2} &= |x| \left(\sqrt[4]{\frac{1}{x^2} + 1} - \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} \right) \\ &= |x| \left(1 + \frac{1}{4x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) + O\left(\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right)^2 \right) \right) \right) \\ &= -\frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow -\frac{1}{2}, \text{ då } x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Här har vi använt $t = \frac{1}{x^2}$ och $s = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$ som nya variabler.

6 Asymptoter



Exempel

Visa att $\sqrt{1 - 2x + 4x^2}$ har en asymptot då $x \rightarrow \infty$.

Lösning. Vi visar detta genom att finna asymptoten (om den finns). Mot oändligheten är det x^2 -termen som dominerar i kvadratroten, så vi börjar med att bryta ut denna

$$\sqrt{1 - 2x + 4x^2} = 2|x|\sqrt{\frac{1}{4x^2} - \frac{1}{2x} + 1}.$$

Eftersom $x \rightarrow \infty$ kan vi anta att $|x| = x$. Låt nu $t = \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{2x}$. Då gäller att $t \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \infty$. Eftersom

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t + O(t^2)$$

ser vi nu att

$$\sqrt{1 - 2x + 4x^2} = 2x \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4x^2} - \frac{1}{2x} \right) + O \left(\left(\frac{1}{4x^2} - \frac{1}{2x} \right)^2 \right) \right) = 2x - \frac{1}{2} + O \left(\frac{1}{x} \right).$$

Observera här att

$$O \left(\left(\frac{1}{4x^2} - \frac{1}{2x} \right)^2 \right) = O \left(\frac{1}{16x^4} - \frac{2}{8x^3} + \frac{1}{4x^2} \right) = O \left(\frac{1}{x^2} \right)$$

så termer innehållande x^{-2} försvinner in i denna. Vi har nu visat att det finns en asymptot $2x - 1/2$ då $x \rightarrow \infty$ eftersom $O(1/x) \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \infty$.

7 Extrempunkter

En Maclaurinutveckling beskriver hur en funktion beter sig lokalt nära origo. Alltså borde denna information kunna användas för att undersöka om det finns ett lokalt max eller min i origo. Självklart borde samma sak kunna göras i andra punkter genom att använda lämplig Taylorutveckling i stället. Vi betraktar ett par exempel.



Exempel

Avgör om $\frac{\sin x}{x}$ har en lokal extrempunkt i origo och avgör om så är fallet vilken karaktär punkten har.

Lösning. Vi Maclaurinutvecklar $\sin x$ och finner då att

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + O(x^4) = 1 - x^2 \left(\frac{1}{6} + O(x^2) \right).$$

När x är nära 0 ser vi att uttrycket i parentesen är $\approx \frac{1}{6}$. Funktionsvärdet i $x = 0$ är 1 och om vi flyttar oss lite från $x = 0$ så är funktionsvärdet strikt mindre än ett. Detta är definitionen av ett lokalt maximum!



Exempel

Avgör om $2 + x \exp(x^2) - \tan x$ har en lokal extrempunkt i origo och avgör om så är fallet vilken karaktär punkten har.

Lösning. Vi utvecklar uttrycket:

$$\begin{aligned} 2 + x \exp(x^2) - \tan x &= 2 + x(1 + x^2 + O(x^4)) - \left(x + \frac{x^3}{3} + O(x^5)\right) \\ &= 2 + x^3 + \frac{x^3}{3} + O(x^5) \\ &= 2 + x^3 \left(\frac{4}{3} + O(x^2)\right). \end{aligned}$$

Här ser vi att uttrycket är större än 2 när $x > 0$ (men nära noll) och mindre än 2 när $x < 0$ (men nära noll) eftersom x^3 växlar tecken. Detta är således varken en max- eller minpunkt. Är detta en så kallad terrasspunkt?

TATA42: Föreläsning 3

Restterm på Lagranges form

Johan Thim*

10 januari 2017

1 Lagranges form för resttermen

Vi har tidigare använt resttermen på ordo-form med goda resultat. Oftast i samband med gränsvärden, extrempunktsundersökningar eller andra lokala egenskaper. Vad kan man göra om man vill ha ett resultat som gäller globalt, eller åtminstone på ett förutbestämt intervall kring en punkt? Vi behöver alltså en mer precis kontroll på hur resttermen (dvs felet i utvecklingen) beter sig.



Lagranges form

Om $f \in C^{n+1}$ nära $x = 0$ så kan resttermen $r(x)$ i Maclaurinutvecklingen av ordning n för f skrivas

$$r(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \text{för något } \xi \text{ mellan } 0 \text{ och } x \text{ för varje fixt } x \text{ nära origo.}$$

Bevis. Kom ihåg från föreläsning 1 att

$$r(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Eftersom $(x-t)^n \geq 0$ för t mellan 0 och x , samt att både $(x-t)^n$ och $f^{(n+1)}(t)$ är kontinuerliga, kan vi använda medelvärdessatsen för integraler som säger att det för varje x finns ett tal ξ mellan 0 och x så att

$$\begin{aligned} r(x) &= f^{(n+1)}(\xi) \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt = f^{(n+1)}(\xi) \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1) \cdot n!} \right]_0^x \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}, \end{aligned}$$

vilket är precis vad vi vill visa!

*johan.thim@liu.se



”Funktionen” ξ

Observera att detta är punktvis. För varje fixt x har vi resttermen på denna form. Talet ξ beror alltså på vilket värde x har och bör därför egentligen betraktas som en funktion $\xi(x)$ av x . Detta kan ställa till det om man inte är försiktig. På det sättet vi kommer att använda Lagranges form kommer vi dock inte att påverkas då vi hela tiden kommer jobba med så kallade *likformiga* uppskattningar (som gäller för alla värden i något fixt intervall för den variabel vi betraktar). Däremot kan funktionen $\xi(x)$ potentiellt vara ordentligt elak (vi vet inte hur den ser ut eftersom den definieras via medelvärdessatsen för varje x). Det går alltså inte att derivera resttermen $r(x)$ på Lagranges form hur som helst och även integration bör utföras försiktigt där man helst uppskattat bort allt ξ -innehåll innan någon integral dyker upp.

Ibland skriver man $\xi = \theta x$, där $\theta \in [0, 1]$ för att markera att ξ beror på x . Observera här att även θ varierar när vi ändrar x , men är begränsad mellan 0 och 1.

Låt oss betrakta ett exempel.



Exempel

Låt $f(x) = (1 + x)^5$. Vi vet från binomialsatsen precis hur detta ser ut (Pascals triangel och så vidare). Alltså,

$$f(x) = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$$

för alla x . Låt oss utveckla f till ordning 3. Då är

$$f(x) = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + r(x)$$

där $r(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4$. Det är tydligt att vi måste ändra ξ beroende på hur vi väljer x . Detta är klart eftersom vi *vet* att $r(x) = 5x^4 + x^5$ och det är det enda sättet dessa två uttryck kan matchas på:

$$\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4 = 5x^4 + x^5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} = 5 + x \quad \Leftrightarrow \quad 5\xi + 5 = 5 + x \quad \Leftrightarrow \quad \xi = \frac{x}{5}$$

om $x \neq 0$ då $f^{(4)}(\xi) = 120\xi + 120$, vilket ger ett ξ som beror på x (linjärt till och med!). I det generella fallet beror så klart inte ξ så enkelt på x , men exemplet visar att ett beroende ganska direkt uppstår.

För motsvarande Taylorutveckling kan resttermen skrivas $r(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ där ξ ligger mellan x och a (och x nära a är fixt).

2 Tillämpningar

Så vad kan vi använda detta till? I princip de situationer då vi inte enbart är intresserade av vad som händer (våldigt) nära en viss punkt. Allt från att visa att en viss Maclaurinutveckling *konvergerar* på något intervall då vi fortsätter mot oändligheten med antalet termer till att vi

kanske mer precist vill uppskatta en integral där vi inte känner till någon elementär primitiv funktion. Vi fortsätter nu alltså med en rad exempel på hur vi kan använda oss av Lagranges form på resttermen. Först sammanfattar vi stegen som ofta ingår i användandet av Lagranges restterm.



Vanliga tekniker

- I allmänhet gör vi ett byte först och utvecklar en standardutveckling och sen pluggar in den gamla variabeln i resttermen för den enkla utvidgningen. Se till att hålla koll här på vart ξ ligger.
- Försök få en uppfattning om storleksordningen på $r(x)$ för olika n . Hur stort n krävs? Är det överhuvudtaget möjligt?
- Räkna ut derivatan $f^{(n)}$. Tips kan fås från hur Maclaurinutvecklingen ser ut (men den räcker inte!).
- Uppskatta resttermen så att vi får bort ξ . Utgå från det värsta som är möjligt på det intervall vi arbetar.

Låt oss räkna några exempel för att förtydliga.



Exempel

Skriv upp resttermen $r(x)$ på Lagranges form för utvecklingen av ordning 7 för $\frac{1}{1+x^3}$.

Lösning. Låt $g(t) = (1+t)^{-1}$. Vi betraktar

$$g(t) = (1+t)^{-1} = 1 - t + t^2 - t^3 + r(t),$$

där $r(t) = \frac{g^{(4)}(\xi)}{4!}t^4$ med ξ mellan 0 och t . Varför stannar vi vid $n = 3$? Jo, vi kommer ersätta t med x^3 , så då får vi med allt upp till ordning 7 (och lite till). Eftersom $g^{(4)}(t) = \frac{24}{(1+t)^5}$ (detta måste räknas ut) så har vi alltså

$$r(t) = \frac{24}{4!(1+\xi)^5}t^4, \quad \text{för något } \xi \text{ mellan } 0 \text{ och } t.$$

Varför inte skriva $0 \leq \xi \leq t$? Faktum är att vi inte vet om t är positiv eller negativt så då behövs lite belopp här och där för att vara säkra. Enklare att uttrycka saken med ord! Vi återgår till x :

$$\frac{1}{1+x^3} = 1 - x^3 + x^6 - x^9 + \frac{1}{(1+\xi)^5}x^{12}, \quad \text{för något } \xi \text{ mellan } 0 \text{ och } x^3.$$

Observera att kravet på ξ nu ändrats till motsvarande krav för x . Detta är viktigt! Vi kan också jämföra med att direktutveckla $f(x) = \frac{1}{1+x^3}$. Då blir

$$f^{(4)}(x) = 1944 \frac{x^8}{(1+x^3)^5} - 1944 \frac{x^5}{(1+x^3)^4} + 360 \frac{x^2}{(1+x^3)^3}.$$

Här är det lite bökigare att göra uppskattningar.



Exempel

Visa att $\left| \frac{1}{1+x^3} - (1 - x^3 + x^6 - x^9) \right| \leq \left(\frac{8}{7} \right)^5 |x|^{12}$ för $|x| \leq \frac{1}{2}$.

Lösning. Det enda som blir kvar inne i absolutbeloppet är resttermen vi tog fram i föregående exempel. Eftersom $|x| \leq \frac{1}{2}$ är $-\frac{1}{8} \leq x^3 \leq \frac{1}{8}$. Då blir $1 + \xi \geq 1 - \frac{1}{8}$ eftersom ξ ligger mellan 0 och x^3 . Alltså blir

$$\left| \frac{1}{(1+\xi)^5} x^{12} \right| \leq \frac{|x|^{12}}{\left(1 - \frac{1}{8}\right)^5} = \left(\frac{8}{7} \right)^5 |x|^{12}.$$

Här var det alltså viktigt vilka värden ξ kan anta!

2.1 Uppskattningar av funktionsvärden

Typiskt skulle man kunna vilja veta approximativt vilket värde en given funktion har i en viss punkt $x = a$. Ett sätt är att approximera funktionen med dess Maclaurinpolynom, som går lätt att räkna ut numeriskt i en viss punkt (till exempel $x = a$). Felet i denna uppskattning måste dock vara under kontroll, så vi behöver använda Lagranges restterm med $x = a$ och se hur stort detta blir.



Exempel

Uppskatta talet $\cos \frac{1}{4}$ med ett fel $< 10^{-6}$.

Lösning. Vi vet att

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{\cos \xi}{(2n+2)!} x^{2n+2}, \quad \text{för något } \xi \text{ mellan } 0 \text{ och } x.$$

Resten kan vi uppskatta (för $x = 1/4$) med

$$\left| (-1)^{n+1} \frac{\cos \xi}{(2n+2)!} x^{2n+2} \right| \leq \frac{1}{4^{2n+2} (2n+2)!} \quad \text{eftersom } |\cos \xi| \leq 1.$$

Vi kan nu testa n för att se när detta blir $< 10^{-6}$. Vi ser att $n = 1$ inte duger men med $n = 2$ erhåller vi

$$\frac{1}{4^{4+2} (4+2)!} = \frac{1}{2^{12} \cdot 6!} < \frac{1}{4000 \cdot 500} = 0.5 \cdot 10^{-6}.$$

Alltså är

$$\cos \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{32} + \frac{1}{6144} + R$$

där $|R| < 10^{-6}$.



Exempel

Uppskatta $\sqrt{3}$ med ett fel $< 10^{-3}$.

Lösning. Att försöka utveckla $\sqrt{3} = \sqrt{1+2}$ visar sig väldigt svårt då $x = 2$ är för stort. Vi försöker skriva om $3 = \frac{3 \cdot 25 \cdot 81}{25 \cdot 81}$, och ser då att

$$\sqrt{3} = \frac{9}{5} \sqrt{\frac{75}{81}} = \frac{9}{5} \sqrt{1 - \frac{6}{81}},$$

vilket verkar mer lovande. Vad vi gjort är att vi förlängt 3:an med en kvadrat och sen introducerat en annan kvadrat av ungefär samma storlek. På så sätt får vi något nära ett inne i roten när vi bryter ut jämna kvadrater. Vi utvecklar $\sqrt{1+x}$:

$$\sqrt{1+x} = \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{\frac{3}{8}(1+\xi)^{-5/2}}{3!} x^3 \right),$$

där ξ ligger mellan 0 och x (och vårt $x = -6/81$). Vi uppskattar resttermen (för hela utvecklingen) för att se om detta räcker:

$$\left| \frac{9}{5} \cdot \frac{\frac{3}{8}(1+\xi)^{-5/2}}{3!} x^3 \right| \leq \frac{9|x|^3}{5 \cdot 16(1+\xi)^{5/2}}.$$

Eftersom ξ ligger mellan 0 och $x = -6/81$ blir nämnaren som värst $1 - 6/81 = 75/81$. Vi kan då uppskatta att

$$(1+\xi)^{5/2} \geq \left(\sqrt{\frac{75}{81}} \right)^5 = \left(\frac{5\sqrt{3}}{9} \right)^5 > \left(\frac{5 \cdot \frac{3}{2}}{9} \right)^5 = \left(\frac{5}{6} \right)^5$$

där vi utnyttjat att $\sqrt{3} > \frac{3}{2}$. Nu kan vi uppskatta resttermen med

$$\frac{9 \cdot 6^3 \cdot 6^5}{5 \cdot 81^3 \cdot 16 \cdot 5^5} = \frac{16}{9 \cdot 5^6} < \frac{2}{5^6} < \frac{2}{100^2} < 10^{-3}.$$

Alltså har vi

$$\sqrt{3} = \frac{9}{5} \left(1 - \frac{3}{81} - \frac{36}{8 \cdot 81^2} \right) + R = \frac{1403}{810} + R$$

där $|R| \leq 10^{-3}$.

2.2 Integralkalkyl

Man kan även hitta approximativa värden för numeriska integraler. Detta åstadkoms genom att man approximerar integranden med dess Maclaurinpolynom. Problemet ligger i att vi behöver ha kontroll över hur resttermen beter sig över **hela** integrationsområdet. Det räcker alltså inte med resttermen på ordo-form, utan vi behöver använda oss av Lagranges restterm.



Exempel

Beräkna approximativt $\int_0^{1/8} \sqrt{1+4x^3} dx$ med ett fel som är $< 10^{-9}$.

Lösning. Vi utvecklar integranden och låter $t = 4x^3$:

$$\sqrt{1+4x^3} = (1+t)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + r(t) = 1 + 2x^3 - 2x^6 + r(4x^3),$$

där $r(t) = \frac{3(1+\xi)^{-5/2}}{3!}t^3$ för något ξ mellan noll och t . Vi uppskattar $r(4x^3)$ genom

$$|r(4x^3)| \leq \frac{3}{8 \cdot 3!}(4x^3)^3 = 4x^9$$

eftersom $1+\xi \geq 1$ då ξ ligger mellan 0 och x^3 samt $x \geq 0$. Alltså är

$$\begin{aligned} \int_0^{1/8} \sqrt{1+4x^3} dx &= \left[x + \frac{x^4}{2} - 2\frac{x^7}{7} \right]_0^{1/8} + \int_0^{1/8} r(4x^3) dx \\ &= \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^{13}} - \frac{1}{7 \cdot 2^{20}} + \int_0^{1/8} r(4x^3) dx, \end{aligned}$$

där

$$\left| \int_0^{1/8} r(4x^3) dx \right| \leq 4 \int_0^{1/8} x^9 dx = \frac{2}{5} [x^{10}]_0^{1/8} \leq \frac{1}{8^{10}} = \frac{1}{2^{30}}.$$

Eftersom $2^{30} = 1024^3 > 10^9$ så är felet $< 10^{-9}$.

2.3 Konvergens?

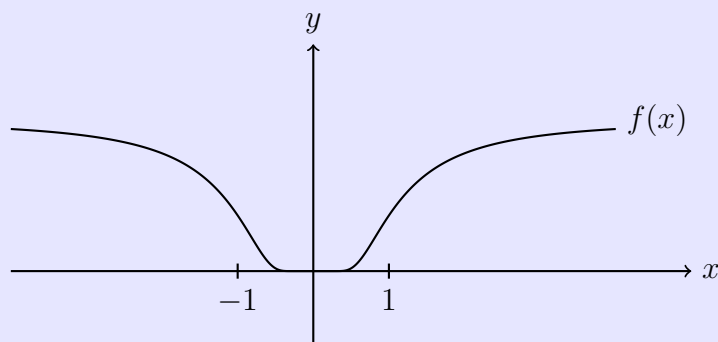


Konvergens av utvecklingar

Ibland kan man hamna i urartade situationer. Ta till exempel följande funktion:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Denna funktion är intressant då $f^{(n)}(0) = 0$ för varje positivt heltal n (visa det). Alltså är **alla** Maclaurinkoefficienter lika med noll och alla Maclaurinpolynom $p_n(x) = 0$ för alla x . Man kan tänka sig att detta aldrig kan vara en bra approximation, men låt oss rita hur f ser ut:



Verkar inte helt galet ändå! Tydligt att approximationen inte fungerar när vi flyttar oss för långt från origo, men detta händer då och då. Däremot är detta ett exempel på en funktion där alla termer stämmer överens med Maclaurinpolynomet, men även om man tar med oändligt många termer blir det bara likhet i en enda punkt ($x = 0$). Vi återkommer till problemet att hitta *konvergensområden* senare (potensserier).

TATA42: Föreläsning 4

Generaliserade integraler

Johan Thim*

29 mars 2017

Vi har stött på begreppet tidigare när vi diskuterat Riemannintegraler i föregående kurs. Denna gång kommer vi lite mer att fokusera på frågan om en integral *konvergerar* eller *divergerar*. Inte lika mycket på vad det exakta värdet blir. Låt oss börja med att definiera vad vi menar med en generaliserad integral.



Definition. Låt f vara kontinuerlig på $]a, b[$. En integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

säges vara generaliserad i a om $a = -\infty$ eller om $f(x)$ är obegränsad då $x \rightarrow a^+$, samt generaliserad i b om $b = \infty$ eller om $f(x)$ är obegränsad då $x \rightarrow b^-$.

Vi säger helt enkelt att en integral är generaliserad i en punkt om det uppstår problem med begränsningen i punkten. Notera att kravet på att f är kontinuerlig på $]a, b[$ är starkare än nödvändigt. Vi skulle kunna nöja oss med att kräva att f är Riemannintegrabel på $]a, b[$ (eller mer korrekt på alla slutna delintervall av $]a, b[$).



Exempel

Integralen $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$ är generaliserad i $+\infty$ och integralen $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx$ är generaliserad i både $-\infty$ och i 0.

Så hur menar vi då att vi ska hantera generaliserade integraler?



Definition. Om f är kontinuerlig på $]a, b[$ så definierar vi den *generaliserade* integralen enligt

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{s \rightarrow a^+} \int_s^c f(x) dx + \lim_{t \rightarrow b^-} \int_c^t f(x) dx$$

om båda gränsvärdena existerar ändligt (oberoende av varandra). Här är c något tal så att $a < c < b$.

Man kan ganska enkelt visa att valet av c inte påverkar resultatet (varför?). Vi tar med båda potentiellt generaliserade punkterna på en gång, men i fallet att integralen inte är generaliserad sammanfaller gränsvärdet med den klassiska definitionen på Riemannintegralen. Detta ligger också till grund för följande sats.

*johan.thim@liu.se



Linjäritet

Sats. Om $\int_a^b f(x) dx$ och $\int_a^b g(x) dx$ existerar (som ändliga gränsvärden) så gäller för konstanter c_1 och c_2 att

$$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x)) dx = c_1 \int_a^b f(x) dx + c_2 \int_a^b g(x) dx.$$

När vi säger att en generaliserad integral existerar använder vi ibland begreppet *konvergent*.



Definition. Om den generaliserade integralen existerar kallar vi den för *konvergent*. I de fall där något av gränsvärdena inte existerar kallar vi integralen för *divergent*.

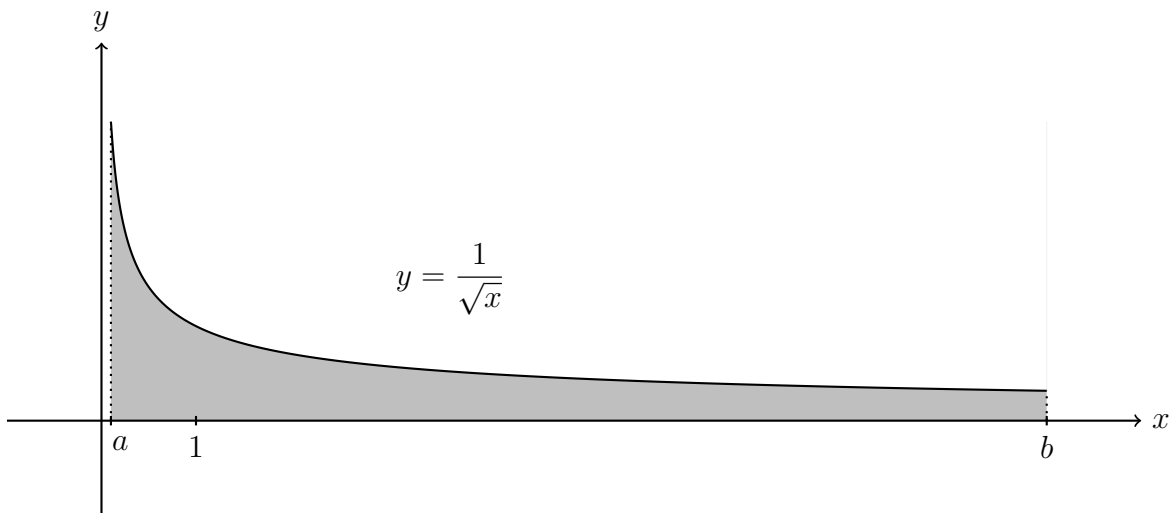
Värt att notera är att en "vanlig" Riemann-integral av en Riemannintegrabel funktion på ett intervall $[a, b]$ självklart är konvergent.



Exempel

Undersök om (den generaliserade) integralen $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ är konvergent.

Lösning. Vi börjar med att skissa den area vi kan tolka integralen som.



Integralen är generaliserad i både $x = 0$ och i ∞ . Vi behöver alltså göra två undersökningar. Vi börjar med 0 och väljer $c = 1$:

$$\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_a^1 = 2 - 2\sqrt{a} \rightarrow 2, \quad \text{då } a \rightarrow 0^+.$$

Mot $a = 0$ går det alltså att definiera integralen. Vad händer i $b = \infty$? Vi undersöker:

$$\int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_1^b = 2\sqrt{b} - 2 \rightarrow \infty, \quad \text{då } b \rightarrow \infty.$$

Alltså divergerar $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ och då är även hela integralen i frågan divergent. Det räcker alltså i det här fallet att undersöka den andra biten eftersom den är divergent. Har man en aning om att något är divergent bör man börja med den delen.



Exempel

Undersök om $\int_0^\infty \cos x dx$ är konvergent.

Lösning. Vi vet hur cosinus ser ut och det är endast i $b = \infty$ integralen är generaliserad. Utan att tänka så mycket kan vi direkt från definitionen testa:

$$\int_0^b \cos x dx = [\sin x]_0^b = \sin b \rightarrow ?, \quad \text{då } b \rightarrow \infty.$$

Gränsvärdet saknas alltså i detta fall i stället för att bli oändligt stort. Integralen divergerar ändå.



Mer villkorlig konvergens; symmetri

Här kan man kanske fundera lite över hur arean är fördelad. Cosinus är en periodisk funktion som befinner sig lika mycket ovanför x -axeln som under, borde då inte den positiva och negativa arean ta ut varandra och integralen bli noll? Svaret är "mjaa.." Enligt definitionen ovan så är integralen divergent. Inga tveksamheter alls. **Divergent.** Vill vi att svaret ska bli noll (pga av area-argumentet) måste vi definiera begreppet konvergent integral på något annat sätt. Detta kan göras och man pratar då om (ännu mer) *villkorligt* konvergenta integraler. Cauchys principvärde är ett exempel som används på intervall symmetriska kring $x = 0$:

$$\text{p.v. } \int_{-a}^a f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \left(\int_{-a}^{-\epsilon} f(x) dx + \int_{\epsilon}^a f(x) dx \right).$$

Detta gränsvärde kan existera även då integralen inte är konvergent som vi definierat det tidigare. Betrakta exempelvis $f(x) = 1/x$ för $x \neq 0$.

För att ta bort dessa avarter av möjlig konvergens introducerar vi begreppet *absolutkonvergens*.



Absolutkonvergens

Definition. Om $\int_a^b |f(x)| dx < \infty$ kallar vi $\int_a^b f(x) dx$ för *absolutkonvergent*.

Flera saker bör kommenteras angående denna definition. Vi summerar lite viktiga fakta.



- (i) Om $\int_a^b |f(x)| dx < \infty$ så är $\int_a^b f(x) dx$ konvergent.
- (ii) Om $\int_a^b f(x) dx$ är absolutkonvergent gäller $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.
- (iii) Om $f(x) \geq 0$ för $a < x < b$ så existerar alltid gränsvärdena $\lim_{s \rightarrow a^+} \int_s^c f(x) dx$ och $\lim_{t \rightarrow b^-} \int_c^t f(x) dx$ om vi tillåter resultatet ∞ .
- (iv) Speciellt gäller föregående för $|f(x)|$.

Vi överlämnar till boken att bevisa påståendena



Definition. Om $f \geq 0$ och $\int_a^b f(x) dx$ är divergent skriver vi $\int_a^b f(x) dx = \infty$.

Detta betyder **inte** att integralen är konvergent, utan bara ett kortare sätt att ange att integralen av en icke-negativ funktion divergerar. Vi kan inte skriva på detta sätt om inte $f(x) \geq 0$ (tänk till exempel på exemplet med $f(x) = \cos x$ vi såg tidigare).



Exempel

Visa att $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ är konvergent.

Lösning. Tricket är att partialintegrera:

$$\int_1^b x^{-1} \sin x dx = [-x^{-1} \cos x]_1^b - \int_1^b \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Integralen i högerledet är absolutkonvergent eftersom

$$\int_1^b \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| dx \leq \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = 1 - \frac{1}{b} \rightarrow 1$$

då $b \rightarrow \infty$. Alltså är integralen vi startade med konvergent eftersom $\frac{\cos b}{b} - \cos 1 \rightarrow -\cos 1$ då $b \rightarrow \infty$. Man kan också visa att integralen inte är absolutkonvergent (man blir då tvungen att analysera lite noggrannare hur $x^{-1}|\sin x|$ ser ut för $1 < x < \infty$).

Tekniken som används ovan för att konstatera att $\frac{\cos x}{x^2}$ är absolutkonvergent är en mycket användbar jämförelseprincip. Låt oss formulera den mer generellt.



Sats. Om $0 \leq f(x) \leq g(x)$ för $a < x < b$ så gäller $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$. Speciellt gäller att om $\int_a^b g(x) dx$ är konvergent så är även $\int_a^b f(x) dx$ konvergent.



Exempel

Är $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^3} dx$ konvergent?

Lösning. Vi vet från grundkursen att $\ln x \leq x - 1$ för $x > 1$, så $\ln x \leq x$ är också sant för $x > 1$. Således måste

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^3} dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx < \infty$$

eftersom $\int_1^b \frac{1}{x^2} dx = 1 - \frac{1}{b} \rightarrow 1$ då $b \rightarrow \infty$. Vi har nu enligt jämförelsesatsen ovan visat att integralen i fråga är konvergent.



Exempel

Avgör om $\int_0^1 \frac{3\sqrt{x}}{x + 2x^2} dx$ är konvergent.

Lösning. Vi ser att

$$\frac{3\sqrt{x}}{x + 2x^2} = \frac{3}{\sqrt{x} + 2x\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{3}{1 + 2x} \leq \frac{3}{\sqrt{x}}$$

eftersom $1 + 2x \geq 1$. Då vi vet att $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ är konvergent och $\int_0^1 \frac{3}{\sqrt{x}} dx = 3 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ så följer det av föregående sats att $\int_0^1 \frac{3\sqrt{x}}{x + 2x^2} dx$ är konvergent. Ofta skriver vi detta lite mer kompakt (och slarvigt) som

$$\int_0^1 \frac{3\sqrt{x}}{x + 2x^2} dx \leq \int_0^1 \frac{3}{\sqrt{x}} dx < \infty$$

eftersom vi vet att $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx < \infty$.

Vi jämför ofta med uttryck av formen $x^{-\alpha}$, så följande exempel är bra att komma ihåg.



Vanliga jämförelsefunktioner

Följande påståenden gäller:

- (i) $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx < \infty$ om och endast om $\alpha < 1$;
- (ii) $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx < \infty$ om och endast om $\alpha > 1$.

Beviset av påståendena ovan handlar bara om att räkna ut integralerna. Vi ser att om $\alpha \neq 1$:

$$\int_a^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_a^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha} \rightarrow \frac{1}{1-\alpha}$$

då $a \rightarrow 0$ om och endast om $\alpha < 1$. Om $\alpha > 1$ blir den andra termen oändlig. Vad händer då när $\alpha = 1$? Vi undersöker:

$$\int_a^1 \frac{1}{x} dx = [\ln |x|]_a^1 = -\ln a \rightarrow \infty \quad \text{då } a \rightarrow 0^+.$$

Integralen är alltså inte konvergent i detta fall.

Fallen för $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ hanteras på samma sätt. Kortfattat ser vi att

$$\int_1^b \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^b = \frac{b^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} \rightarrow \frac{-1}{1-\alpha}$$

om och endast om $\alpha > 1$. Om $\alpha = 1$ blir det en logaritm analogt med ovan:

$$\int_1^b \frac{1}{x} dx = [\ln |x|]_1^b = \ln b \rightarrow \infty \quad \text{då } b \rightarrow \infty.$$



Exempel

Integralen $\int_1^\infty \frac{3\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}} dx$ är divergent eftersom

$$\int_1^\infty \frac{3\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}} dx = \int_1^\infty \frac{3}{\sqrt{x}(1+2/\sqrt{x})} dx \geq \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \infty.$$

Olikheten följer från att $1 + 2/\sqrt{x} \leq 3$ då $x \geq 1$.

Man kan även nöja sig med att undersöka hur funktionerna beter sig lokalt kring de generaliserade punkterna. Mer precist kan vi göra följande.



Sats. Låt f och g vara kontinuerliga funktioner sådana att $f(x) \geq 0$ och $g(x) \geq 0$, eller $f(x) \leq 0$ och $g(x) \leq 0$, på $]a, b[$. Om $\int_a^b f(x) dx$ och $\int_a^b g(x) dx$ är generaliserade **endast** i $x = b$ och

$$0 < \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty,$$

så är endera båda integralerna konvergenta eller så är båda divergenta.

Det faktum att gränsvärdet existerar (möjligen lika med ∞) följer för att det är icke-negativa funktioner vi arbetar med (eller mer korrekt att funktionerna inte växlar tecken). Att vi kräver att gränsvärdet för kvoten f/g ligger strikt mellan 0 och ∞ innebär att f och g beter sig ungefär likadant när vi närmar oss b . Då förefaller det rimligt att båda integralerna endera konvergerar eller divergerar. Ett noggrannare bevis återfinnes i boken.

På samma sätt kan vi göra om integralerna endast är generaliserade i $x = a$. Om så är fallet och

$$0 < \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$$

så är endera båda integralerna konvergenta eller divergenta.



Exempel

Avgör om $\int_1^\infty (1 - e^{1/x}) \sin \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ är konvergent.

Lösning. Eftersom $x > 0$ vet vi att $e^{1/x} > 1$ så den första faktorn i integranden är negativ medan för stora x kommer $\sin \frac{1}{\sqrt{x}}$ att vara positiv. Vi Maclaurinutvecklar (i variabeln $t = 1/x$ respektive $s = 1/\sqrt{x}$) och ser att

$$\begin{aligned} (1 - e^{1/x}) \sin \frac{1}{\sqrt{x}} &= \left(1 - 1 - \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{x\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x^2\sqrt{x}}\right). \end{aligned}$$

Vi jämför med $-\frac{1}{x^{3/2}}$ som är negativ (men så länge f och g har samma tecken går allt bra i satsen ovan) och ser att

$$\frac{(1 - e^{1/x}) \sin \frac{1}{\sqrt{x}}}{-1/x^{3/2}} = 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow 1, \quad \text{då } x \rightarrow \infty$$

och således konvergerar integralen i fråga om och endast om $\int_1^\infty \frac{-1}{x^{3/2}} dx$ konvergerar. Svaret är alltså konvergent eftersom den sista integralen är känt konvergent (se jämförelsefunktionerna ovan).



Exempel

Avgör om $\int_0^1 \frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{x\sqrt{x}} dx$ är konvergent.

Lösning. Eftersom $x > 0$ vet vi att $\ln(1 + \sqrt{x}) > 0$ så integranden är positiv. Integralen är generaliserad i $x = 0$ så vi Maclaurinutvecklar för att se hur beteendet ser ut:

$$\frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} + O(x)}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Det dominerande beteendet ges alltså av $1/x$ så vi jämför med denna funktion:

$$\frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{x\sqrt{x}} \cdot \frac{x}{1} = 1 + O(\sqrt{x}) \rightarrow 1, \quad \text{då } x \rightarrow 0^+.$$

Således är integralen i fråga konvergent om och endast om $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ är konvergent. Vi vet att denna integral är divergent så $\int_0^1 \frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{x\sqrt{x}} dx$ är divergent.

Ett lite svårare exempel? Här kommer en gammal uppgift-5 från en tenta.



Exempel

Konvergerar integralen $\int_0^\infty \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \arctan x}{x\sqrt{\ln(1+x)}} dx$? Motivera noggrant.

Lösning. Eftersom integralen är generaliserad både i 0 och ∞ så delar vi upp i två delar:

$$\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \arctan x}{x\sqrt{\ln(1+x)}} dx + \int_0^\infty \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \arctan x}{x\sqrt{\ln(1+x)}} dx.$$

Vi börjar med att undersöka integralen på $[0, 1]$. För $x \in]0, 1]$ gäller att

$$\left| \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \arctan x}{x\sqrt{\ln(1+x)}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{\arctan x}{x} \frac{1}{\sqrt{x^{-1} \ln(1+x)}}.$$

Nu vet vi att $x^{-1} \arctan x \rightarrow 1$ och $x^{-1} \ln(1+x) \rightarrow 1$ då $x \rightarrow 0$, så

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x}{x} \frac{1}{\sqrt{x^{-1} \ln(1+x)}} = 1.$$

Låt därför $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ och $f(x) = g(x) \frac{\arctan x}{x} \frac{1}{\sqrt{x^{-1} \ln(1+x)}}$ för $x > 0$. Då är $f, g \geq 0$ för $x > 0$ och både f och g är kontinuerliga för $x > 0$. Vidare visade vi ovan att

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1 \in]0, \infty[\quad \text{då } x \rightarrow 0^+,$$

så enligt jämförelsesatsen på gränsvärdesform följer det att

$$\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \arctan x}{x\sqrt{\ln(1+x)}} dx$$

kommer vara absolutkonvergent eftersom vi vet att $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx < \infty$.

Vi undersöker nu integralen på $[1, \infty[$. Vi skriver

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \arctan x}{x\sqrt{\ln(1+x)}} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)\right) \arctan x}{x\sqrt{\ln(1+x)}} \\ &= \frac{1}{x\sqrt{x}\sqrt{\ln(1+x)}} \left(1 + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)\right) \arctan x \end{aligned}$$

så vi låter $g(x) = \frac{1}{x^{3/2}\sqrt{\ln(1+x)}}$ för $x > 0$. Då gäller att

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left(1 + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)\right) \arctan x \rightarrow \frac{\pi}{2}, \text{ då } x \rightarrow \infty.$$

Eftersom f och g är kontinuerliga och icke-negativa på $]1, \infty[$ samt att gränsvärdet mot ∞ för f/g är $\frac{\pi}{2} \in]0, \infty[$ så följer det från jämförelsesatsen på gränsvärdesform att $\int_1^\infty f(x) dx$ är konvergent om och endast om $\int_1^\infty g(x) dx$ är konvergent. Vi undersöker denna integral:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}\sqrt{\ln(1+x)}} dx \leq \frac{1}{\sqrt{\ln 2}} \int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}} dx$$

eftersom $\ln(1+x) \geq \ln 2$ för $x \geq 1$. Den sista integralen är känd som konvergent ($\alpha = 3/2$ är större än 1).

Svar. Konvergent!

Uppgifter av typen ovan brukar vara tråkig läsning vid rättning. Det är missuppfattningar om vad som är förutsättningar och följder, slarv med att precisera att krav är uppfyllda samt missförstånd om vad jämförelsesatserna egentligen säger. Ett förslag på lösningsgång när det gäller jämförelsesatsen på gränsvärdesform följer.



Förslag på lösningsgång

1. Dela upp integralen så att varje delintegral är generaliserad i högst en punkt. Betrakta sedan en integral i taget.
2. Antag att $\int_a^b f(x) dx$ endast är generaliserad i $x = a$. Identifiera hur integranden beter sig nära $x = a$ (den punkt integralen är generaliserad i). Använd Maclaurinutvecklingar, uppskattningar eller gissningar. Vi ska visa i nästa steg att valet är vettigt.
3. Konstatera att $f(x)$ inte håller på att växla tecken nära $x = a$.
4. Antag att vi tycker $f(x)$ beter sig som $g(x)$ när $x \approx a$. Typiskt här är att vi skriver $f(x) = \frac{f(x)}{g(x)}g(x)$. Vi visar sen att om $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ så **ska** $0 < L < \infty$ gälla (om $f(x)$ är positiv nära $x = a$). Blir $L = 0$ har vi valt $g(x)$ så att $g(x)$ växer betydligt snabbare än $f(x)$. Får vi $L = \infty$ så växer $g(x)$ alldeles för långsamt. Det är alltså **viktigt** att konstatera att $0 < L < \infty$.
5. Avgör konvergens för $I = \int_a^b g(x) dx$. Om integralen blir för komplicerad kanske det finns bättre val för $g(x)$. Konstatera om integralen är konvergent eller divergent.
6. Hänvisa till jämförelsesatsen på gränsvärdesform och dra slutsatsen att $\int_a^b f(x) dx$ är konvergent precis då $\int_a^b g(x) dx$ är konvergent (vilket vi precis undersökte).

TATA42: Föreläsning 5

Serier ("generaliserade summor")

Johan Thim*

10 januari 2017

En funktion $s: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ brukar kallas talföljd, och vi skriver ofta s_n i stället för $s(n)$. Detta innebär alltså att för varje heltal $n \geq 0$ så är s_n något reellt tal. Andra beteckningar finns, till exempel används ofta $s[n]$ för att markera att det handlar om den *diskret* funktion (dvs en talföljd). Det är inget speciellt med $\mathbf{N}$ mer än att vi måste börja någonstans och fortsätta till oändligheten. Vi kan lika gärna tänka oss en talföljd s_n där $n = -4, -3, -2, \dots$. Eller s_n där $n = 0, 2, 4, 6, \dots$ och så vidare.



Exempel

(i) $s_n = 3^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, dvs $s_0 = 1$, $s_1 = 3$, $s_2 = 3^2$ och så vidare.

(ii) $s_n = \frac{1}{2^n}$, $n = 4, 5, 6, \dots$, dvs $s_0 = 1/16$, $s_1 = 1/32$, $s_2 = 1/64$ och så vidare.

Speciellt är vi intresserade av summor av talföljder. Om a_k är en talföljd kan vi låta

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^n a_k,$$

något vi stött på vid många tillfällen tidigare. Exempelvis som geometriska summor. Vi skapar alltså en ny talföljd s_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, från talföljden a_k , $k = 1, 2, 3, \dots$



Exempel

Exempelvis $a_k = 3^{-k}$ ger

$$s_n = \sum_{k=0}^n 3^{-k} = \frac{3^{-(n+1)} - 1}{3^{-1} - 1} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}} \right), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

*johan.thim@liu.se

1 Numeriska serier

Det som är nytt nu är att vi tänker låta $n \rightarrow \infty$. Frågan uppstår då hur vi ska tolka "summan" med oändligt många termer. Låt oss kalla gränsvärdet s så att $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ i de fall då detta gränsvärde existerar, vilket förefaller vara en naturlig definition (jämför med de generaliserade integralerna). I exemplet ovan ser vi att

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}} \right) = \frac{3}{2}.$$



Definition. Om a_k , $k = 0, 1, 2, \dots$ är en talföljd definierar vi *serien* s enligt

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$$

i de fall då detta gränsvärde existerar. Vi kallar $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ för *delsummor* av $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Det kan gå åt skogen på två olika sätt i definition:

- (i) Om gränsvärdet blir någon oändlighet, dvs $s_n \rightarrow \infty$ eller $s_n \rightarrow -\infty$ då $n \rightarrow \infty$.
- (ii) Om gränsvärdet inte ens existerar som någon oändlighet, till exempel $s_n = (-1)^n$.

I det första fallet skriver vi ibland $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$ respektive $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = -\infty$, även om dessa inte är reella tal. Men det ger en smidigare notation (precis som för generaliserade integraler).



Definition. Om en serie existerar som ett **ändligt** reellt tal kallar vi serien för *konvergent*. Annars säger vi att serien är *divergent*.

Vi skriver ibland (formellt) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ även då serien inte existerar. Speciellt i formen av frågan "Är serien konvergent?"



Exempel

Avgör om $\sum_{k=0}^{\infty} (1 + 2k)$ och $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ är konvergenta.

Lösning. Den första serien är divergent eftersom delsummorna är aritmetiska så

$$\sum_{k=0}^n (1+2k) = \frac{(1+2n+1)(n+1)}{2} = (n+1)^2 \rightarrow \infty, \quad \text{då } n \rightarrow \infty.$$

Den andra serien är konvergent eftersom delsummorna är geometriska med $|q| < 1$, ty

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1 - 2^{-(n+1)}}{1 - 2^{-1}} = 2(1 - 2^{-(n+1)}) \rightarrow 2, \quad \text{då } n \rightarrow \infty.$$

Vi har här alltså direkt avgjort konvergensfrågan genom att helt enkelt (försöka) räkna ut serierna.



Divergenstestet

Sats. Om $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \neq 0$ så är $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

Observera att detta villkor för divergens inkluderar fallet när gränsvärdet $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k$ inte existerar.

Bevis. Låt oss skriva a_k lite kreativt enligt

$$a_k = (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}) = s_k - s_{k-1}.$$

Om summan är konvergent så gäller att både $s_k \rightarrow s$ och $s_{k-1} \rightarrow s$ då $k \rightarrow \infty$. Men detta innebär enligt likheten ovan att $a_k = s_k - s_{k-1} \rightarrow s - s = 0$ då $k \rightarrow \infty$. Med andra ord, om serien är konvergent så **måste** $a_k \rightarrow 0$ då $k \rightarrow \infty$. Negationen av detta är påståendet i satsen ovan.



Observera att omvändningen **inte** gäller. Det räcker alltså **inte** att $a_k \rightarrow 0$ för att en serie ska konvergera. Det klassiska motexemplet är den s.k. *harmoniska* serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ som divergerar.



Geometriska serier

Den geometriska serien $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergerar om och endast om $|q| < 1$ och konvergerar då

till $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$

Detta följer från formeln för geometriska summor:

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \rightarrow \frac{1}{1 - q}$$

såvida $|q| < 1$. Om $|q| \geq 1$ ser vi att $a_k = q^k \not\rightarrow 0$ då $k \rightarrow \infty$, så serien är inte konvergent i detta fall.



Vart börjar serien?

Det är inget speciellt med att vi betraktar summor av talföljder a_k där $k = 0, 1, 2, \dots$

Vi kan lika gärna undersöka summor där $k = m, m + 1, m + 2, \dots$, dvs $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$. Alla satser stämmer ändå. Om en summa konvergerar eller inte har bara att göra med hur termerna a_k beter sig för stora k . Om vi börjar med $k = 0$, $k = 12^{30}$ eller $k = -74$ kvittar.

Vi kan även dela upp summor i delar i de fall då dessa delar beter sig bra.



Sats. Om $c \neq 0$ är en konstant gäller att

$$\sum_{k=0}^{\infty} ca_k = c \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Vidare gäller att

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

med undantaget då vi får fallen $-\infty + \infty$ eller $\infty - \infty$, eller att gränsvärden inte existerar ens med oändligheterna tillåtna. Dessa fall måste analyseras noggrannare.

Beviskiss. Beviset följer återigen direkt från att betrakta delsummor. För sådana får vi alltid dela upp och bryta ut konstanter. Vad händer sen när antalet termer går mot oändligheten? Om allt konvergerar är det frid och fröjd.

Som exempel på ett urartat fall kan man betrakta $\sum_{k=1}^{\infty} ((-1)^k + (-1)^{k+1})$. Alla termerna i serien är noll, men slår vi sönder i två delar uppstår två serier som båda divergerar ordentligt.

2 Positiva serier

Om $a_k \geq 0$ för alla k kallar vi serien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ för positiv. Om en sådan serie divergerar går det mot oändligheten och vi skriver som bekant $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$ i det fallet. Om inte detta händer är serien konvergent (och lika med ett tal $s \geq 0$). Med andra ord gäller följande.



Sats. Om $a_k \geq 0$ för alla k så gäller att $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$ om och endast om serien är konvergent.

Positiva serier har många trevliga egenskaper. Bland annat gäller följande:



Sats. Om $0 \leq a_k \leq b_k$ för alla k så är $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k$.

Bevis. Beviset följer av att olikheten gäller för alla delsummor eftersom $0 \leq a_k \leq b_k$.



Exempel

Visa att $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+2^k}$ är konvergent.

Lösning. Eftersom $1+2^k \geq 2^k$ erhåller vi att

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+2^k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$$

eftersom detta är en geometrisk serie. Inte nog med att vi nu vet att serien konvergerar, vi vet också att den konvergerar mot något som inte är större än 2.

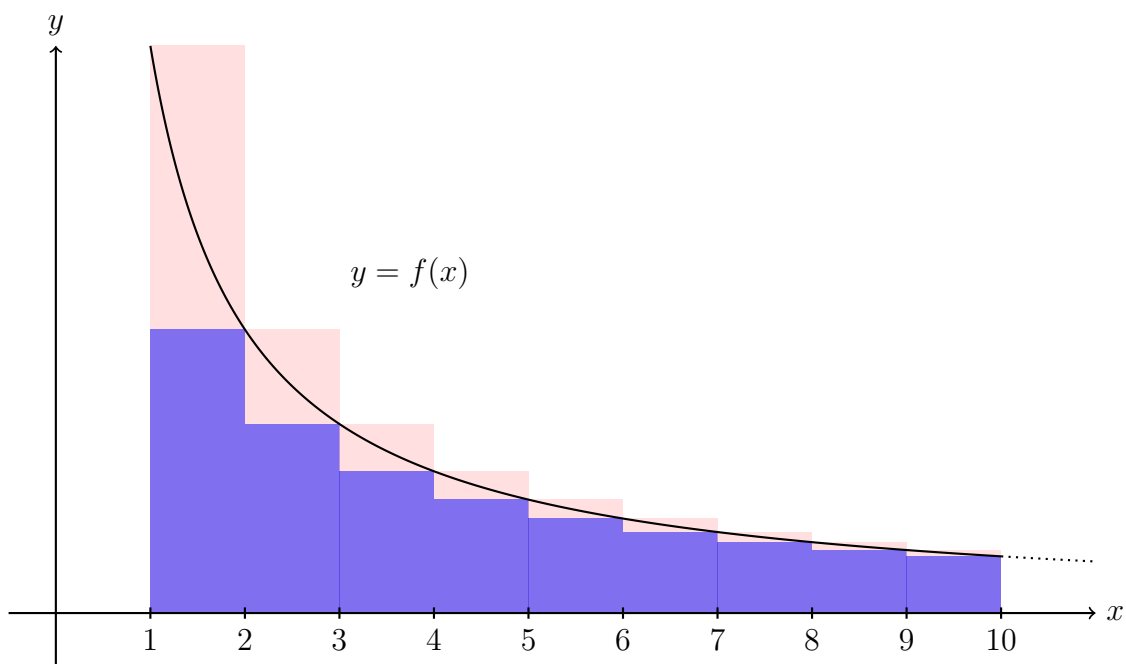


Cauchys integralkriterium

Sats. Om $f(x) \geq 0$ är en avtagande funktion för $x \geq 1$ så gäller att

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{\infty} f(x) dx < \infty.$$

Beviset följer i princip från en enkel skiss. Vi ritar in en avtagande icke-negativ funktion f och markerar en övertrappa (de rosa rektanglarna) och en undertrappa (de blåa rektanglarna) med heltalssteg.



Vi ser då direkt att summan av arean hos de n första rosa rektanglarna blir $\sum_{k=1}^n f(k)$ och

att summan av arean hos de n första blåa rektanglarna blir $\sum_{k=2}^{n+1} f(k)$. Vidare ser vi att arean mellan $y = f(x)$ och x -axeln då $1 \leq x \leq n$ ligger mellan dessa rektangelareor. Således gäller

$$\sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

Vi låter $n \rightarrow \infty$ och satsen följer. Om f är strängt avtagande blir olikheterna strikta (för ändliga n).



Exempel

Visa att $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} < \infty$ om och endast om $\alpha > 1$.

Lösning. Detta följer av Cauchys jämförelseprincip eftersom $\frac{1}{x^{\alpha}}$ är avtagande för $x > 0$ (eftersom $\alpha > 1$) och att vi vet att $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx < \infty$ precis då $\alpha > 1$ (se förra föreläsningen).



Exempel

Visa att $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ för $n = 1, 2, \dots$

Lösning. Eftersom $\frac{1}{x^2}$ är avtagande för $x > 1$ följer det från Cauchys jämförelsesats att

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x^2} dx = 1 + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^n = 2 - \frac{1}{n}.$$

Specifikt vet vi då att $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ är konvergent och konvergerar till något som är ≤ 2 .



Sats. Om $a_k \geq 0$ och $b_k \geq 0$ samt

$$0 < \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} < \infty$$

så gäller att

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty.$$

Med andra ord, om gränsvärdet existerar och ligger strikt mellan 0 och ∞ så konvergerar endera båda serierna eller så divergerar båda två.



Exempel

Avgör om $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(1/k)}{k}$ är konvergent.

Lösning. Om k är stor är $1/k$ liten och $\sin(1/k) = 1/k + O(1/k^3)$. Vi får alltså en "extra" $1/k$ från täljaren och jämför därför med $1/k^2$:

$$\frac{\sin(1/k)/k}{1/k^2} = \frac{1/k^2 + O(1/k^4)}{1/k^2} = 1 + O(1/k^2) \rightarrow 1, \quad \text{då } k \rightarrow \infty.$$

Alltså är serien i fråga konvergent om och endast om $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ är konvergent eftersom termerna är positiva (för stora k är $\sin 1/k > 0$). Den sista serien är välkänd som konvergent (se exemplet ovan) och därmed är den efterfrågade serien också konvergent.

3 Absolutkonvergens



Absolutkonvergens

Definition. Om $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ är konvergent kallar vi $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ för *absolutkonvergent*.

Det följer direkt att en absolutkonvergent serie är konvergent med $\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.



Exempel

Visa att $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos k}{2^k(2 + \sin k)}$ är konvergent och inte är större än 2.

Lösning. Vi visar att serien är absolutkonvergent. Vi har nämligen

$$\left| \frac{\cos k}{2^k(2 + \sin k)} \right| = \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|\cos k|}{2 + \sin k} \leq 2^{-k}$$

eftersom $|\cos k| \leq 1$ och $2 + \sin k \geq 1$. Eftersom $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = \frac{1}{1 - 1/2} = 2$ är serien absolut-

konvergent och $\left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos k}{2^k(2 + \sin k)} \right| \leq 2$.

4 Alternande serier

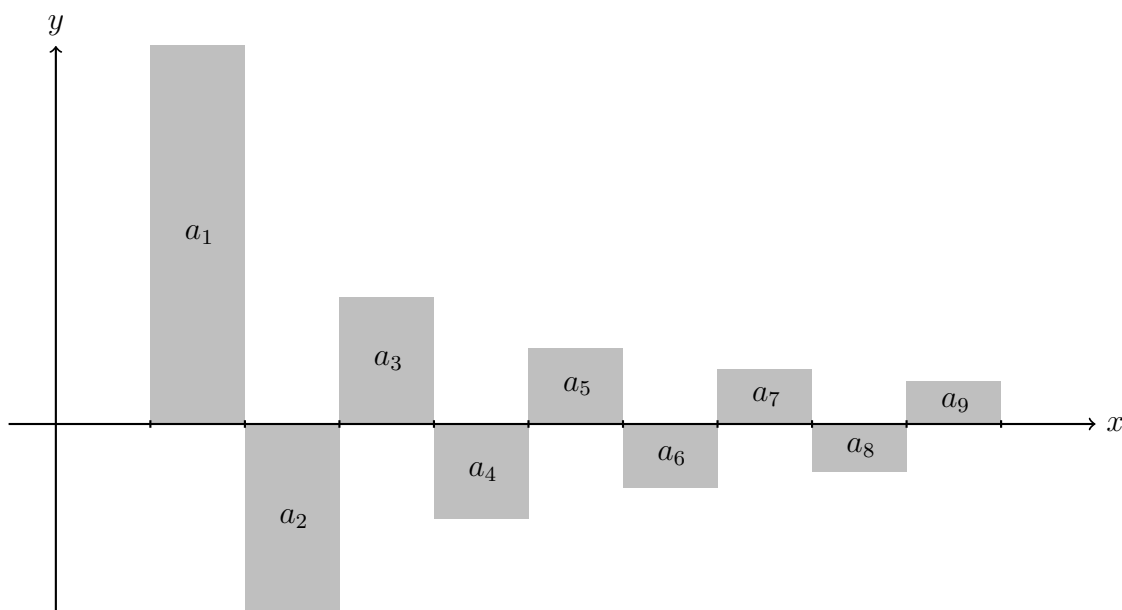
Vi kallar serier där termer växlar tecken, varannan positiv och varannan negativ, för *alternande*. För sådana serier finns, om vi kräver att $|a_k|$ avtar mot noll, ett kraftfullt resultat.



Leibniz sats

Sats. Om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är en alternande serie sådan att $|a_1| \geq |a_2| \geq |a_3| \geq \dots$ är en avtagande följd och $a_k \rightarrow 0$ då $k \rightarrow \infty$ så är serien konvergent.

Bevis. Antag att $a_1 \geq 0$ (annars kan vi lika gärna betrakta minus serien). Kravet att $|a_k|$ är avtagande innebär då att $a_1 + a_2 \geq 0$, $a_3 + a_4 \geq 0$, etc, samt att $a_2 + a_3 \leq 0$, $a_4 + a_5 \leq 0$ och så vidare.



Tanken är nu att betrakta två olika delsummor s_{2n} och s_{2n+1} . Vi ser då att

$$s_{2n} = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2n-1} + a_{2n}) \rightarrow a,$$

där a möjligen är $+\infty$, eftersom alla parenteser är ≥ 0 . Alltså en följd av icke-negativa tal och s_{2n} är växande (gränsvärde finns alltid om vi tillåter ∞). Vidare är

$$s_{2n+1} = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \cdots + (a_{2n} + a_{2n+1}) \rightarrow b,$$

där b möjligen är $-\infty$, eftersom alla parenteser är ≤ 0 . Alltså en följd av icke-positiva tal och s_{2n+1} är avtagande (gränsvärde finns alltid om vi tillåter $-\infty$). Dessutom har vi

$$s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \geq 0,$$

vilket innebär att $b - a \geq 0 \Leftrightarrow b \geq a$. Detta innebär att båda a och b måste vara ändliga. Men vi vet också att $a_k \rightarrow 0$ vilket i sin tur visar att $a = b$. Således konvergerar serien.



Exempel

Visa att serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ är konvergent men inte absolutkonvergent.

Lösning. Med $a_k = (-1)^k/k$ ser vi att $|a_k| = 1/k$ är en avtagande följd och att $a_k \rightarrow 0$. Eftersom serien är alternerande visar nu Leibniz sats att den är konvergent. Mot vad? Bra fråga, faktiskt till $-\ln 2$ (gå tillbaka till Maclaurinavsnittet och studera $\ln(1+x)$ och fundera över hur detta kan komma sig). Däremot är serien inte absolutkonvergent eftersom

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

Detta är som bekant den harmoniska serien.



Det är **tre** krav som gäller för Leibniz kriterium:

- (i) Serien är alternerande så att $a_{k+1} = -a_k$ för alla k som det summeras över.
- (ii) Seriens termer går mot noll: $a_k \rightarrow 0$.
- (iii) Absolutbeloppet av seriens termer avtar monotont: $|a_k| \geq |a_{k+1}| \geq |a_{k+2}| \geq \dots$

Ibland summeras de två sista villkoren som att $|a_k|$ avtar monotont mot noll. Det sista villkoret är viktigt och måste visas! Följande serie ger ett motexempel.



Exempel

Visa att $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ är divergent om $a_k = \frac{1}{k^2}$ då k är udda och $a_k = \frac{1}{k}$ då k är jämt.

Lösning. Vi ser att serien är alternerande och att termerna går mot noll $|a_k| \rightarrow 0$ då $k \rightarrow \infty$. Det är alltså lockande att hugga till med Leibniz kriterium, men på grund av hur a_k ser ut så kommer inte $|a_k|$ vara monotont avtagande. Därmed kan vi **inte** använda Leibniz kriterium. Om vi undersöker serien direkt ser vi följande:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6} - \dots$$

De positiva termerna bildar alltså en del av en harmonisk serie (och är divergent exempelvis enligt Cauchys intergralkriterium med $f(x) = \frac{1}{2x}$) medan de negativa konvergerar eftersom serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$. Det finns alltså inget hopp för serien som helhet, utan den är divergent. Det är alltså inte "petigt" när det inte ges poäng på tentan när inte *alla* förutsättningarna för Leibniz kriterium redovisas! Även om serien skulle visa sig vara konvergent i slutändan.



Exempel

Visa att $\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ *inte* är absolutkonvergent.

Lösning. Vi kan visa detta genom att skriva integralen som en serie av delintegraler och uppskatta på varje del. Hur då? Vi kan skriva

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{|\sin x|}{|x|} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x| dx = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty,$$

eftersom $\int_0^{\pi} |\sin x| dx = 2$ (blir samma för varje intervall $[k\pi, (k+1)\pi]$).

TATA42: Föreläsning 6

Potensserier

Johan Thim*

10 januari 2017

Vi ska nu betrakta serier där termerna inte längre är konstanter. Speciellt ska vi studera så kallade potensserier. Dessa definieras som

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

för de x där detta uttryck har mening (dvs serien konvergerar). Värt att notera är att dessa typer av serier beskriver funktioner (för de x där serien är konvergent). Om endast ett ändligt antal a_k är skilda från noll är det bara ett polynom, men om oändligt många a_k inte är noll får vi i någon mening ett polynom med oändligt många termer. Vilka slags funktioner kan beskrivas på det sättet? Väldigt många ska det visa sig.

1 Konvergens av potensserier

Vi kan så klart använda alla tekniker som togs fram för numeriska serier på förra föreläsningen, men vi kommer att använda följande två kriterier flitigt.



Rot- och kvotkriteriet

Sats. Om $Q = \lim_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{1/k}$ eller $Q = \lim_{k \rightarrow \infty} |a_{k+1}/a_k|$ existerar så är $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolutkonvergent om $Q < 1$ och divergent om $Q > 1$.

Dessa kriterier (att de två gränsvärdena som ger Q existerar) brukar kallas *rot-* respektive *kvotkriteriet*. Man kan visa att rotkriteriet är starkare, dvs att om detta är sant så gäller även kvotkriteriet. Däremot så kan kvotkriteriet ibland vara enklare att kontrollera. Beviset för rotkriteriet bygger på att man utnyttjar att $Q < 1$ för att uppskatta serien med en geometrisk serie med kvoten q , där $Q < q < 1$.

Dessa konvergenstester kan så klart användas på vilka serier som helst, men det finns konvergenta serier vi inte kan konstatera är konvergenta med varken rot- eller kvotkriterier.

*johan.thim@liu.se



Serien^a $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5 + (-1)^k}{2} \right)^{-k}$ är konvergent men rotkriteriet är inte uppfyllt. Vi kan se detta genom att skriva ut hur termerna ser ut:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^6} + \dots$$

vilket är summan av två geometriska serier som konvergerar. Däremot ser vi att

$$|a_k|^{1/k} = \frac{2}{5 + (-1)^k}$$

hela tiden hoppar mellan $\frac{1}{2}$ och $\frac{1}{3}$ så gränsvärdet saknas till och med.

Övning: visa att serien $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{(-1)^k - k}$ konvergerar enligt rotkriteriet men att vi inte kan dra någon slutsats från kvotkriteriet.

^aG.R. Gelbaum and J.M.H. Olmsted, *Counterexamples in analysis*, Dover 1992

Intressant nog så betar sig potensserier alltid förhållandevis snällt. Till exempel gäller alltid följande.



Konvergensradie

Sats. Varje potensserie $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ har en maximal *konvergensradie* R så att serien är absolutkonvergent då $|x| < R$ och divergent då $|x| > R$.

Notera att fallet då $x = \pm R$ ej nämns. Detta fall måste specialbehandlas från situation till situation. Vidare är det så klart så att om rotkriteriet inte ger något Q krävs en noggrannare analys av termerna.

Bevis. Ett ordentligt bevis återfinnes i boken, men tanken är ganska logisk. Om vi antar att $Q = \lim_{k \rightarrow \infty} |c_k|^{1/k}$ existerar så är $\lim_{k \rightarrow \infty} |c_n x^n|^{1/n} = Q|x|$. Enligt rotkriteriet ovan är serien (absolut)konvergent om $Q|x| < 1$, dvs då $|x| < 1/Q$ (såvida inte $Q = 0$ men då behövs inget krav på x) och divergent då $|x| > 1/Q$. Vårt R är alltså $R = 1/Q$ då $Q \neq 0$ och $R = \infty$ då $Q = 0$.



Exempel

För vilka x konvergerar $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} x^k$?

Lösning. Rotkriteriet:

$$\left| \frac{x^k}{k^2} \right|^{1/k} = \frac{|x|}{k^{2/k}} = |x| \exp\left(-\frac{2 \ln k}{k}\right) \rightarrow |x|$$

då $k \rightarrow \infty$ eftersom $(\ln k)/k \rightarrow 0$. Med andra ger $|x| < 1$ konvergens enligt rotkriteriet och $|x| > 1$ divergens. Vi undersöker $x = \pm 1$ speciellt och ser att både

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{och} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

är konvergenta (absolutkonvergenta till och med). Svaret blir alltså $-1 \leq x \leq 1$.



Exempel

Bestäm konvergensraden för följande potensserier och avgör om serierna konvergerar då $x = \pm R$. Ange det område serien konvergerar i.

$$\begin{array}{llll} \text{(i)} \sum_{k=1}^{\infty} kx^{2k} & \text{(ii)} \sum_{k=2}^{\infty} (\ln k)^{-1} x^k & \text{(iii)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k!} & \text{(iv)} \sum_{k=0}^{\infty} 3^k x^k \\ \text{(v)} \sum_{k=0}^{\infty} 3^k x^{3k} & \text{(vi)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k x^k}{2^k \sqrt{k}} & \text{(vii)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+1)^k}{k 2^k} & \text{(viii)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{x^{2k}} \end{array}$$

Lösning. Vi tar en i taget.

(i) Enligt kvotkriteriet konvergerar serien åtminstone då

$$1 > Q = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)|x|^{2k+2}}{k|x|^{2k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) |x|^2 = |x|^2$$

så $|x| < 1$. Konvergensraden är alltså $R = 1$. När $x = 1$ ges serien av

$$\sum_{k=1}^{\infty} k 1^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} k = \infty$$

och när $x = -1$ ges serien av $\sum_{k=1}^{\infty} k(-1)^k$ som divergerar enligt divergenstestet då termerna inte går mot noll. Konvergensområdet är $-1 < x < 1$.

(ii) Vi använder kvotkriteriet igen och ser att

$$\frac{|\ln(k+1)|^{-1} |x|^{k+1}}{|(\ln k)^{-1}| |x|^k} = \frac{|x|^{k+1}}{\ln(k+1)} \cdot \frac{\ln k}{|x|^k} = \frac{\ln k}{\ln\left(k\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right)} |x| = \frac{\ln k}{\left(1 + \frac{\ln(1+1/k)}{\ln k}\right) \ln k} |x| \rightarrow |x|,$$

då $k \rightarrow \infty$. Konvergensraden blir således $R = 1$. När $x = 1$ får vi

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1^k}{\ln k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k} \geq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

eftersom $\ln k \leq k$ och $\sum_{k=2}^{\infty} 1/k = \infty$. När $x = -1$ ges summan av $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln k}$ vilken är konvergent enligt Leibniz konvergenstest (visa det!). Konvergensområdet blir således $-1 \leq x < 1$.

(iii) Vi använder kvotkriteriet igen (ofta lämpligt när $k!$ är inblandat):

$$\frac{2^{k+1}|x|^{k+1}/(k+1)!}{2^k|x|^k/k!} = \frac{2^{k+1}|x|^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{2^k|x|^k} = \frac{2|x|}{k+1} \rightarrow 0,$$

då $k \rightarrow \infty$. Här är alltså $R = \infty$ och någon undersökning av $x = \pm R$ är inte aktuell. Konvergensområdet är $-\infty < x < \infty$.

(iv) Här är rotkriteriet lämpligt och $(3^k|x|^k)^{1/k} = 3|x|$ så $3|x| < 1$ ger absolutkonvergens. Alltså är $R = 1/3$. När $x = \pm 1/3$ erhåller vi $\sum_{k=1}^{\infty} 3^k(\pm 3)^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} (\pm 1)^k$ som divergerar i båda fallen. Konvergensområdet är $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$.

(v) Här är rotkriteriet lämpligt och $(3^k|x|^{3k})^{1/k} = 3|x|^3$ så $3|x|^3 < 1$ ger absolutkonvergens. Alltså är $R = 1/\sqrt[3]{3}$. När $x = \pm 1/\sqrt[3]{3}$ erhåller vi $\sum_{k=1}^{\infty} 3^k(\pm \sqrt[3]{3})^{-3k} = \sum_{k=1}^{\infty} 3^k 3^{-k} (\pm 1)^k$ som divergerar i båda fallen. Konvergensområdet är $-\frac{1}{\sqrt[3]{3}} < x < \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

(vi) Vi har

$$\left(\frac{k^k|x|^k}{2^k\sqrt{k}} \right)^{1/k} = \frac{k|x|}{2k^{1/2k}} \rightarrow \infty$$

då $k \rightarrow \infty$ eftersom $k^{1/2k} \rightarrow 1$ då $k \rightarrow \infty$. Alltså är $R = 0$. Koefficienterna växer alltså för snabbt för att vi ska få något vettigt. Konvergensområdet är $x = 0$.

(vii) Vi använder kvotkriteriet och ser att

$$\left| \frac{(x+1)^{k+1}}{(k+1)2^{k+1}} \cdot \frac{k2^k}{(x+1)^k} \right| = \frac{|x+1|}{2} \cdot \frac{1}{1+1/k} \rightarrow \frac{|x+1|}{2}$$

då $k \rightarrow \infty$. Serien är alltså absolutkonvergent då $|x+1| < 2$ eller ekvivalent, då $-3 < x < 1$. Vi undersöker nu speciellt $x = -3$ och $x = 1$. Först $x = -3$ där

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^k}{k2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

är konvergent enligt Leibniz kriterie ($1/k$ är strängt avtagande mot noll). När $x = 1$ är serien divergent eftersom detta blir den harmoniska serien. Konvergensområdet blir $-3 \leq x < 1$.

(viii) Den här är lite annorlunda eftersom vi har negativa exponenter av x . Detta kommer att innebära att vi får konvergens **utanför** en konvergensradie i stället. Vi undersöker med rotkriteriet:

$$\left| \frac{2^k}{x^{2k}} \right|^{1/k} = \frac{2}{|x|^2}$$

för alla k . Kravet blir alltså att $2/|x|^2 < 1$ vilket är ekvivalent med att säga $|x|^2 > 2$ eller att $|x| > \sqrt{2}$. När $x = \pm\sqrt{2}$ blir serien divergent i båda fallen (termerna blir identiskt lika med ett). Konvergensområdet blir $x > \sqrt{2}$ och $x < -\sqrt{2}$.

2 Termvis derivering och integrering

Det vi ger oss in på nu är inte helt enkelt egentligen utan kräver begrepp som *likformig* konvergens. Men som tur är beter sig potensserier så snällt att dessa operationer fungerar utan problem när $|x|$ är mindre än konvergensradien.



Sats. Låt $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ ha konvergensradien $R > 0$. Då gäller att f kan deriveras kontinuerligt oändligt många gånger på $] - R, R[$ och att

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} \quad \text{samnt} \quad \int_0^x f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1},$$

där dessa potensserier har samma konvergensradie R .

Det faktum att vi kan derivera hur många gånger som helst leder till intressanta följder kopplat till Maclaurinutvecklingar. Vi återkommer kort till detta snart.



Termer "försvinner" vid derivering

Observera att summan justeras vid derivering av en potensserie då c_0 -termen försvinner. Deriverar man två gånger försvinner både c_0 - och c_1 -termerna, så

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2}.$$

Annars skulle det trilla ut negativa exponenter på x vid derivering vilket är omöjligt. Man kan dock även betrakta serier som har negativa exponenter (så kallade *Laurant-serier*), men sådana termer kan aldrig dyka upp från en potensserie som vi definierat tidigare. Vi kommer ofta indexera om serier som den ovan, i.e.,

$$f''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2}x^k,$$

vilket underlättar när vi vill jämföra serier.



Exempel

Räkna ut serierna $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ och $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k2^k}$.

Lösning. Serierna är båda två konvergenta (absolutkonvergenta till och med) eftersom termerna avtar tillräckligt snabbt. Vi betraktar nu "hjälpserierna" $\sum_{k=0}^{\infty} kx^k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}x^k$. Båda dessa serier har konvergensradie $R = 1$ (visa det). Dessutom, eftersom

$$kx^k = xkx^{k-1} = x \frac{d}{dx} x^k$$

så följer det att

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = x \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} x^k = x \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

eftersom det blir derivatan av en geometrisk serie med kvoten x . Således kan vi (med $x = 1/2$) räkna ut att

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k} = \frac{1/2}{(1-1/2)^2} = 2.$$

På liknande sätt ser vi att

$$\frac{1}{k}x^k = \int_0^x t^{k-1} dt, \quad k = 1, 2, \dots,$$

och därmed att

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}x^k &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x t^{k-1} dt = \int_0^x \left(\sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1} \right) dt = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} t^k \right) dt \\ &= \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-x). \end{aligned}$$

Detta kan vi använda för att beräkna den andra serien (med $x = 1/2$):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k2^k} = -\ln(1-1/2) = \ln 2.$$

3 Feluppskattning

Om man bara tar med ett ändligt antal termer i potensserien, kan man säga något om hur bra approximation detta ger?



Exempel

Bestäm n så att $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} < 10^{-4}$ för $|x| < \frac{1}{2}$.

Lösning. Enklast är att observera att $k! \geq (n+1)!$ för $k \geq n+1$ och därför skriva

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right| < \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=n+1}^{\infty} |x|^k = \frac{1}{(n+1)!} |x|^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} |x|^k = \frac{1}{(n+1)!} \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

Vi ser att med $n = 5$ blir nämnaren $6! \cdot 2^5 = 720 \cdot 32 > 21000$, så hela serien blir $< 10^{-4}$.



Exempel

Beräkna $\ln 2$ som ett rationellt tal med ett fel på högst 10^{-4} .

Lösning. Vi kan så klart gå tillbaka till Maclaurinutvecklingar, men vi kan även använda serien vi tog fram i förra exemplet. Där visade vi att $\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k 2^k}$. Då är alltså

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k 2^k} + \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k 2^k}.$$

Vi uppskattar den sista termen och ser hur stort N måste vara för att vi säkert ska få denna del av serien $< 10^{-4}$. Alltså,

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k 2^k} \geq \frac{1}{N} \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{N} 2^{-N} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = \frac{2^{-N}}{N} \frac{1}{1-2^{-1}} = \frac{2^{1-N}}{N}.$$

Enklast är nu att testa värden på N och se att om $N = 16$ så räcker det eftersom

$$2^{-15} = \frac{1}{1024 \cdot 32} \leq \frac{1}{10^4}.$$

Närmevärdet ges alltså av $\sum_{k=1}^{14} \frac{1}{k 2^k}$ (vilket är ett rationellt tal).

3.1 Alternerande serier

När det gäller alternerande serier av Leibniz-typ (så att $|a_k|$ är avtagande) så kan vi göra en smartare uppskattning av felet. Om $a_{n+1} > 0$ (liknande resultat gäller om $a_{n+1} < 0$) har vi

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots = a_{n+1} + (a_{n+2} + a_{n+3}) + (a_{n+4} + a_{n+5}) + \dots,$$

där varje parentes är ≤ 0 eftersom $|a_k|$ är avtagande (och serien är alternerande). Detta medför alltså att

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| \leq a_{n+1}$$

om $a_{n+1} > 0$.



Exempel

Visa att $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln k}$ konvergerar och hitta ett n så att $\sum_{k=3}^n \frac{(-1)^k}{\ln k}$ approximerar serien med ett fel på högst 10^{-4} .

Lösning. Serien är alternerande och $\left| \frac{(-1)^k}{\ln k} \right| = \frac{1}{\ln k}$ är strängt avtagande mot noll så serien är konvergent enligt Leibniz sats. Dessutom gäller att

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln k} \right| \leq \frac{1}{\ln(n+1)},$$

så om felet ska vara $< 10^{-4}$ krävs att

$$\ln(n+1) > 10^4 \quad \Leftrightarrow \quad n > \exp(10^4) - 1 \approx 10^{4342}.$$

Ganska många termer alltså. Är det förvånande?



Exempel

Upprepa samma procedur som i förra exemplet för $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{e^k}$

Lösning. Man kan använda Leibniz sats, men serien är absolutkonvergent (varför?) så det är inte nödvändigt. Däremot bör vi använda det när det gäller felet. Vi har

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{e^k} \right| \leq \frac{1}{e^{n+1}},$$

så om felet ska vara $< 10^{-4}$ krävs att

$$\exp(n+1) > 10^4 \quad \Leftrightarrow \quad n > \ln(10^4) - 1 = 4 \ln 10 - 1 \approx 8.21.$$

Betydligt färre! Vad händer om vi uppskattar som geometrisk serie i stället? Vi undersöker:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{e^k} \right| \leq \frac{1}{e^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{e^k} = e^{-(n+1)} \frac{1}{1 - e^{-1}},$$

så det blir inte så jättestor skillnad när termerna går mot noll snabbt.

TATA42: Föreläsning 7

Differentialekvationer av första ordningen och integralekvationer

Johan Thim*

10 januari 2017

1 Introduktion

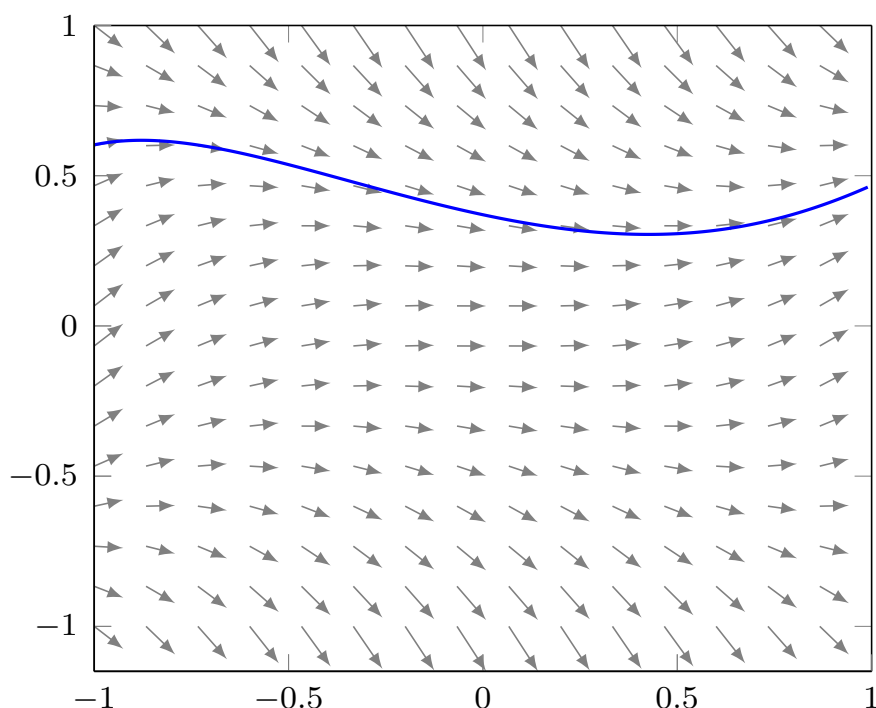
En differentialekvation (DE) i en variabel är en ekvation som innehåller både variabeln (ofta x), en okänd funktion $y(x)$ samt derivatorer av $y(x)$ som $y'(x)$, $y''(x)$ och så vidare. Man skriver ofta $F(x, y, y', y'', \dots) = 0$ där F är någon funktion av flera variabler. Med en lösning till en DE menar vi en funktion y , definierad på något intervall $]a, b[$ (möjligen $a = -\infty$ och $b = \infty$) där y uppfyller $F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots) = 0$ för $x \in]a, b[$. Med andra ord uppfyller alltså funktionen y DE:n i varje punkt $x \in]a, b[$. Vi börjar med att betrakta fallet med första ordningens differentialekvationer (DE). Ordningen på en DE definieras som den högsta derivatan den innehåller, så en DE av första ordningen innehåller alltså bara y och y' (förutom variabeln x). Ett väldigt enkelt exempel är till exempel

$$y'(x) = \cos x \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = C + \sin x,$$

där $C \in \mathbf{R}$ är en godtycklig konstant. Här kunde vi direkt integrera båda sidor i ekvationen. Om DE:n däremot även innehåller y -termer och kanske krångligare varianter av y' så är det inte säkert att vi kan lösa problemet.

Om en DE kan skrivas på formen $y' = F(x, y)$ (att det går att lösa ut y' och isolera på en sida i en ekvation) kan man dock rita upp vad som kallas för ett riktningsfält för DE:n. Ekvationen ger för varje (x, y) i planet vad y' måste vara. Detta ger information om funktionen y växer eller avtar. Vi ritar upp ett exempel för DE:n $y' = x^2 - 2y^2$:

*johan.thim@liu.se



Pilarna i riktningsfältet visar hur lösningskurvor går (kurvor $y(x)$ alltså). Den heldragna kurvan är en av alla lösningar $y(x)$ som finns till ekvationen $y' = x^2 - 2y^2$.

2 Linjära DE av första ordningen



Definition. Om $y' + f(x)y = g(x)$ kallar vi DE:n för en linjär DE av första ordningen.

Dessa ekvationer kan lösas med hjälp av en så kallad *integrerande faktor*. Vi finner en sådan genom att välja en primitiv funktion F till f (dvs en funktion F så att $F' = f$) och sedan bilda $e^{F(x)}$ som är den integrerande faktorn. Namnet kommer från följande egenskap. Vi multiplicerar DE:n med $e^{F(x)}$ och utnyttjar sedan produktregeln för derivering:

$$\begin{aligned}
 y'(x) + f(x)y(x) &= g(x) &\Leftrightarrow & e^{F(x)}y'(x) + f(x)e^{F(x)}y(x) = g(x)e^{F(x)} \\
 &&\Leftrightarrow & (e^{F(x)}y(x))' = g(x)e^{F(x)} \\
 &&\Leftrightarrow & e^{F(x)}y(x) = C + \int g(x)e^{F(x)} dx \\
 &&\Leftrightarrow & y(x) = Ce^{-F(x)} + e^{-F(x)} \int g(x)e^{F(x)} dx.
 \end{aligned}$$

Vi ser här att om $g(x) = 0$ fås specialfallet $y(x) = Ce^{-F(x)}$ och om $f(x) = 0$ fås specialfallet $y(x) = C + \int g(x) dx$.

Här har vi dessutom visat entydighet för lösningar. Om ett villkor av typen $y(a) = \alpha$ för något a och α är givet finns bara ett värde på konstanten C som gör att $y(x)$ uppfyller detta. Vad vi gör här är alltså att vi bestämmer en punkt i planet som lösningskurvan ska

gå genom; jämför med riktningsfältet ovan (även om den ekvationen **inte** är linjär). Genom varje punkt går det precis en lösning och olika lösningar korsar aldrig varandra. Den här typen av entydighet har man inte alltid om ekvationen inte är linjär.



Exempel

Lös ekvationen $y' + 3y = 2$.

Lösning. En av de enklare typerna av ekvationer vi kan få. En integrerande faktor fås som e^{3x} eftersom $(3x)' = 3$ är faktorn före y . Alltså,

$$\begin{aligned} y' + 3y = 2 &\Leftrightarrow e^{3x}y' + 3e^{3x}y = 2e^{3x} \Leftrightarrow (ye^{3x})' = 2e^{3x} \\ &\Leftrightarrow ye^{3x} = C + \int 2e^{3x} dx = C + \frac{2}{3}e^{3x} \\ &\Leftrightarrow y(x) = Ce^{-3x} + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Observera här att Ce^{-3x} löser den homogena ekvationen $y' + 3y = 0$ för alla C . Konstanten $\frac{2}{3}$ brukar kallas för en *partikulärlösning* till $y' + 3y = 2$. Idén att konstruera den allmänna lösningen till $y' + 3y = 2$ genom lösningar till den homogena ekvationen och en partikulärlösning är ett exempel på *superpositionsprincipen* som finns för linjära ekvationer. Denna teknik återkommer vi till.



När dyker konstanten C upp?

Konstanten dyker upp i samband med att vi tar bort derivatan (eftersom man tappar konstanten när man deriverar). Alternativt kan man se det som att konstanten hör ihop med den obestämda integralen (den primitiva funktionen). Båda alternativen går bra, men se till att konstanten dyker upp innan du gör någon drastiskt med ekvationen som att förkorta bort saker eller multiplicera ekvationen med något (som till exempel e^{-3x} ovan).



Exempel

Finn alla lösningar till $y' = xy + x^3$ och bestäm speciellt de tre lösningar som uppfyller $y(0) = 0$, $y(0) = -1$ och $y(-1) = -1$.

Lösning. Vi söker en integrerande faktor och finner den som $e^{-x^2/2}$ eftersom $-x^2/2$ är en primitiv funktion till $-x$ (faktorn före y om allt som har med y att göra flyttas till vänsterledet). Vi testar:

$$(e^{-x^2/2}y)' = -xe^{-x^2/2}y + e^{-x^2/2}y' = e^{-x^2/2}(y' - xy).$$

Detta är alltså ok. Då erhåller vi

$$y' = xy + x^3 \Leftrightarrow (e^{-x^2/2}y)' = x^3e^{-x^2/2} \Leftrightarrow y = Ce^{x^2/2} + e^{x^2/2} \int x^3e^{-x^2/2} dx.$$

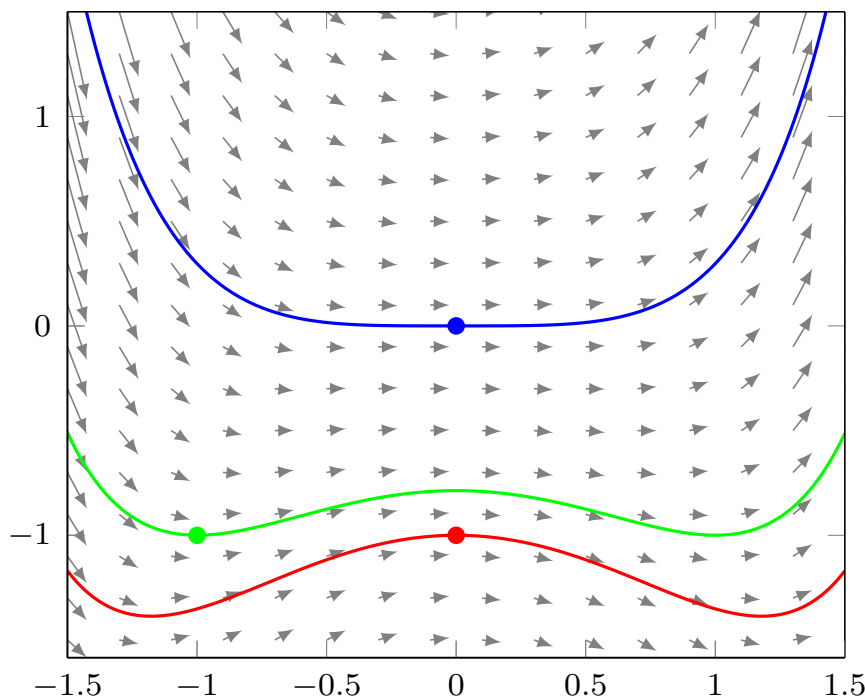
Vi räknar ut integralen med PI:

$$\begin{aligned}\int x^3 e^{-x^2/2} dx &= \int x^2 \left(x e^{-x^2/2} \right) dx \\ &= -x^2 e^{-x^2/2} + 2 \int x e^{-x^2/2} dx \\ &= -x^2 e^{-x^2/2} - 2e^{-x^2/2} = -(2 + x^2)e^{-x^2/2}\end{aligned}$$

Derivera och testa! Vi har nu alltså

$$y(x) = C e^{x^2/2} - 2 - x^2, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Vi söker speciellt y så att $y(0) = 0$. Då måste $y(0) = C - 2 = 0$, så $C = 2$. Kurvan som definieras med detta val av C går alltså genom origo. För $y(0) = -1$ måste $y(0) = C - 2 = -1$, så $C = 1$ och för att få $y(-1) = -1$ måste $C = 2e^{-1/2}$. Vi skissar ett riktningsfält och ritar in våra lösningar i detta.



De markerade punkterna är de punkter vi valt att "förankra" lösningarna i (till exempel så gäller att $y(0) = -1$ motsvarar punkten $(0, -1)$).

3 Separabla DE



Definition. Om DE:n är av formen $g(y(x))y'(x) = h(x)$ kallas den för separabel.

En separabel DE löser vi genom att "separera variablerna." Minnesregeln är att vi slår sönder $y' = \frac{dy}{dx}$ och multiplicerar upp dx på andra sidan. Mer formellt utför vi följande manöver. Låt $G' = g$ och $H' = h$ (dvs hitta primitiva funktioner till g och h). Då är

$$(G(y) - H(x))' = G'(y)y' - H'(x) = g(y)y' - h(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad G(y) - H(x) = C,$$

där C är godtycklig konstant. Vi har alltså hittat ett samband för y som inte innehåller någon derivata: $G(y(x)) = C + H(x)$. Vad som återstår är att lösa ut y ur denna ekvation, vilket kan vara ganska svårt om G är något som inte är väldigt enkelt (och inverterbart). Vi har här inte heller någon entydighet som är uppenbar (beror på G och H) utan får reda ut sådant från fall till fall. Det finns krav man kan ställa på ingående funktioner för att få det men det ligger utanför ramen på denna kurs.

Minnesregel (ej klart definierat i nuläget som det står så ekvivalenser utläses approximativt):

$$g(y)\frac{dy}{dx} = h(x) \quad " \Leftrightarrow " \quad g(y)dy = h(x)dx \quad " \Leftrightarrow " \quad \int g(y) dy = \int h(x) dx.$$



Exempel

Finn en lösning till $x^2y' = y + 1$ så att $y(-1) = -1$ och en lösning så att $y(2) = 0$.

Lösning. Vi vill dela med högerledet och måste då kräva att $y + 1 \neq 0$. Om det är sant och $x \neq 0$ har vi

$$\frac{y'}{y+1} = \frac{1}{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{y+1} dy = \int \frac{1}{x^2} dx \quad \Leftrightarrow \quad \ln|y+1| = C - \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad |y+1| = De^{-1/x},$$

där $D = e^C$ är en godtycklig positiv konstant. Men för att ta bort beloppet återuppstår möjligheten att ha både positiva och negativa konstanter. Däremot kan inte $D = 0$. Vi har alltså lösningar

$$y(x) = -1 + De^{-\frac{1}{x}}, \quad x \neq 0, \quad D \in \mathbf{R}, \quad D \neq 0.$$

Intressant faktum här är att vi inte kan definiera dessa lösningar kontinuerligt förbi origo. Endera har vi $x < 0$ eller $x > 0$. Vad gäller fallet då $y = -1$ då? Vi testar och ser att detta löser ekvationen så även $y(x) = -1$ är en lösning. Denna lösning är definierad även för $x = 0$. Så vi kan tillåta $D = 0$ ovan och i fallet då $D = 0$ går det även att ta bort kravet på att $x \neq 0$.

Om vi vill att $y(2) = 0$ måste vi välja $y(x) = -1 + D \exp(-1/x)$ där $D \neq 0$, och $y(2) = -1 + De^{-1/2}$ medför att $D = e^{1/2}$. Svaret är alltså

$$y(x) = -1 + \exp\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right), \quad x > 0.$$

Kravet att $x > 0$ är viktigt. Vi väljer alltså den lösning vars "definitionsområde" innehåller punkten vi har ett villkor i (i detta fall var det $x = 2$).



Divisioner med noll

Vid varje division som utförs måste man vara mycket noggrann med att skriva ut villkor som måste gälla. I föregående exempel kräver vi att $y \neq -1$ vilket sedan visar sig vara en möjlig lösning. Divisionen med x gör också att ingen av våra lösningars definitionsmängder kan innehålla $x = 0$ (förutom andra undantagsfall som $y = -1$). Var **mycket** noggran med detta!



Exempel

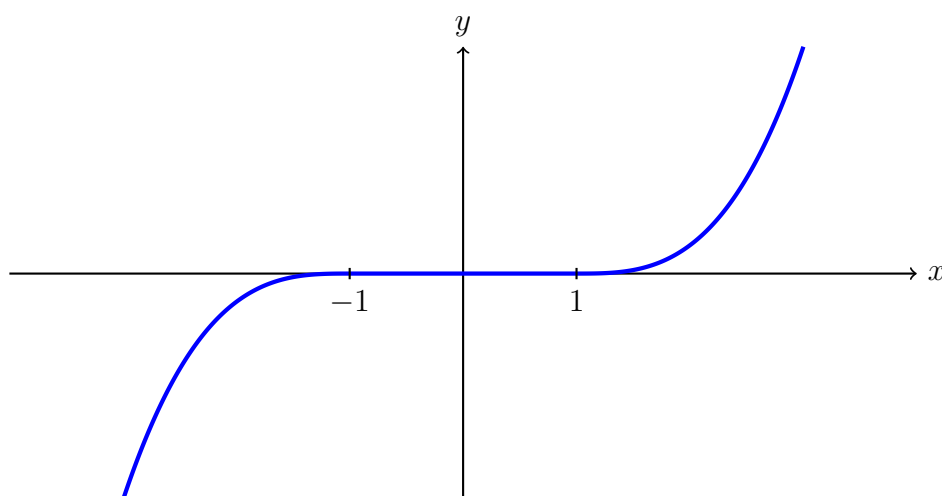
Hitta en lösning till $y' = y^{2/3}$ för $y \in \mathbb{R}$.

Lösning. Vi vill dela med $y^{2/3}$ för att få allt y -beroende på ena sidan. Vi måste då kräva att $y \neq 0$. Om det är sant så gäller

$$y' = y^{2/3} \Leftrightarrow \int y^{-2/3} dy = \int dx = C + x \Leftrightarrow \frac{y^{1/3}}{1/3} = C + x \Leftrightarrow y = \frac{1}{27}(C + x)^3.$$

Vi observerar nu att detta y löser ekvationen för alla x (testa detta). Vad händer om $y = 0$? Jo, det fungerar också eftersom $y' = 0$ då. Vi har alltså inte en entydig lösning så vi vet inte om vi funnit samtliga. Dessutom kan man göra roliga saker som att "skarva" ihop lösningar.

Vi kan till exempel välja $y(x) = \frac{(1+x)^3}{27}$ för $x < -1$, $y(x) = 0$ för $-1 \leq x \leq 1$ och $y(x) = \frac{(-1+x)^3}{27}$ för $x > 1$ som i följande figur. Man kan ganska enkelt visa att denna skarvning ger en funktion som är åtminstone kontinuerligt deriverar och löser differentialekvationen i fråga.



Detta innebär också att det kan finnas hur många olika lösningar som helst som går genom samma punkt i planet. Vi kan alltid skarva ihop lite annorlunda och få en ny lösning genom origo till exempel; där lösningskurvor tangerar varandra kan vi alltså "hoppa" från en lösning till en annan.

4 Linjära komplexa DE av första ordningen med konstanta koefficienter

För detta ändamål ska vi introducera komplexvärda funktioner sådana att för $x \in \mathbf{R}$ så tillåts $f(x) \in \mathbf{C}$. På detta sätt har funktionen f en real- och imaginärdel. Vi delar upp f i komponenter $f(x) = u(x) + iv(x)$ där u, v är reellvärda funktioner (vanliga funktioner alltså). Vi känner redan till ett exempel: den komplexa exponentialfunktionen $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Precis som när vi introducerade komplexa tal i grundkursen visar det sig att dessa funktioner beter sig precis som vanliga funktioner när det kommer till våra så kallade räkneregler. Även differential- och integralkalkyl fungerar analogt. Vi definierar

$$f'(x) = u'(x) + iv'(x),$$
$$\int f(x) dx = \int u(x) dx + i \int v(x) dx$$

och så vidare. Produktregler, partiell integration, kedjeregler och allt annat fungerar precis som vanligt. Självklart behöver alla dessa fenomen egentligen bevisas ordentligt, men vi överlämnar det som övning.

Vi är speciellt intresserade av funktionen e^{wx} där $w \in \mathbf{C}$ och $x \in \mathbf{R}$. Skriv $w = \alpha + i\beta$ för $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Då är

$$e^{wx} = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)).$$

Den stora anledningen till vårt intresse för denna funktion är att $(e^{wx})' = we^{wx}$ precis som för den reella exponentialfunktionen (visa att detta är sant från definitionen). Detta gör att vi enkelt kan hitta integrerande faktorer även för DE med komplexvärda funktioner. Speciellt för linjära DE av ordning ett med konstanta koefficienter, dvs

$$y' + wy = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad (e^{wx}y)' = e^{wx}g(x) \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = Ce^{-wx} + e^{-wx} \int e^{wx}g(x) dx.$$

Detta antyder på viss struktur hos dessa lösningar. Som nämnt tidigare pratar man om en *homogen* lösning $y_h(x) = Ce^{-wx}$ och en *partikulär* lösning $y_p(x)$ som ges av den andra termen. Den totala lösningen ges av $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ och lösningsgången kan reduceras till frågan om att hitta **en** partikulärlösning och sedan få alla möjliga lösningar till ekvationen genom att lägga till de homogena lösningarna. Namnet homogen kommer från att y_h löser den homogena motsvarigheten till den givna ekvationen (med $g(x) = 0$). Den här tekniken återkommer vi till på nästa föreläsning!

5 Integralekvationer

På liknande sätt som man kan betrakta DE kan man istället ha ekvationer där det ingår integraler av okända funktioner som vi försöker lösa ut. Tekniken vi använder i denna kurs bygger på att helt enkelt derivera ekvationen och lösa en ekvivalent DE i stället. I många tillämpningar däremot gör man ofta tvärt om, dvs formulerar om DE som integralekvationer då ekvationer med integraler i allmänhet beter sig bättre numeriskt än motsvarande DE.

Vi illustrerar med ett exempel.



Exempel

Finn alla kontinuerligt deriverbara funktioner y så att

$$y(x) + \int_1^x y(t) dt = 2e^{2x}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Lösning. Vi deriverar likheten (förutsätter här att y är deriverbar) och erhåller

$$y'(x) + y(x) = 4e^{2x}.$$

Detta följer direkt från integralkalkylens huvudsats! Om y är kontinuerlig finns en primitiv funktion Y så att

$$\int_1^x y(t) dt = Y(x) - Y(1).$$

Om vi deriverar denna likhet fås

$$\frac{d}{dx} \int_1^x y(t) dy = Y'(x) - 0 = y(x).$$

Vi löser DE:n vi fick ovan genom att multiplicera med den integrerande faktorn e^x :

$$\begin{aligned} y'(x) + y(x) = 4e^{2x} &\Leftrightarrow e^x y'(x) + e^x y(x) = 4e^{3x} &\Leftrightarrow (e^x y(x))' = 4e^{3x} \\ &\Leftrightarrow e^x y(x) = \frac{4}{3}e^{3x} + C &\Leftrightarrow y(x) = Ce^{-x} + \frac{4}{3}e^{2x}. \end{aligned}$$

Hur bestämmer vi C ? Vi måste hitta ett villkor från integralekvationen. Enklast är att sätta in $x = 1$ då integralen försvinner då. Alltså måste $y(1) + 0 = 2e^2$. Vi bestämmer nu C :

$$2e^2 = y(1) = Ce^{-1} + \frac{4}{3}e^2 \quad \Leftrightarrow \quad C = 2e^3 - \frac{4}{3}e^3.$$

Det finns alltså bara en lösning:

$$y(x) = \frac{2}{3} (e^{3-x} + 2e^{2x}).$$

TATA42: Föreläsning 8

Linjära differentialekvationer av högre ordning

Johan Thim*

29 mars 2017

1 Differentialoperatorer

För att underlätta notation och visa på underliggande struktur introducerar vi begreppet *differentialoperator* (DO). Den enklaste icke-triviala varianten på en DO är helt enkelt operationen att derivera med avseende på variabeln x . Vi brukar skriva det $(\cdot)'$, $\frac{d}{dx}$, eller det som kommer att vara vanligast i detta avsnitt, D . Med andra ord gäller alltså

$$\frac{dy}{dx} = Dy(x) = y'(x)$$

för alla deriverbara funktioner y . Vi tillåter oss att vara lite slarviga med notationen. Självklart så kan man även betrakta operationen att derivera två gånger. Denna operation kan enkelt skrivas D^2 . Då är $D^2y = y''$ vilket kan ses genom manövern

$$D^2y = D(Dy) = Dy' = y''.$$

På samma sätt är $D^3y = y^{(3)}$ och så vidare. Vi är nu mogna för följande definition.



Differentialoperator

Definition. Om $p(r)$ är ett polynom

$$p(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0$$

definierar vi *differentialoperatorn* $p(D)$ genom

$$p(D)y = a_n D^n y + a_{n-1} D^{n-1} y + \cdots + a_1 Dy + a_0 y$$

för alla y som kan kontinuerligt deriveras n gånger. Polynomet $p(r)$ kallas differentialoperatorns *karaktéristiska polynom*.

Ett par exempel är på sin plats.

*johan.thim@liu.se



Exempel

- (i) Om $p(D) = D + 1$ är $P(D)y = y' + y$;
- (ii) Om $p(D) = D^2 - 2$ är $P(D)y = y'' - 2y$;
- (iii) Om $P(D) = (D + 1)^2 = D^2 + 2D + 1$ är $p(D)y = y'' + 2y' + y$.

Det sista exemplet kommer vi att återvända till. Man kan alltså precis som för vanliga polynom faktorisera $p(D)$ bara man är försiktig i vilken ordningen man skriver D :n och konstanter. Detta kommer att vara nyckeln till att lösa högre ordningens DE.



Exempel

Skriv ekvationen $2y^{(3)} - 3y' + 2y = 7x$ med hjälp av en DO.

Lösning. Vi ser direkt att ekvationen ekvivalent kan formuleras som $2D^3y - 3Dy + 2y = 7x$, och om vi låter $p(D) = 2D^3 - 3D + 2$ kan vi skriva $p(D)y = 7x$. De termer som inte innehåller y kan inte ingå i operatoren.



Konstanta koefficienter

Definition. Vi säger att den DO $p(D)$ vi introducerade ovan har konstanta koefficienter eftersom konstanterna $a_0, a_1, \dots, a_n$ är just konstanter.

Definitionen kanske verkar lite konstig, men man arbetar ofta med DO:er där man låter $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ i $p(D)$ bero på x (alltså vara funktioner av x). Vi kommer oftast att enbart betrakta fallet med konstanta koefficienter när vi arbetar med högre ordningens DE:er (med bland annat Euler-ekvationer som undantag).



Linjäritet

Sats. Operatoren $p(D)$ definierad ovan är *linjär*, dvs om y_1 och y_2 är n gånger deriverbara funktioner och $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$ är konstanter så är

$$p(D)(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1p(D)y_1 + c_2p(D)y_2.$$

Beviset är enkelt eftersom vi vet att vi kan derivera en summa genom att ta summan av respektive derivatorer samt att vi kan bryta ut konstanter (med andra ord, att operatoren D är linjär). Faktum är att satsen gäller även om vi inte har konstanta koefficienter.



Förskjutningsregeln

Sats. Om $a \in \mathbf{C}$ är en konstant och $p(D)$ enligt ovan är en DO med konstanta koefficienter så gäller att

$$p(D)(e^{ax}z(x)) = e^{ax}p(D + a)z(x).$$

Bevis. Polynomet $p(r)$ kan alltid faktoriseras (med eventuellt komplexa rötter) som

$$p(r) = C(r - r_1)(r - r_2) \cdots (r - r_n).$$

Vi skriver

$$p(D) = C(D - r_1)(D - r_2) \cdots (D - r_n).$$

Det räcker alltså att visa förskjutningssatsen för en av dessa faktorer eftersom vi iterativt kan förflytta oss genom hela polynomet i så fall. Vi väljer $D - r_i$. Då är

$$\begin{aligned} (D - r_i)(e^{ax}z(x)) &= (e^{ax}z(x))' - r_i e^{ax}z(x) \\ &= e^{ax}z'(x) + a e^{ax}z(x) - r_i e^{ax}z(x) \\ &= e^{ax}((D + a) - r_i)z(x). \end{aligned}$$

Operatorn D förskjuts alltså med a i den i :te faktorn och detta gäller för varje i .



Exempel

Låt $p(r) = r^2 + r - 2 = (r - 1)(r + 2)$. Då medför förskjutningsregeln att

$$p(D)(e^{-2x}z(x)) = e^{-2x}p(D - 2)z.$$

Så vad innebär $p(D - 2)$? Inget mer än att man ersätter r med $D - 2$ i polynomet $p(r)$:

$$p(D - 2) = (D - 2)^2 + (D - 2) - 2 = (D - 2 - 1)(D - 2 + 2) = (D - 3)D = D^2 - 3D.$$

Alltså blir

$$p(D)(e^{-2x}z(x)) = e^{-2x}p(D - 2)z = e^{-2x}(z'' - 3z').$$

Kanske kan man tycka att det verkar bökigt med förskjutningsregeln, men i vissa fall underlättar den riktigt ordentligt.



Exempel

Låt $p(r) = (r - 3)^{10}$. Då kommer

$$\begin{aligned} p(D)(e^{3x}z(x)) &= (D^{10} - 30D^9 + 405D^8 - 3240D^7 + 17010D^6 - 61236D^5 + 153090D^4 \\ &\quad - 262440D^3 + 295245D^2 - 196830D + 59049)(e^{3x}z(x)). \end{aligned}$$

Hur förenklar vi detta? Ser bökigt ut. Men med förskjutningsregeln blir

$$p(D)(e^{3x}z(x)) = e^{3x}p(D + 3)z = e^{3x}(D + 3 - 3)^{10}z = e^{3x}D^{10}z = e^{3x}z^{(10)}.$$

Betydligt mycket mindre arbete! Multipla rötter som ”krockar” med konstanten a i exponenten i e^{ax} brukar hanteras mycket enklare med förskjutningsregeln.

2 Superpositionsprincipen

Superpositionsprincipen är principen att lösningar till linjära ekvationer kan konstrueras genom att addera lösningar till delproblem. Med andra ord, om y_1 löser $p(D)y_1 = g_1$ och y_2 löser $p(D)y_2 = g_2$ så kommer $y = y_1 + y_2$ att lösa $p(D)y = g_1 + g_2$. Detta är anledningen till att vi kan dela upp en lösning i en homogen del och en partikulärlösning; vi kan alltså lösa en del av problemet i taget.



Sats. Samtliga lösningar till $p(D)y = g$ kan delas upp i två delar: $y = y_h + y_p$, där den homogena lösningen y_h löser ekvationen $p(D)y_h = 0$ och partikulärlösningen y_p är **någon** lösning till $p(D)y_p = g$.

Bevis. Betrakta $z = y - y_p$ där y och y_p är olika lösningar till ekvationen. På grund av linjäriteten måste då

$$p(D)z = p(D)(y - y_p) = p(D)y - p(D)y_p = g - g = 0.$$

Alltså löser z den homogena ekvationen $p(D)z = 0$. Så om vi har **en** partikulärlösning y_p så att $p(D)y_p = g$, så ges samtliga lösningar av denna partikulärlösning plus lösningar y_h till den homogena ekvationen $p(D)y_h = 0$.



Superposition av partikulärlösningar

Om

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_n(x)$$

består av flera termer kan även partikulärlösningen delas upp i flera delar:

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \cdots + y_{p_n}$$

enligt superpositionsprincipen och sedan kan man lösa varje $p(D)y_{p_k} = g_k$ och summera

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \cdots + y_{p_n}$$

för att finna en total partikulärlösning. Vi återkommer med exempel på detta senare.

3 Linjära DE av första ordningen med konstanta koefficienter

Först lite repetition från förra föreläsningen.



Definition. Om $y' + f(x)y = g(x)$ kallar vi DE:n för en linjär DE av första ordningen.

En sådan ekvation behöver inte ha konstanta koefficienter, men om $f(x) = a$ är en konstant visade vi då att

$$y(x) = Ce^{-ax} + e^{-ax} \int e^{ax} g(x) dx$$

ger samtliga lösningar till ekvationen. Vi kallade $y_h(x) = Ce^{-ax}$ för den homogena lösningen och $y_p(x) = e^{-ax} \int e^{ax} g(x) dx$ för en partikulärlösning.

Låt oss formulera ekvationen som

$$p(D)y = g(x), \quad \text{där } p(D) = D + a.$$

Om vi använder förskjutningsregeln ser vi att

$$D(e^{ax}y) = e^{ax}(D + a)y = e^{ax}p(D)y$$

och alltså är

$$\begin{aligned} p(D)y = g(x) &\Leftrightarrow e^{-ax}D(e^{ax}y) = g(x) \\ &\Leftrightarrow (e^{ax}y)' = e^{ax}g(x) \\ &\Leftrightarrow e^{ax}y = C + \int e^{ax}g(x) dx \\ &\Leftrightarrow y = Ce^{-ax} + e^{-ax} \int e^{ax}g(x) dx. \end{aligned}$$

Vi har alltså ”plockat ut” den integrerande faktorn ur $p(D)$ med hjälp av förskjutningsregeln. Detta är grundstenen för tekniken vi kommer att använda för högre ordningens ekvationer!

4 Linjära DE av andra ordningen med konstanta koefficienter

Låt oss utgå från en operator $p(D) = D^2 + aD + b$. Motsvarande polynom $p(r)$ kan **alltid** faktoriseras som $p(r) = (r - r_1)(r - r_2)$ om vi tillåter att r_1 och r_2 kan vara komplexa tal. Lösningar till den homogena ekvationen $p(D)y_h = 0$ bestäms med följande sats.



Lösningar till den homogena ekvationen

Sats. Samtliga lösningar till den homogena ekvationen $p(D)y_h = 0$ ges av

$$\begin{aligned} y_h &= C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \quad \text{om } r_1 \neq r_2 \text{ och} \\ y_h &= (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x} \quad \text{om } r_1 = r_2. \end{aligned}$$

Bevis. Vi faktoreriserar det karakteristiska polynomet $p(r) = (r - r_1)(r - r_2)$, vilket leder till

$$p(D)y_h = 0 \Leftrightarrow (D - r_1)(D - r_2)y_h = 0.$$

Låt $z = (D - r_2)y_h$. Då är alltså (enligt fallet av ordning ett)

$$(D - r_1)z = 0 \Leftrightarrow z = Ae^{r_1 x}.$$

Då blir

$$(D - r_2)y_h = Ae^{r_1 x} \Leftrightarrow y_h = Be^{r_2 x} + e^{r_2 x} \int e^{-r_2 x} Ae^{r_1 x} dx.$$

Om $r_1 \neq r_2$ följer det alltså att

$$y_h = Be^{r_2x} + \frac{A}{r_1 - r_2}e^{r_1x} = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$$

och om $r_1 = r_2$ är

$$y_h = Be^{r_2x} + Axe^{r_1x} = (Ax + B)e^{r_1x}.$$



Exempel

Hitta alla lösningar till $2y'' + y' - y = 0$

Lösning. Vi skriver upp det karakteristiska polynomet $p(r) = 2r^2 + r - 1$ och faktorerar detta:

$$p(r) = 2 \left(r - \frac{1}{2} \right) (r + 1).$$

Lösningarna är alltså $r = 1/2$ och $r = -1$ vilket ger lösningarna

$$y(x) = C_1e^{x/2} + C_2e^{-x}.$$



Exempel

Hitta alla lösningar till $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Lösning. Vi skriver upp det karakteristiska polynomet $p(r) = r^2 - 4r + 13$ och undersöker när $p(r) = 0$:

$$p(r) = r^2 - 4r + 13 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = 2 \pm 3i.$$

Komplexa rötter alltså, men det gör inget. De homogena lösningarna ges av

$$\begin{aligned} y_h(x) &= Ae^{(2+3i)x} + Be^{(2-3i)x} \\ &= e^{2x} (Ae^{3ix} + Be^{-3ix}) \\ &= e^{2x} (A \cos 3x + iA \sin 3x + B \cos 3x - iB \sin 3x) \\ &= e^{2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) \end{aligned}$$

där $C_1 = A + B$ och $C_2 = iA - iB$. Men eftersom A och B redan är godtyckliga konstanter kan vi lika gärna se C_1 och C_2 som godtyckliga konstanter. Svaret blir alltså att

$$y(x) = e^{2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

5 Lösningar till icke-homogena ekvationer

Lösningsgången är i princip likadan när vi löser alla linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter. Vi försöker summera denna.



Lösningsschema

Givet en ekvation $y'' + ay' + by = g$ gör vi normalt sett följande:

- Identifiera $p(D)$ och skriv ned det karakteristiska polynomet $p(r)$.
- Faktorisera $p(r)$ (möjligen komplext) och notera speciellt rötterna r_1 och r_2 .
- Skriv ned **alla** homogena lösningar $y_h = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ eller $y_h = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$ då $r_1 = r_2$. Om r_1 och r_2 är komplexa kan vi välja att skriva y_h på reell form med cos- och sin-termer i stället:

$$y_h(x) = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x),$$

där $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$.

- Hitta **någon** partikulärlösning y_p till ekvationen.
- Formulera den allmänna lösningen $y = y_h + y_p$. Här finns obestämda konstanter.
- Eventuellt bestäm konstanterna C_1 och C_2 om det finns villkor.

Det största problemet här brukar vara att hitta partikulärlösningen och vi kommer ägna en hel del tid åt detta problem. Det brukar kännas lite ad-hoc (vilket det kanske även är) och man behöver bygga upp lite känsla för vad som är lämpliga ansatser.



Villkor på lösningar

Observera att **hela** lösningen $y = y_h + y_p$ måste bestämmas innan några villkor sätts in för att finna konstanterna C_1 och C_2 . Detta kan **inte** göras direkt på homogenlösningen.

6 Partikulärlösningar

När vi letar en partikulärlösning så brukar vi ofta utgå från någon slags ansats som verkar rimlig och sedan bestämma vilka värden parametrar i ansatsen måste ha. Om det går att välja parametrarna så är vi färdiga, annars måste ansatsen modifieras. Så hur vet man vad för slags ansats man ska göra?

6.1 Polynom

Om högerledet består av ett polynom

$$p(D)y = q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

ansätter vi ett annat polynom som har minst samma grad som $q(x)$. Hur hög grad som behövs har att göra med hur $p(D)$ ser ut. Ansatsen är naturlig eftersom derivatan av polynom är polynom.



Exempel

Hitta en partikulärlösning till $2y'' + y' - y = 3x + 1$

Lösning. Vi ansätter $y_p(x) = Ax + B$ eftersom vi vill matcha ett första-grads polynom. Då är $y'' = 0$ och $y' = A$, så

$$A - (Ax + B) = 3x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad A - B = 1 \text{ och } A = -3 \quad \Leftrightarrow \quad A = -3 \text{ och } B = -4.$$

Partikulärlösningen ges alltså av $y_p(x) = -3x - 4$. Kontrollera att detta fungerar! Om vissa termer "saknas" i $p(D)$ kan vi komma undan med enklare ansatser.



Exempel

Hitta en partikulärlösning till $y'' + 2y' = 3x + x^2$.

Lösning. Vi vill matcha grad 2, men ser i HL att konstant saknas och att det i VL saknas y -term. Alltså ansätter vi $y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx$ och ser att

$$6Ax + 2B + 2(3Ax^2 + 2Bx + C) = 3x + x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 6A = 1, \\ 6A + 4B = 3, \\ 2B + 2C = 0. \end{cases}$$

Alltså måste $A = 1/6$, $4B = 2$ så $B = 1/2$, och $C = -B = -1/2$. Vår partikulärlösning är alltså

$$y_p(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}.$$

Vad händer om vi gör fel ansats? Det blir inte värre än att vi hamnar i en situation där vi inte kan bestämma konstanterna. Tänk till exempel om vi inte tar med Cx -termen i ansatsen ovan. Då blir den sista ekvationen $2B = 0$, så $B = 0$. Men då är både $6A = 3$ och $6A = 1$ vilket så klart inte går. Hamnar vi här får vi göra om ansatsen! Hur? Lägg till fler termer om du inte kommer på något bättre.

6.2 Exponentialfunktioner

Uttryck innehållande exponentialfunktioner e^{ax} (a kan vara komplex) kan transformeras med ansatsen $z(x)e^{ax}$ vilket normalt sett reducerar fallet till något enklare. I fallet med konstanta koefficienter kommer vi ihåg förskjutningsregeln:

$$p(D)(z(x)e^{ax}) = e^{ax}p(D+a)z.$$

Vi återfår alltså funktionen e^{ax} efter alla deriveringar (inte förvånande egentligen) och kan förkorta bort denna om den förekommer i alla termer i högerledet (eftersom $e^{ax} \neq 0$).



Exempel

Hitta alla lösningar till $y'' - 3y' + 2y = xe^{2x}$.

Lösning. Vi vet att $p(r) = r^2 - 3r + 2 = (r - 2)(r - 1)$ och därmed att vi söker y_p så att $p(D)y_p = xe^{2x}$. Vi ansätter $y_p(x) = z(x)e^{2x}$ och ser vad som händer:

$$\begin{aligned} p(D)(z(x)e^{2x}) = xe^{2x} &\Leftrightarrow e^{2x}p(D+2)z(x) = xe^{2x} \\ &\Leftrightarrow p(D+2)z(x) = x \\ &\Leftrightarrow (D-2+2)(D-1+2)z = D(D+1)z = x \\ &\Leftrightarrow z'' + z' = x. \end{aligned}$$

Vi söker **en** lösning, så vi ansätter $z(x) = Ax^2 + Bx$ vilket ger

$$2A + 2Ax + B = x \quad \Leftrightarrow \quad 2A + B = 0 \text{ och } 2A = 1 \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{1}{2} \text{ och } B = -1.$$

Vi får alltså $y_p(x) = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)e^{2x}$.

Den homogena delen får vi direkt från faktoriseringen: $y_h(x) = C_1e^{2x} + C_2e^x$. Enligt superpositionsprincipen får vi nu att samtliga lösningar ges av

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1e^{2x} + C_2e^x + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)e^{2x}.$$

Alternativt. Vi kan även direkt sätta in $y_p = z(x)e^{2x}$ och derivera på utan att använda förskjutningsregeln. Vi har då att $y'_p = (z' + 2z)e^{2x}$ och att $y''_p = (z'' + 2z' + 2z' + 4z)e^{2x}$ vilket ger att

$$p(D)(ze^{2x}) = (z'' + 4z' + 4z)e^{2x} - 3(z' + 2z)e^{2x} + 2ze^{2x} = (z'' + z')e^{2x}.$$

Om detta ska bli xe^{2x} måste alltså $z'' + z' = x$ och vi är tillbaka där vi hamnade med förra metoden.

6.3 Sinus och cosinus

Dessa kan behandlas på olika sätt. En variant är att betrakta dem som real- respektive imaginär del av en komplex exponentialfunktion. Alternativt ansätts en linjärkombination av sinus och cosinus med samma frekvens som i högerledet. Dessa alternativ kan behöva modifieras om ansatsen matchar de homogena lösningarna.



Exempel

Finn alla lösningar till $y'' + y' - 6y = 2 \sin 2x$.

Lösning. Låt $p(r) = r^2 + r - 6$. De homogena lösningarna ges av

$$y_h(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x}$$

eftersom $p(r) = 0$ har lösningarna $r = 2$ och $r = -3$ och faktoriseringen $p(r) = (r - 2)(r + 3)$. Vi vill ha ut $2 \sin 2x$, så det är rimligt att ansätta en partikulärlösning av formen

$$y_p = A \sin 2x + B \cos 2x$$

eftersom den typen av funktioner dyker upp när man deriverar. Vi räknar ut vad som händer med ansatsen:

$$y_p'' + y_p' - 6y_p = -4A \sin 2x - 4B \cos 2x + 2A \cos 2x - 2B \sin 2x - 6A \sin 2x - 6B \cos 2x = 2 \sin 2x.$$

Vi matchar $\sin 2x$ -termer och $\cos 2x$ -termer och finner att

$$-4A - 2B - 6A = 2 \text{ och } -4B + 2A - 6B = 0.$$

Alltså är $A = -5/26$ och $B = -1/26$. Vi har därmed

$$y_p(x) = -\frac{5}{26} \sin 2x - \frac{1}{26} \cos 2x.$$

Den fullständiga lösningen ges av

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} - \frac{5}{26} \sin 2x - \frac{1}{26} \cos 2x.$$

Alternativt. Eftersom $\sin 2x = \operatorname{Im} e^{2ix}$ betraktar vi ekvationen $p(D)y = 2e^{2ix}$.

För partikulärlösningen använder vi förskjutningssatsen och ansatsen $y_p(x) = z(x)e^{2ix}$:

$$\begin{aligned} p(D)(z(x)e^{2ix}) &= 2e^{2ix} &\Leftrightarrow & e^{2ix}p(D+2i)z(x) = 2e^{2ix} \\ &&\Leftrightarrow & p(D+2i)z(x) = 2 \\ &&\Leftrightarrow & (D-2+2i)(D+3+2i)z = 2 \\ &&\Leftrightarrow & (D^2 + (1+4i)D - 10 + 2i)z = 2. \end{aligned}$$

Detta ser riktigt bökt ut men vi söker bara **en** partikulärlösning, så vi ansätter $z_p = A$. Då är $(-10 + 2i)A = 2$, eller $A = -\frac{1}{26} - \frac{5}{26}i$. Alltså,

$$\begin{aligned} y_p(x) &= z_p(x)e^{2ix} = \left(-\frac{1}{26} - \frac{5}{26}i\right)(\cos 2x + i \sin 2x) \\ &= \frac{-\cos 2x + 5 \sin 2x}{26} - i \frac{\sin 2x + 5 \cos 2x}{26}. \end{aligned}$$

Vi finner nu vår sökta partikulärlösning genom att ta $\operatorname{Im} y_p(x)$, vilket stämmer överens med vad vi tog fram ovan med den reella metoden. Observera att vi här på köpet även får en partikulärlösning för högerledet $\cos 2x$ (hur?). Detta alternativ bygger på att ekvationen är linjär så superpositionsprincipen fungerar och vi kan dela upp i real- och imaginärdel.

TATA42: Föreläsning 9

Linjära differentialekvationer av ännu högre ordning

Johan Thim*

10 januari 2017

1 Linjära DE av godtycklig ordning med konstanta koefficienter

Vi kommer nu att betrakta linjära differentialekvationer av högre ordning:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1y'(x) + a_0y(x) = g(x)$$

där vi som vanligt kan skriva

$$p(D)y(x) = g(x), \quad \text{med } p(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D + a_0.$$

Det karakteristiska polynomet

$$p(r) = r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1r + a_0$$

kan faktoriseras enligt

$$p(r) = (r - r_1)^{m_1}(r - r_2)^{m_2} \cdots (r - r_k)^{m_k}$$

där $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$ och $r_i \neq r_j$ då $i \neq j$. Detta innebär alltså att roten r_i har multiplicitet m_i .

Med samma teknik som tidigare (iterativt lösa ekvationen genom att eliminera en derivata i taget; se förra föreläsningen) kan vi visa följande sats.



Lösningar till den homogena ekvationen

Sats. Samtliga lösningar till den homogena ekvationen $p(D)y_h = 0$ ges av

$$y_h = q_1(x)e^{r_1x} + q_2(x)e^{r_2x} + \cdots + q_k(x)e^{r_kx},$$

där $q_i(x)$ är godtyckliga polynom så att $\text{grad } q_i \leq m_i - 1$.

*johan.thim@liu.se

Detta innebär att om r_i är en enkelrot ($m_i = 1$) så är $q_i(x) = A$ en konstant. För en dubbelrot ges $q_i(x) = Ax + B$, för en trippelrot har vi $q_i(x) = Ax^2 + Bx + C$ och så vidare. Observera att r_i så klart kan vara komplexa tal, och i så fall är $r_{i,j} = \alpha \pm i\beta$ (om vi har reella koefficienter) där r_j är den konjugerade roten och

$$C_1 e^{r_i x} + C_2 e^{r_j x} = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$$

för godtyckliga konstanter A och B .

2 Superposition

Superpositionsprincipen fungerar så klart fortfarande eftersom ekvationen är linjär. Vi kan alltså dela upp lösningen för en godtycklig linjär DE i en del som löser den homogena ekvationen och en partikulärlösning. Vi upprepar satsen från förra föreläsningen.



Sats. Samtliga lösningar till $p(D)y = g$ kan delas upp i två delar: $y = y_h + y_p$, där den homogena lösningen y_h löser ekvationen $p(D)y_h = 0$ och partikulärlösningen y_p är **någon** lösning till $p(D)y_p = g$.

Bevisen för dessa satser är analoga med fallet för ordning två.



Exempel

Hitta alla lösningar till $y''' - y'' + y' - y = x + 1$.

Lösning. Vi skriver upp det karakteristiska polynomet $p(r) = r^3 - r^2 + r - 1$ och faktorerisar detta:

$$p(r) = (r - 1)(r^2 + 1) = (r - 1)(r + i)(r - i).$$

De homogena lösningarna ges alltså av

$$y_h(x) = C_1 e^{-x} + A e^{ix} + B e^{-ix} = C_1 e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

Vi söker en partikulärlösning y_p och ansätter $y_p = Cx + D$ eftersom högerledet är ett polynom av grad ett. Då blir

$$p(D)y_p = C - (Cx + D) = x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad C - D = 1 \text{ och } -C = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C = -1 \text{ och } D = -2.$$

Svaret är alltså

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x - x - 2.$$

Varför inte ett lite mer urartat fall.



Exempel

Finn alla lösningar till $y''' - 3y'' + 3y' - y = 2e^x$.

Lösning. Det karakteristiska polynomet ges av $p(r) = r^3 - 3r^2 + 3r - 1$ vilket vi känner igen från Pascals triangel, så $p(r) = (r - 1)^3$ (visa detta). Alltså är

$$y_h = (Ax^2 + Bx + C)e^x$$

enligt satsen ovan. Testa att $p(D)y_h = 0$. Vi ser även att lösningarna till den homogena ekvationen krockar med högerledet så det räcker inte med en enkel ansats (detta fenomen brukar kallas *resonans*). Vi ansätter därför $y_p = z(x)e^x$. Förskjutningsregeln ger att

$$p(D)(z(x)e^x) = 2e^x \Leftrightarrow e^x p(D+1)z = 2e^x \Leftrightarrow p(D+1)z = 2 \Leftrightarrow D^3 z = z^{(3)} = 2$$

Vi söker **en** partikulärlösning z_p , så vi tar helt enkelt $z_p = \frac{2x^3}{6} = \frac{x^3}{3}$. Testa att detta fungerar! Vår eftersökta partikulärlösning ges nu av $y_p = \frac{x^3}{3}e^x$. Totalt sett har vi

$$y = y_h + y_p = \left(\frac{x^3}{3} + Ax^2 + Bx + C \right) e^x.$$



Modifierad ansats

Om högerledet "krockar" med de homogena lösningarna kan man komma undan med att modifiera ansatsen genom att multiplicera med x^k där k är multipliciteten för roten till det karakteristiska polynomet som orsakar konflikten. Exempelvis ser vi i föregående exempel att e^x krockar med en homogen lösning eftersom $r = 1$ är en rot till $p(r)$. Dessutom är detta en trippelrot så vi måste ansätta $y_p(x) = Ax^3$ för att hitta en partikulärlösning. Om vi betraktar y_h ser vi att vi måste "ta oss förbi" dessa termer av grad ≤ 2 . Med ansatsen $y_p(x) = z(x)e^x$ sker detta automatiskt så denna metod är lite enklare.

Låt oss upprepa en uppmaning från förra föreläsningen.



Villkor på lösningar

Observera att **hela** lösningen $y = y_h + y_p$ måste bestämmas innan några villkor sätts in för att finna konstanterna i y_h . Detta kan **inte** göras direkt på homogenlösningen.



Exempel

Finn alla lösningar till $y''' - 4y'' + 5y' = 12 \cos 3x$ så att $y'(0) = 0$, $y(0) = y(2\pi) = 2$.

Lösning. Låt $p(r) = r^3 - 4r^2 + 5r$. Vi ser att

$$p(r) = r(r^2 - 4r + 5) = r(r - (2 - i))(r - (2 + i)).$$

De homogena lösningarna ges av

$$y_h(x) = C_1 + e^{2x} (C_2 \sin x + C_3 \cos x).$$

Vi vill ha ut $\cos 3x$, så det är rimligt att ansätta en partikulärlösning av formen $y_p = A \sin 3x + B \cos 3x$ eftersom den typen av funktioner dyker upp när man deriverar. Vi räknar ut vad som händer med ansatsen:

$$\begin{aligned} p(D)y_p &= -27A \cos 3x + 27B \sin 3x - 4(-9A \sin 3x - 9B \cos 3x) + 5(3A \cos 3x - 3B \sin 3x) \\ &= (-12A + 36B) \cos 3x + (36A + 12B) \sin 3x. \end{aligned}$$

Vi matchar $\sin 2x$ -termer och $\cos 2x$ -termer och finner att

$$-12A + 36B = 12 \text{ och } 36A + 12A = 0.$$

Alltså är $A = -1/10$ och $B = 3/10$. Vi har alltså

$$y_p(x) = -\frac{1}{10} \sin 3x + \frac{3}{10} \cos 3x.$$

Den fullständiga allmänna lösningen ges av

$$y = C_1 + e^{2x} (C_2 \sin x + C_3 \cos x) - \frac{1}{10} \sin 3x + \frac{3}{10} \cos 3x.$$

Vi ska nu (inte tidigare) bestämma konstanterna. Vi har $y(0) = C_1 + C_3 + 3/10$ och $y(2\pi) = C_1 + e^{4\pi} C_3 + 3/10$. Om $y(0) = y(2\pi)$ måste alltså $C_3 = 0$. Sen är $y(0) = y(2\pi) = 2$, så $C_1 + 3/10 = 2$ eller $C_1 = 17/10$. Nu behöver vi derivera lite:

$$y'(x) = e^{2x} ((2C_2 - C_3) \sin x + (C_2 + 2C_3) \cos x) - \frac{3}{10} \cos 3x - \frac{9}{10} \sin 3x$$

så $y'(0) = C_2 + 2C_3 - 3/10 = 0$ men $C_3 = 0$ så $C_2 = 3/10$. Svaret blir nu

$$y(x) = \frac{17}{10} + \frac{3}{10} e^{2x} \sin x - \frac{1}{10} \sin 3x + \frac{3}{10} \cos 3x.$$



Exempel

Lös ekvationen $y^{(4)} + 2y'' + y = \sin x$.

Lösning. Låt

$$p(r) = r^4 + 2r^2 + 1 = (r^2 + 1)^2 = (r + i)^2(r - i)^2.$$

Alltså ges de homogena lösningarna till $p(D)y_h = 0$ av

$$y_h = (C_1x + C_2)\cos x + (C_3x + C_4)\sin x.$$

Vi ser nu att vi får problem med ansatsen för högerledet eftersom $\sin x$ är en lösning till den homogena ekvationen. Att bara multiplicera med x hjälper inte heller eftersom även $x \sin x$ är en homogen lösning! Vår ansats blir

$$y_p = Ax^2 \sin x + Bx^2 \cos x.$$

Vi deriverar lite och finner att

$$\begin{aligned} p(D)y_p &= -12A \sin x - 8Ax \cos x + Ax^2 \sin x - 12B \cos x + 8Bx \sin x + Bx^2 \cos x \\ &\quad + 2(2A \sin x + 4Ax \cos x - Ax^2 \sin x + 2B \cos x - 4Bx \sin x - Bx^2 \cos x) \\ &\quad + Ax^2 \sin x + Bx^2 \cos x \\ &= -8A \sin x - 8B \cos x. \end{aligned}$$

Alltså måste $A = -1/8$ och $B = 0$. Vi har nu alltså

$$(C_1x + C_2)\cos x + (C_3x + C_4)\sin x - \frac{x^2 \sin x}{8}.$$

Alternativt kan vi betrakta ”hjälp ekvationen”

$$w^{(4)} + 2w'' + w = e^{ix}$$

och sedan ta $y(x) = \operatorname{Im} w(x)$ för att hitta samma svar som ovan. Med fördel använder man här förskjutningssatsen när man finner en partikulärlösning med ansatsen $w_p(x) = z(x)e^{ix}$.



Exempel

Lös ekvationen $y^{(6)} - 64y = 32$.

Lösning. Det karakteristiska polynomet blir $p(r) = r^6 - 64$ som har rötterna

$$r = 2 \exp\left(i \frac{\pi k}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Jämför med ekvationen $z^6 = 64$ från Grunten! Alltså ges lösningarna till den här ekvationen av

$$y_h = \sum_{k=0}^5 C_k \exp\left(2 \exp\left(i \frac{\pi k}{3}\right) x\right).$$

En partikulärlösning finner vi genom att ansätta $y_p = A$ och se att $-64A = 32$, eller ekvivalent, att $A = -1/2$, så enligt superpositionsprincipen har vi

$$y(x) = -\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^5 C_k \exp\left(2 \exp\left(i \frac{\pi k}{3}\right) x\right).$$

Vi kan formulera om detta på reell form (med andra konstanter C_i):

$$\begin{aligned} y(x) &= -\frac{1}{2} + C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + \exp\left(\frac{2x}{\sqrt{2}}\right) \left(C_3 \cos \frac{2x}{\sqrt{2}} + C_4 \sin \frac{2x}{\sqrt{2}}\right) \\ &\quad + \exp\left(-\frac{2x}{\sqrt{2}}\right) \left(C_5 \cos \frac{2x}{\sqrt{2}} + C_6 \sin \frac{2x}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

3 Ekvationer med icke-konstanta koefficienter

Vi avslutar med en typ av ekvation där vi har koefficienter som beror av x på ett speciellt sätt, nämligen de så kallade Eulerekvationerna. Dessa har formen

$$x^n y^{(n)}(x) + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = g(x),$$

så vi ser att varje derivata av ordning k har koefficienten $a_k x^k$. Denna speciella ekvation kan vi lösa genom att byta variabel till $t = \ln x$. Det verkar rimligt eftersom $t' = 1/x = x^{-1}$ och varje gång vi deriverar t sänks exponenten ett steg till, vilket borde kunna kompensera för x^k före $y^{(k)}$. Man kan visa att detta alltid reducerar ekvationen till en ekvation för en funktion $z(t) = y(e^t)$ som har konstanta koefficienter (och därför kan lösas med tidigare tekniker). Vi visar ett par steg. Första derivatan fås enkelt till

$$z'(t) = \frac{d}{dt} y(e^t) = y'(e^t) e^t$$

så $y'(e^t) = e^{-t} z'(t)$. Vi deriverar nu detta uttryck en gång till (både produkt och kedjeregeln):

$$z''(t) = \frac{d}{dt} (y'(e^t) e^t) = y''(e^t) e^{2t} + y'(e^t) e^t = y''(e^t) e^{2t} + z'(t)$$

så $y''(e^t) = e^{-2t} (z''(t) - z'(t))$. Sen kan vi fortsätta:

$$\begin{aligned} z'''(t) &= \frac{d}{dt} (y''(e^t) e^{2t} + y'(e^t) e^t) \\ &= y'''(e^t) e^{3t} + 2y''(e^t) e^{2t} + y''(e^t) e^{2t} + y'(e^t) e^t \\ &= y'''(e^t) e^{3t} + 3(z''(t) - z'(t)) + z'(t) \end{aligned}$$

vilket ger $y'''(e^t) = e^{-3t} (z'''(t) - 3z''(t) + 2z'(t))$ och så vidare.



Exempel

Finn alla lösningar till $x^3 y''' - 2xy' = 12 - 4x$.

Lösning. Låt $t = \ln x$. Då är $x = e^t$ och vi låter $z(t) = y(e^t)$. Enligt ovan blir nu

$$x^3 y''' - 2xy' = 12 - 4x \quad \Leftrightarrow \quad z''' - 3z'' = 12 - 4e^t.$$

Vi skriver upp det karakteristiska polynomet $p(r) = r^3 - 3r^2 = r^2(r - 3)$. De homogena lösningarna ges alltså av

$$z_h(t) = C_1 e^{3t} + C_2 t + C_3.$$

Vi ansätter en partikulärlösning $z_p(t) = At^2 + Be^t$. Då blir

$$z_p''' - 3z_p'' = Be^t - 6A - 3Be^t = -2Be^t - 6A = 12 - 4e^t,$$

så $12 = -6A$ och $2B = 4$. Alltså måste $A = -2$ och $B = 2$. Vi har totalt sett lösningarna

$$z(t) = z_h(t) + z_p(t) = C_1 e^{3t} + C_2 t + C_3 - 2t^2 + 2e^t.$$

Vi byter tillbaka till variabeln x och erhåller då

$$y(x) = C_1 x^3 + C_2 \ln x + C_3 - 2 \ln^2 x + 2x.$$

4 Kontroll av lösningar

Vad betyder det egentligen att $p(D)y(x) = h(x)$ och, e.g., $y(0) = y'(0) = 0$? Vi har nu tagit fram verktyg för att hitta något magiskt $y(x)$ som man svarar med och får poäng på tentan. Men vad är egentligen $y(x)$? Dessa funktioner är inget annat än precis de funktioner som löser **ekvationen** $p(D)y(x) = h(x)$ i något intervall $]a, b[$ som bestäms tillsammans med $y(x)$. Lösningen uppfyller också eventuellt några givna villkor. Vi kan alltså **alltid** testa om vi verkligen har löst uppgiften genom att sätta in vårt svar i ekvationen och testa. Även om den här kontrollen inte krävs bör man genomföra den!



Exempel

Visa att $y(x) = C_1 e^{2x} + 3x^2 + \sin x$ löser ekvationen $y''' - 2y'' + y' - 2y = 6(x - x^2 - 2)$ för alla konstanter C_1 .

Lösning. Vi deriverar på och får

$$\begin{aligned}y' &= 2C_1 e^{2x} + 6x + \cos x \\y'' &= 4C_1 e^{2x} + 6 - \sin x \\y''' &= 8C_1 e^{2x} - \cos x\end{aligned}$$

och sätter vi in dessa uttryck i ekvationen får vi

$$\begin{aligned}y''' - 2y'' + y' - 2y &= 8C_1 e^{2x} - \cos x - 2(4C_1 e^{2x} + 6 - \sin x) + 2C_1 e^{2x} + 6x + \cos x \\&\quad - 2(C_1 e^{2x} + 3x^2 + \sin x) \\&= C_1(8 - 8 + 2 - 2)e^{2x} + (-1 + 1)\cos x + (2 - 2)\sin x - 12 + 6x - 6x^2 \\&= 6(x - x^2 - 2).\end{aligned}$$

Vi kan även utifrån kända lösningar konstruera ekvationer som får precis dessa lösningar.



Exempel

Hitta en differentialekvation som har precis lösningarna $(Ae^{2x} + 1)\cos x + Be^{2x}\sin x$.

Lösning. Vi kan identifiera att det är $e^{2x}(A\cos x + B\sin x)$ som är de homogena lösningarna och att $\cos x$ är en partikulärlösning. Vi börjar med att konstruera en ekvation som har korrekta homogena lösningar. Vi ser att på komplex form måste termerna $e^{(2\pm i)x}$ finnas med så det karakteristiska polynomet måste ges av $p(r) = (r - (2 + i))(r - (2 - i)) = r^2 - 4r + 5$. Således är den homogena ekvationen $y'' - 4y' + 5y = 0$. Nu vill vi att $y_p = \cos x$ ska vara en partikulärlösning så vi undersöker vilket högerled som är nödvändigt:

$$y_p'' - 4y_p' + 5y_p = -\cos x - 4(-\sin x) + 5\cos x = 4\cos x + 4\sin x.$$

Svaret blir alltså ekvationen $y'' - 4y' + 5y = 4\cos x + 4\sin x$.

5 Generell struktur

Följande stycke handlar om linjär algebra och kopplingen till linjära DE. Spara det till ni har läst kursen i linjär algebra.

Eftersom $p(D)$ är *linjär* kan vi addera två homogena lösningar och få en ny homogen lösning samt även multiplicera en homogen lösning med en konstant och erhålla en ny homogen lösning. Detta argument visar att mängden av homogena lösningar utgör ett vektorrum V . Detta rum är alltså mängden av alla lösningar y till ekvationen $p(D)y = 0$. I klassisk teori betraktar man V som ett *underrum* av C^n (alla n gånger kontinuerligt deriverbara funktioner), vilket är ett naturligt krav med tanke på den högsta derivatan som ingår.

Om detta kan mycket skrivas, men fokus här är på strukturen av Lösningsrummet V . Vi vet från satsen i föregående avsnitt att det i de enklaste fallen finns n stycken olika rötter som vardera ger upphov till en exponentialfunktion som homogen lösning. Finns det multipla rötter till polynomet ges homogena lösningar som polynom $q(x)$ gånger exponentialfunktioner och även här finns det precis n stycken olika sorters funktioner (exempelvis e^x och xe^x betraktas som helt olika). Detta är ingen slump utan dessa n typer av funktioner utgör en *bas* för vektorrummet V . Konstanterna i den allmänna homogena lösningen skapar alltså en *linjärkombination* av *basvektorerna*. Den allmänna homogena lösningen beskriver alltså en godtycklig vektor i rummet V .

6 Ansatser för partikulärlösningar

Vi avslutar med en tabell för ansatser till partikulärlösningar. Rimligheten i ansatserna kommer från att fundera över vad för slags funktioner man behöver skicka in i en DE för att få ut det högerled man vill ha. Observera att ansatsen $z(x)e^{ax}$ (med $a \in \mathbf{C}$ eventuellt) kan användas i stället för de varianter som innehåller termer e^{ax} , vilket reducerar problemet till en enklare DE för z där vi har fått bort exponentialtermen. Detta gäller även i fallet då högerledet innehåller termer av typen $e^{ax} \cos bx$ eller $e^{ax} \sin bx$. Ekvationen reduceras då till en ekvation för z där högerledet endast innehåller $\sin bx$ och/eller $\cos bx$. Kom även ihåg att man kan hitta partikulärlösningar för sådana högerled genom en komplex hjälpekvation (hur då?).

Tabell 1: Ansatser för partikulärlösningar.

Högerled	Ansats	Undantag ¹
$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$	$b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$	$r = 0$ rot
	$x(b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0)$	$r = 0$ dubbelrot
	$x^2(b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0)$	$r = 0$ trippelrot
	...	...
$A_1 \sin kx + A_2 \cos kx$	$B_1 \sin kx + B_2 \cos kx$	$r = \pm ik$ rot
	$x(B_1 \sin kx + B_2 \cos kx)$	$r = \pm ik$ dubbelrot
	$x^2(B_1 \sin kx + B_2 \cos kx)$	$r = \pm ik$ trippelrot
	...	...
$e^{ax}, a \in \mathbf{C}$	Be^{ax}	$r = a$ rot
	Bxe^{ax}	$r = a$ dubbelrot
	$Bx^2 e^{ax}$	$r = a$ trippelrot
	...	...
$q(x)e^{ax}$	$z(x)e^{ax}$	inga undantag ²
$A_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + A_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$	$B_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + B_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$	$r = \alpha \pm i\beta$ rot

¹ Om undantagsfallet inträffar försöker vi med ansatsen på nästa rad.

² Ger ekvation för z . Nytt högerled där e^{ax} försvunnit. Hitta *en* lösning till denna ekvation! Metodval beror på $q(x)$.

TATA42: Föreläsning 10

Tillämpningar av potensserier

Johan Thim*

10 maj 2017

Vi har introducerat potensserier

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$$

och visat att dessa har en *konvergensradie* R sådan att serien är absolutkonvergent när $|x| < R$ och divergent när $|x| > R$. Vi tillåter $R = 0$ (konvergent endast i $x = 0$) och $R = \infty$ (konvergent för alla x). Vi konstaterade att för $|x| < R$ gick det att *termvis* derivera och integrera potensserier:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} \quad \text{och} \quad \int_0^x f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1},$$

där dessa ”nya” potensserier har samma konvergensradie.

1 Lösningar till DE på serieform

Genom att ansätta en lösning som en serie $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ och låta ekvationen ge villkor på koefficienterna c_k kan man ofta hitta lösningar till DE:er som man inte kan lösa med de metoder vi tidigare använt. Speciellt i de fall då vi inte har konstanta koefficienter eftersom dessa är svåra att behandla. Men låt oss börja med något ”enkelt.”



Exempel

Utnyttja att den unika lösningen till $y' - y = 0$, $y(0) = 1$, ges av $y(x) = e^x$ för att hitta en serieutveckling för e^x .

Lösning. Vi ansätter en potensserie på formen $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ och undersöker när denna löser differentialekvationen. Vi skriver ut den termvisa deriveringen av $y(x)$ och indexerar om serien så vi summerar termer av typen x^k i stället för x^{k-1} :

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} x^k.$$

*johan.thim@liu.se

Nu söker vi koefficienterna c_k så att

$$0 = y'(x) - y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)c_{k+1}x^k - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} ((k+1)c_{k+1} - c_k)x^k$$

där vi utnyttjar att båda serierna är absolutkonvergenta för att slå ihop summorna. För att detta nu ska bli noll för alla x (med $|x| < R$) måste $(k+1)c_{k+1} - c_k = 0$ för $k = 0, 1, 2, 3, \dots$. Vi vet också att $y(0) = 1$ vilket ger att $c_0 = 1$ (varför?). Med andra ord uppfyller c_k det rekursiva sambandet $c_0 = 1$ och $c_{k+1} = c_k/(k+1)$ för $k = 1, 2, \dots$. Vi itererar några steg och ser vad som händer:

$$\begin{aligned} c_0 &= 1 \\ c_1 &= \frac{c_0}{0+1} = 1 \\ c_2 &= \frac{c_1}{1+1} = \frac{1}{2} \\ c_3 &= \frac{c_2}{2+1} = \frac{1}{2 \cdot 3} \\ c_4 &= \frac{c_3}{3+1} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \\ &\vdots \\ c_{k+1} &= \frac{c_k}{k+1} = \frac{1}{(k+1)!} \end{aligned}$$

Vi får alltså serien $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Konvergensradien blir $R = \infty$ eftersom

$$\frac{|x|^{k+1}/(k+1)!}{|x|^k/k!} = \frac{k!}{(k+1)!}|x| = \frac{1}{k+1}|x| \rightarrow 0,$$

då $k \rightarrow \infty$. Vi känner igen svaret från Maclaurinutvecklingen av e^x .

Vi kan även komma åt ekvationer vi inte kunnat lösa tidigare som i följande exempel.



Exempel

Finn alla lösningar till ekvationen $y'' + xy' + y = 0$ som kan uttryckas som en potensserie.

Lösning. Vi ansätter $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Då blir

$$\begin{aligned} xy' &= x \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} k c_k x^k \\ y'' &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} x^k \end{aligned}$$

där vi indexerat serierna lämpligt för att nu kunna undersöka ekvationen:

$$\begin{aligned} 0 &= y'' + xy' + y = \sum_{k=0}^{\infty} ((k+2)(k+1)c_{k+2} + k c_k + c_k) x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) ((k+2)c_{k+2} + c_k) x^k \end{aligned}$$

vilket medför att $c_{k+2} = -\frac{c_k}{k+2}$ för $k = 0, 1, 2, \dots$. Eftersom c_{k+2} bara beror på c_k kommer det att dyka upp två ”sorters” termer (det är två steg mellan k och $k+2$). Vi skiljer därför nu på udda och jämna k . Först jämna index. Alltså,

$$\begin{aligned} c_2 &= -\frac{c_0}{2} \\ c_4 &= -\frac{c_2}{4} = \frac{c_0}{2 \cdot 4} \\ c_6 &= -\frac{c_4}{6} = -\frac{c_0}{2 \cdot 4 \cdot 6} \\ &\vdots \\ c_{2k} &= -\frac{c_{2k-2}}{2k} = \frac{(-1)^k c_0}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k} = \frac{(-1)^k c_0}{2^k \cdot k!} \end{aligned}$$

och för udda k ,

$$\begin{aligned} c_3 &= -\frac{c_1}{3} \\ c_5 &= -\frac{c_3}{5} = \frac{c_1}{3 \cdot 5} \\ c_7 &= -\frac{c_5}{7} = -\frac{c_1}{3 \cdot 5 \cdot 7} \\ &\vdots \\ c_{2k+1} &= -\frac{c_{2k-1}}{2k+1} = \frac{(-1)^k c_1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k+1)} = \frac{(-1)^k \cdot 2^k \cdot k! \cdot c_1}{(2k+1)!}. \end{aligned}$$

Ibland använder man skrivsättet $(2k+1)!! = (2k+1)(2k-1)(2k-3) \cdots 5 \cdot 3$, dvs produkten av alla udda positiva heltal mindre än eller lika med $2k+1$. Analogt kan man definiera $(2k)!!$ som produkten av de jämna heltalen. Vi kan nu skriva upp hur lösningarna $y(x)$ ser ut:

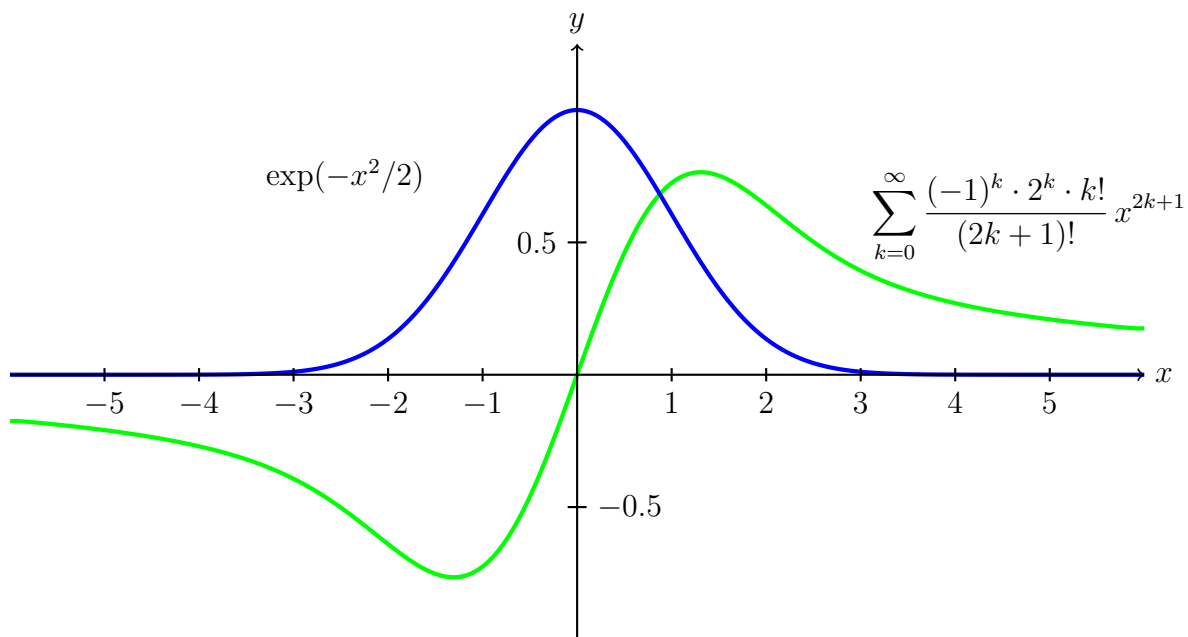
$$y(x) = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k \cdot k!} x^{2k} + c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2^k \cdot k!}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

För vilka x ? Vi undersöker konvergensradierna och ser att dessa är $R = \infty$ i båda fallen. Våra lösningar löser alltså ekvationen på hela $\mathbf{R}$. Konstanterna c_0 och c_1 är godtyckliga och kan till exempel bestämmas om begynnelse- eller randvillkor är givna.

Den första serien kan vi utan allt för stora problem se blir $c_0 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ (visa det). Den andra serien är lite svårare att analysera. Man kan dock visa att den kan skrivas

$$c_1 \frac{2x}{|x|\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \int_0^{|x|\sqrt{2}/2} \exp(s^2) ds.$$

Vi ritar upp funktionerna för $c_0 = c_1 = 1$. Den gröna är den udda serien och den blåa den jämna.



Inte direkt den typen av funktioner vi funnit tidigare när vi löst linjära DE av andra ordningen! Följdfråga: är $y(x)$ enligt ovan den allmänna lösningen till ekvationen i fråga eller finns det fler?

Vi kan även prata om potensserier kring andra punkter än $x = 0$; jämför med hur vi gick från Maclaurinpolynom till Taylorpolynom. Vi arbetar alltså i det här läget med serier

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k.$$



Analytisk funktion

Definition. En funktion f kallas analytisk i en punkt $x = x_0$ om det finns ett öppet intervall $I =]x_0 - c, x_0 + c[$ så att $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$ för alla $x \in I$. Med andra ord så konvergerar potensserien till f nära x_0

När vi ansätter potensserier för att lösa DE söker vi alltså analytiska lösningar (åtminstone analytiska i $x = 0$). Det är värt att notera här att det finns funktioner som är kontinuerligt deriverbara till och med oändligt många gånger men som fortfarande inte är analytiska. Betrakta exemplet från föreläsning 3 där $f(x) = \exp(-1/x^2)$ för $x \neq 0$ och $f(0) = 0$. Maclaurinserien till denna funktion är identiskt lika med noll (samtliga $c_k = 0$) vilket så klart endast stämmer överens i just $x = 0$ (det finns alltså inget öppet intervall). Men i övrigt är funktionen snäll. Men man kan konstruera exempel som inte är analytiska i en enda punkt. Exempelvis är

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\sqrt{k}} \cos kx$$

faktiskt en funktion som är oändligt många gånger kontinuerligt deriverbar men som inte är analytisk i en enda punkt. Kul va! Dagens patologiska exempel är därmed avklarat. Faktum

är att mängden av snälla funktioner som inte är analytiska i en enda punkt är betydligt större¹ än mängden av analytiska funktioner.

Det är inte heller så trevligt att alla analytiska funktioner enkelt kan representeras som så kallade elementära funktioner. Exempelvis går lösningarna till följande DE under namnet *Airy*-funktioner.



Exempel

Finn alla analytiska (i $x = 0$) lösningar till $y'' - xy = 0$.

Lösning. Vi söker analytiska lösningar och ansätter då en potensserie $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Då ges ekvationen av

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1)x^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+2}(k+2)(k+1)x^k - \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1}x^k \\ &= 2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_{k+2}(k+2)(k+1) - c_{k-1})x^k \end{aligned}$$

Alltså måste $c_2 = 0$ och för $k = 1, 2, \dots$ måste $c_{k+2} = c_{k-1}/(k+2)(k+1)$. Vi erhåller alltså 3 "sorters" koefficienter så vi betraktar c_{3k} , c_{3k+1} och c_{3k+2} . Det följer från att $c_2 = 0$ att $c_{3k+2} = 0$ för $k = 0, 1, 2, \dots$. Vi fortsätter med c_{3k} :

$$\begin{aligned} c_3 &= \frac{c_0}{3 \cdot 2} \\ c_6 &= \frac{c_3}{6 \cdot 5} = \frac{c_0}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} \\ c_9 &= \frac{c_6}{9 \cdot 8} = \frac{c_0}{9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} \\ &\vdots \\ c_{3k} &= \frac{c_{3k-3}}{3k(3k-1)} = \frac{(3k-2)!!! c_0}{(3k)!}, \end{aligned}$$

där $n!!!$ definieras som produkten av alla heltal n , $n-3$, $n-6$, $n-9$ och så vidare till vi hamnar i 1, 2 eller 3. Exempelvis är $12!!! = 12 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3$ och $14!!! = 14 \cdot 11 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 2$. På liknande sätt har vi

$$\begin{aligned} c_4 &= \frac{c_1}{4 \cdot 3} \\ c_7 &= \frac{c_4}{7 \cdot 6} = \frac{c_1}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} \\ c_{10} &= \frac{c_7}{10 \cdot 9} = \frac{c_1}{10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} \\ &\vdots \\ c_{3k+1} &= \frac{c_{3k-2}}{3k(3k+1)} = \frac{(3k+1)!!! c_1}{(3k+1)!}. \end{aligned}$$

¹I Baires mening. Mängden av funktioner analytiska i någon punkt — sett som delmängd av $C^\infty(I)$ på ett intervall I — är av den första kategorin. Detta innebär att den mängden är betydligt mindre än komplementet som består av C^∞ -funktioner på I som inte är analytiska i en enda punkt.

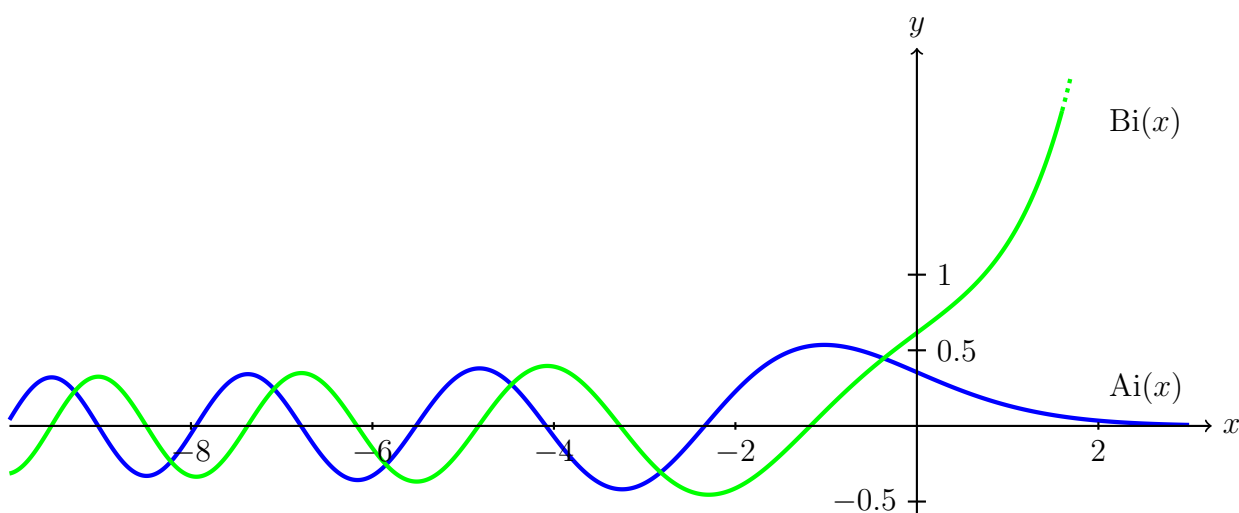
Vi kan nu skriva upp hur lösningarna $y(x)$ ser ut:

$$y(x) = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3k-2)!!!}{3k!} x^{3k} + c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3k+1)!!!}{(3k+1)!} x^{3k+1}.$$

Vi låter här $(-2)!!! = 1$ för att underlätta notationen. För vilka x ? Vi undersöker konvergensradierna och ser att dessa är $R = \infty$ i båda fallen. Våra lösningar löser alltså ekvationen på hela $\mathbf{R}$ och är analytiska på hela $\mathbf{R}$ också. Dessa funktioner brukar som sagt kallas Airy-funktioner och vi kan definiera

$$\text{Ai}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3k-2)!!!}{3k!} x^{3k} \quad \text{och} \quad \text{Bi}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3k+1)!!!}{(3k+1)!} x^{3k+1}$$

för $x \in \mathbf{R}$. Vi skissar upp funktionerna (den blå är $\text{Ai}(x)$ och den gröna är $\text{Bi}(x)$).



Dessa funktioner är speciellt roliga eftersom de först beter sig svängande innan de "plötsligt" bestämmer sig för att agera som exponentialfunktioner i stället. Fascinerande!

2 Maclaurinserier

Entydighetssatsen för Maclaurinutvecklingar medför att om f är en analytisk funktion i $x = 0$ så måste $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$, dvs en potensserie $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ **måste** ha $c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.



Exempel

Låt oss återigen betrakta $f(x) = e^x$. Vi visar att $r(x) \rightarrow 0$ för varje $x \in \mathbf{R}$ om antalet termer i Maclaurinpolynomet går mot oändligheten.

Lösningar. Vi vet att Lagranges form på resttermen för utvecklingen av ordning n ges av $r(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}$ för något ξ mellan 0 och x (där x är fixt). Då är

$$|r(x)| \leq \frac{e^\xi}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{e^\xi |x|^n}{(n+1)!} \rightarrow 0, \quad \text{då } n \rightarrow \infty$$

enligt standardgränsvärde eftersom $a^n/n! \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$ (vi låter alltså $a = |x|$ och $e^\xi \leq e^{|x|} < \infty$). Eftersom resttermen går mot noll har vi visat att

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Kan vi komma åt resultat av denna typ utan att gå via Lagranges restterm?



Exempel

Visa att $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$ konvergerar för alla x .

Lösning. Direkt via kvotkriteriet erhåller vi att

$$\left| \frac{(-1)^{k+1} x^{2(k+1)}}{(2(k+1))!} \cdot \frac{(2k)!}{(-1)^k x^{2k}} \right| = \frac{|x|^2}{(2k+2)(2k+1)} \rightarrow 0,$$

då $k \rightarrow \infty$. Serien har alltså konvergensradie $R = \infty$. Eftersom $\cos x$ är kontinuerligt deriverbar oändligt många gånger och Maclaurinkoefficienterna för $\cos x$ ges av koefficienterna i serien ovan medför entydigheten att detta är Maclaurinserien för $\cos x$.

Vi sammanfattar några av de kända Maclaurinserierna med deras respektive konvergensområden. Jämför med motsvarande Maclaurinutvecklingar från föreläsning 3.



Maclaurinserier

- (i) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, -\infty < x < \infty.$
- (ii) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \cdots, -1 < x \leq 1.$
- (iii) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots, -\infty < x < \infty.$
- (iv) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \cdots, -\infty < x < \infty.$
- (v) $(1+x)^\alpha = x + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n)}{n!} x^n + \cdots, -1 < x < 1.$
- (vi) $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots, -1 < x < 1.$

3 Modifierande serieansatser

Vi har tidigare stött på DE av Euler-typ,

$$x^2 y'' + a x y' + b y = 0,$$

som vi kunde lösa genom att substituera $t = \ln x$ (för $x > 0$). Lösningarna kan även fås genom att finna rötterna till $r^2 + (a - 1)r + b = 0$ och bilda $c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}$ om $r_1 \neq r_2$ och $c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_1} \ln x$ om $r_1 = r_2$ (komplexa rötter kräver lite omskrivning för att få över allt på reell form). Man visar detta genom att ansätta x^r som lösning och se vilka villkor man får på r . Utför detta!

Kan man göra något liknande för ekvationer där a och b beror på x ?



Exempel

Hitta lösningar till Bessels DE av ordning 0 och $1/2$, dvs $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$ med $\nu = 0$ och $\nu = 1/2$.

Lösning. En direkt potensserieansats visar sig resultera i svårlösta problem så vi ansätter i stället en modifierad ansats $y(x) = x^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ där r måste bestämmas på något sätt. Vi deriverar glatt och ser vad vi får:

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+r) x^{k+r-1}$$

$$y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+r)(k+r-1) x^{k+r-2}$$

från vilket det följer att ekvationen kan skrivas

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+r)(k+r-1) x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+r) x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+r+2} - \nu^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+r} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k ((k+r)(k+r-1) + k+r - \nu^2) x^{k+r} + \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2} x^{k+r} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k ((k+r)^2 - \nu^2) x^{k+r} + \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2} x^{k+r} \\ &= c_0 (r^2 - \nu^2) x^r + c_1 ((1+r)^2 - \nu^2) x^{r+1} + \sum_{k=2}^{\infty} (c_k ((k+r)^2 - \nu^2) + c_{k-2}) x^{k+r}. \end{aligned}$$

Här ser vi att endera måste $c_0 = 0$ eller så måste $r = \pm \nu$ för att ekvationen ska vara sann (för alla $x > 0$). Vidare måste $c_1 = 0$ om inte $r = -1/2$. Sen blir det rekursiva sambandet

$$c_k = \frac{-c_{k-2}}{(k+r)^2 - \nu^2}, \quad k = 2, 3, 4, \dots$$

Fall 1: $\nu = 0$. Här ser vi att $r = 0$ för att slippa sätta $c_0 = 0$. Då blir $c_1 = 0$ vilket ger alla

udda termer = 0. Vi undersöker de jämna:

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{-c_0}{2^2} \\ c_4 &= \frac{-c_2}{4^2} = (-1)^2 \frac{c_0}{2^2 \cdot 4^2} = (-1)^2 \frac{c_0}{2^{2+2} \cdot 2^2} \\ c_6 &= \frac{-c_4}{6^2} = (-1)^3 \frac{c_0}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} = (-1)^3 \frac{c_0}{2^{2+2+2} \cdot 2^2 \cdot 3^2} \\ &\vdots \\ c_{2k} &= \frac{-c_{2k-2}}{(2k)^2} = \frac{(-1)^k c_0}{2^{2k} (k!)^2}. \end{aligned}$$

Vi erhåller alltså $y(x) = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} (k!)^2} x^{2k}$. Konvergensradien hittar vi till exempel med kvotkriteriet:

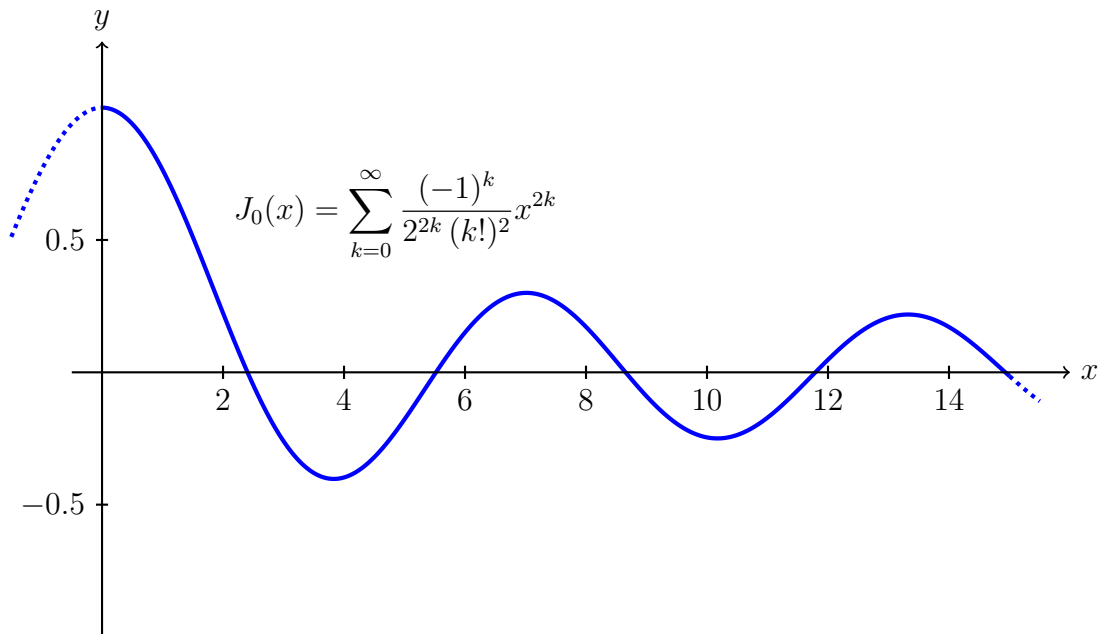
$$\left| \frac{x^{2(k+1)}}{2^{2(k+1)} ((k+1)!)^2} \cdot \frac{2^{2k} (k!)^2}{x^{2k}} \right| = \frac{|x|^2}{4} \left(\frac{1}{k+1} \right)^2 \rightarrow 0$$

då $k \rightarrow \infty$. Serien konvergerar alltså för alla x . Dubbelroten som vi fann ovan ($r = 0$) är anledningen till att vi bara erhåller en "sorts" lösning. För att hitta en oberoende lösning till krävs en hel del arbete till så vi stannar här.

Den lösning vi hittat brukar kallas *Bessels* funktion av ordning 0 och betecknas

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} (k!)^2} x^{2k}.$$

Det är en svängande funktion med avtagande amplitud.



Fall 2: $\nu^2 = 1/4$. Här ser vi att $r = \pm 1/2$ för att slippa sätta $c_0 = 0$. När det gäller c_1 beror det på om $\nu = 1/2$ eller om $\nu = -1/2$. För $\nu = 1/2$ måste $c_1 = 0$ på samma sätt som

i fall 1. För $\nu = -1/2$ är c_1 godtycklig eftersom $(1+r)^2 - \nu^2 = 0$ i det fallet. Vi undersöker de jämna koefficienterna först:

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{-c_0}{2(2 \pm 1)} \\ c_4 &= \frac{-c_2}{4(4 \pm 1)} = (-1)^2 \frac{c_0}{2(2 \pm 1) \cdot 4(4 \pm 1)} \\ c_6 &= \frac{-c_4}{6(6 \pm 1)} = (-1)^3 \frac{c_0}{2(2 \pm 1) \cdot 4(4 \pm 1) \cdot 6(6 \pm 1)} \\ &\vdots \\ c_{2k} &= \frac{-c_{2k-2}}{2k(2k \pm 1)} = (-1)^k \frac{c_0}{2(2 \pm 1) \cdot 4(4 \pm 1) \cdot 6(6 \pm 1) \cdots 2k(2k \pm 1)}. \end{aligned}$$

För $\nu = 1/2$ är det plussen som gäller och vi ser då att $c_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$ för $k = 0, 1, 2, \dots$. Vi erhåller alltså

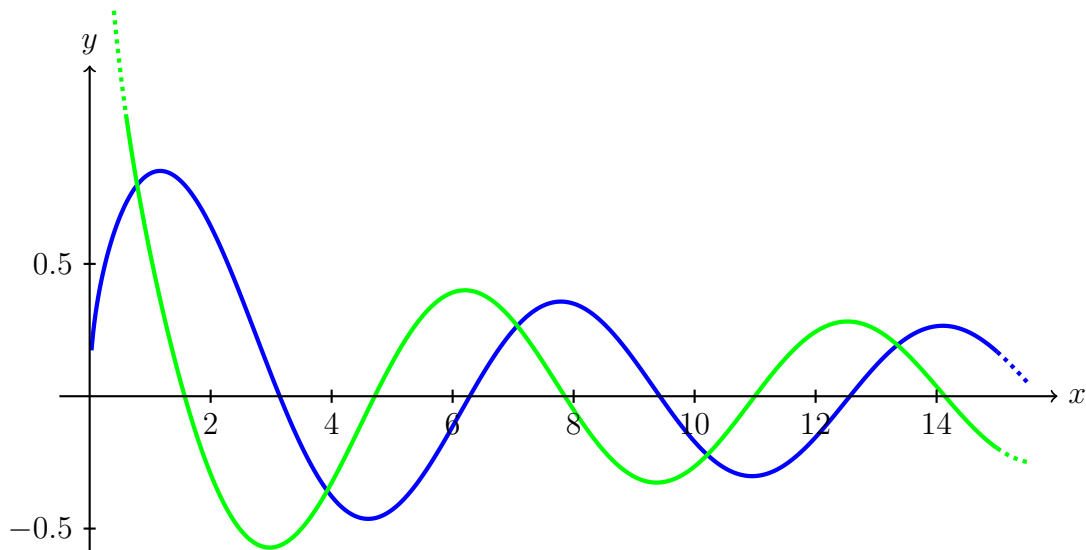
$$y(x) = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1/2} = c_0 x^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = c_0 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

eftersom vi känner igen Maclaurinutvecklingen för $\sin x$. Serien konvergerar för alla x , men vi har kravet $x > 0$ från tidigare så vi har enbart lösningar för $x > 0$.

När det gäller $\nu = -1/2$ är c_1 godtycklig och vi kan ta fram koefficienterna $c_{2k+1} = \frac{(-1)^k c_1}{(2k+1)!}$ samt $c_{2k} = \frac{(-1)^k c_0}{(2k)!}$ för $k = 0, 1, 2, \dots$. Detta ger oss lösningarna

$$y(x) = c_0 x^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + c_1 x^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = c_0 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + c_1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

för $x > 0$. Vi erhöi här precis Maclaurinutvecklingarna för $\cos$ respektive $\sin$. Dessa funktioner kan ritas upp (den gröna är $\cos$ -termen och den blåa är $\sin$ -termen).



TATA42: Föreläsning 11

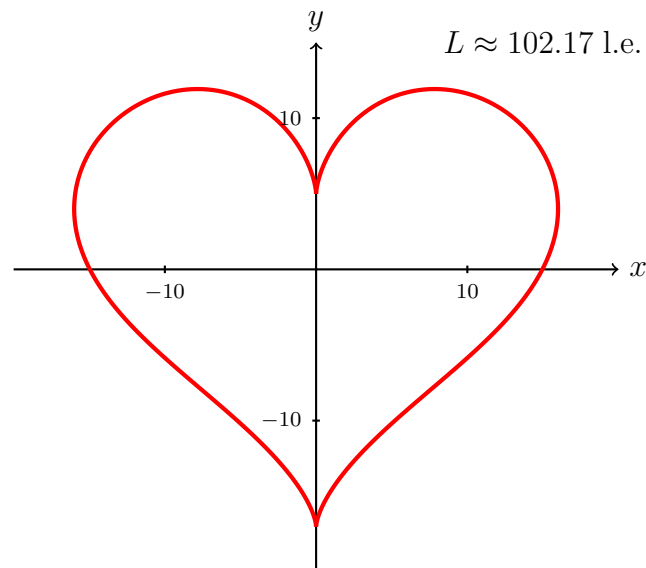
Kurvlängd, area och volym

Johan Thim*

10 januari 2017

1 Kurvlängd

Vi börjar med att betrakta situationen då en kurva i planet ges på parameterform: $(x(t), y(t))$. Detta innebär att både x - och y -koordinaterna simultant uttrycks som funktioner av någon parameter t som varierar i ett intervall. Till exempel skulle $x(t) = \cos t$ och $y(t) = \sin t$, där vi låter $0 \leq t \leq 2\pi$, beskriva cirkeln $x^2 + y^2 = 1$. På detta sätt kan vi även få med fallet då en kurva inte kan uttryckas som en funktion $y = f(x)$. Exempelvis kan kurvan som bestäms av $x = 16 \sin^3 t$ och $y = 13 \cos t - 5 \cos 2t - 2 \cos 3t - \cos 4t$ med $0 \leq t \leq 2\pi$ ritas upp enligt följande¹.



Att beskriva detta som ett funktionssamband $y = f(x)$ förefaller ganska omöjligt. Omvänt däremot, om vi utgår från en funktion kan vi alltid skapa en parameterframställning.



Parameterform för en funktionskurva

Om kurvan vi är intresserad av ges av en funktion f på ett intervall $[a, b]$, i.e., $y = f(x)$ för $a \leq x \leq b$, så kan vi beskriva detta på parameterform genom att till exempel välja $x = t$ och $y = f(t)$, där $a \leq t \leq b$.

*johan.thim@liu.se

¹En dödsbille visade sig vara för svår att beskriva matematiskt...

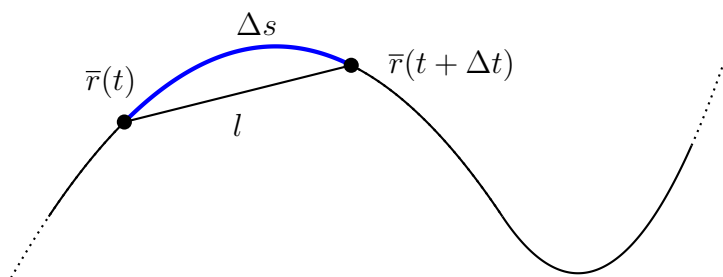
Än så länge har vi egentligen inte ställt några krav på ingående funktioner, men för att på något (enkelt) sätt kunna definiera vad vi menar med kurvlängd kommer vi att kräva att funktionerna är kontinuerligt deriverbara (dvs f är deriverbar och f' är kontinuerlig). Vi brukar sammanfatta detta villkor genom att säga att $f \in C^1([a, b])$. Vi antar underförstått att detta gäller om inget annat anges.



Sats. Om $x \in C^1([a, b])$ och $y \in C^1([a, b])$ så ges längden av kurvan $(x(t), y(t))$ för de t där $a \leq t \leq b$, av

$$L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Vi skissar beviset lite informellt bara för att se att det verkar rimligt; det finns ett mer precist bevis i kursboken. Vi ritar en figur och funderar över hur vi kan approximera längden av en liten del av kurvan. Låt $\Delta t > 0$ vara ett litet tal och låt $\bar{r}(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbf{R}^2$. Vi har följande principfigur:



Då är det lilla bågelementet $\Delta s \approx l$ om Δt är litet och kurvan glatt (ges av deriverbar funktion). Längden l i sin tur kan vi beräkna genom

$$\begin{aligned} l &= |\bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}(t)| \\ &= \sqrt{(x(t + \Delta t) - x(t))^2 + (y(t + \Delta t) - y(t))^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}\right)^2} \Delta t \rightarrow \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \end{aligned}$$

då $\Delta t \rightarrow 0$. Vi väljer nu att kalla det sista uttrycket för *bågelementet* ds . Med andra ord, vi definierar

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$



Exempel

Räkna ut omkretsen för en cirkel med radie R .

Lösning. Vi vet redan svaret, men vi använder satsen ovan för att illustrera. Lämpligen representerar vi cirkeln som $x(t) = R \cos t$ och $y(t) = R \sin t$ för $0 \leq t \leq 2\pi$. Detta är ett sätt att parametrisera cirkeln på. Eftersom ingående funktioner är snälla erhåller vi då kurvlängden

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} |R| \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt \\ &= R \int_0^{2\pi} dt = 2\pi R, \end{aligned}$$

eftersom $|R| = R$ då $R > 0$.

Ovanstående är ett specialfall för kurvlängd då vi använder polära koordinater. Mer generellt låter vi radien vara en given funktion $r = h(t)$, så $x(t) = r(t) \cos t$ och $y(t) = r(t) \sin t$. Satsen ovan implicerar att $ds = \sqrt{h(t)^2 + h'(t)^2} dt$ (visa det). Låt oss sammanfatta detta användbara resultat.



Kurvlängd i polära koordinater

Om en kurva Γ ges i polära koordinater, $x = r \cos t$ och $y = r \sin t$, där $r = h(t)$ för $\alpha \leq t \leq \beta$ och h är kontinuerlig, så kan längden av Γ beräknas enligt

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{h(t)^2 + (h'(t))^2} dt.$$



Kurvlängd av en funktionskurva

Om vi är intresserade av längden av kurvan $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, kan vi enkelt ställa upp uttrycket för detta genom att parametrisera som i exemplet tidigare: $x(t) = t$ och $y(t) = f(t)$. Då är $x'(t) = 1$ och $y'(t) = f'(t)$ och längden ges av

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (\star)$$

Rent konkret blir kalkylerna ofta ganska jobbiga eftersom integranden innehåller kvadratrötter av andragsuttryck. Som tur är behandlades många sådana situationer i envariabel-ettan!



Exempel

Räkna ut längden av kurvan $y = x^2$ för $0 \leq x \leq 1$.

Lösning. Vi ser att kurvan ges av en C^1 -funktion och att $y = f(x)$ med $f(x) = x^2$. Då ges alltså kurvlängden av

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2} dx &= \int_0^1 1 \cdot \sqrt{1 + 4x^2} dx \\ &= \left[x\sqrt{1 + 4x^2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{4x^2}{\sqrt{1 + 4x^2}} dx \\ &= \sqrt{5} - \int_0^1 \frac{1 + 4x^2}{\sqrt{1 + 4x^2}} dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2}} dx \\ &= \sqrt{5} - \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx + \left[\frac{1}{2} \ln(2x + \sqrt{1 + 4x^2}) \right]_0^1 \\ &= - \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx + \sqrt{5} + \frac{\ln(2 + \sqrt{5})}{2},\end{aligned}$$

där vi utnyttjat välkänd (näja..) primitiv funktion till $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Eftersom vi får tillbaka integralen med ”rätt” tecken har vi nu

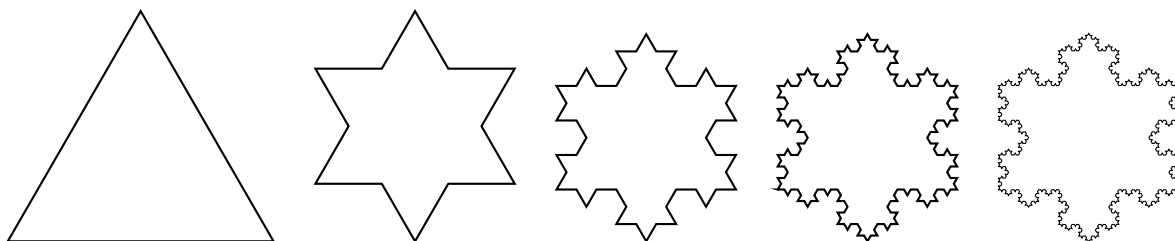
$$\int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \frac{2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5})}{4}.$$

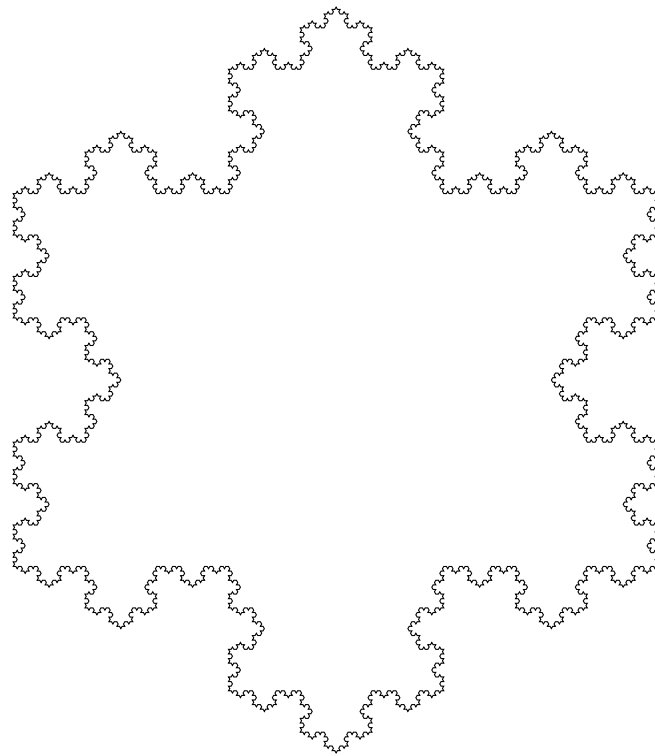


Definition av kurvlängd

Om $f \in C^1$ kan man definiera längden L av en kurva direkt med $(\star)$ ovan, men observera att vi inte direkt kan använda satsen som definition av kurvlängd för alla kurvor. Betrakta till exempel fallet då $f(x) = |x|$. Som bekant är f inte deriverbar i origo och därmed fungerar inte satsen som formulerad. Men vi vet också att man kan dela upp Riemannintegraler i två delar och därmed kunna räkna ut längden av kurvan på varje del och summera dessa. Detta fungerar även om vi har många fler punkter där f' inte finns (åtminstone så länge detta är ett ändligt antal). Vad händer sen?

Ett exempel på en kurva där det går åt skogen att räkna ut längden är Kochs snöflinga. Man startar med en liksidig triangel och delar sedan varje sida i tre delar och ersätter den mittersta med en ny liksidig triangel. Processen upprepas på alla nya linjesegment om och om igen oändligt många gånger. Den kurva som uppstår visar sig inte ha någon parametrisering som är deriverbar i en enda punkt! Hur ska vi definiera längden av en sådan kurva? Vi ritar upp de sex första stegen.





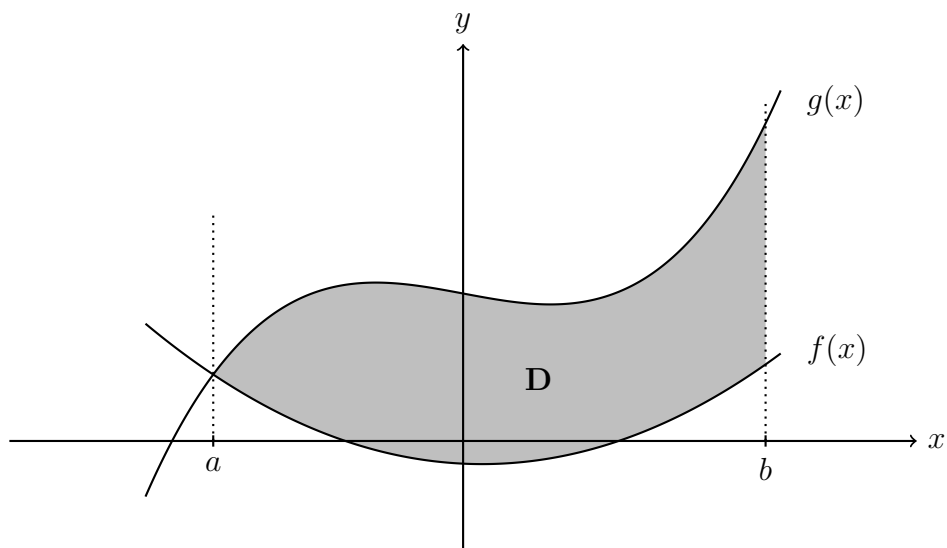
Faktum är att $L = \infty$ är den enda rimliga definitionen.

2 Plan area

Om $g(x) \geq f(x)$ på ett intervall $[a, b]$ så ges arean A mellan f och g av

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x)) \, dx$$

under förutsättning att funktionerna är tillräckligt snälla. Området vars area vi är intresserade av är $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$.





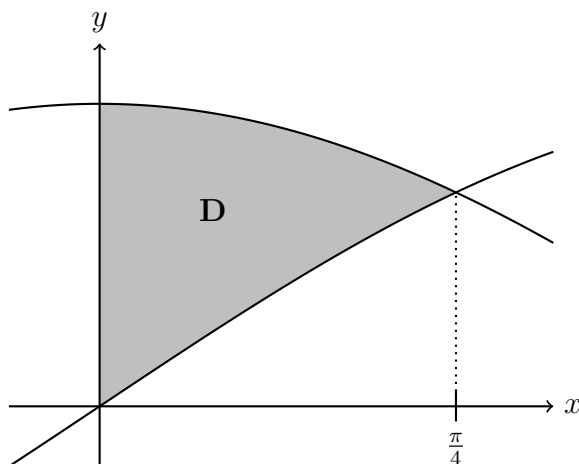
Exempel

Räkna ut arean mellan $y = \cos x$ och $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi/4$.

Lösning. Arealen ges av

$$A = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx = [\sin x + \cos x]_0^{\pi/4} = \frac{4\sqrt{2}}{2} - 1 = 2\sqrt{2} - 1$$

vilket är positivt så svaret är inte helt orimligt. Vi bör även kontrollera att $\cos x \geq \sin x$ för $0 < x < \pi/4$. En figur visar tydligt hur situationen ser ut, och här är alltså den skuggade arean lika med $2\sqrt{2} - 1 \approx 1.83$ areaenheter.

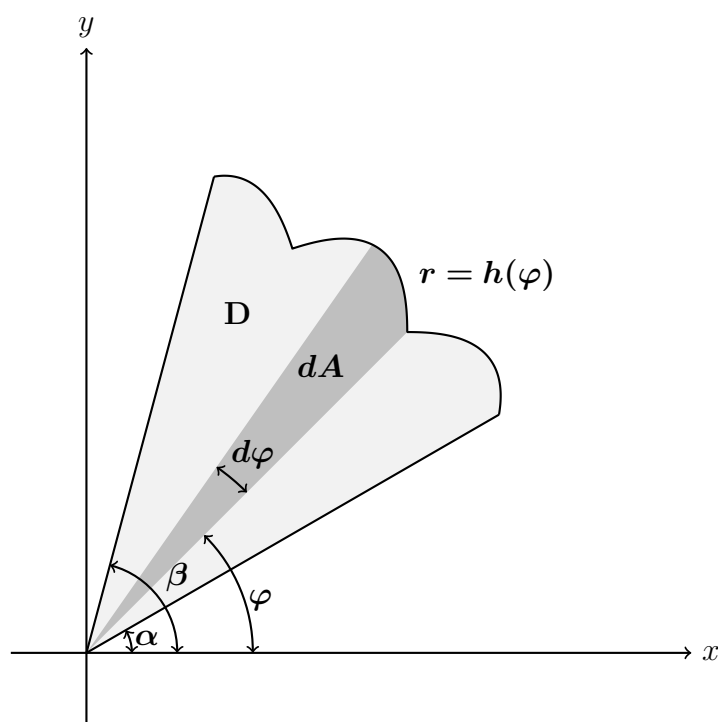


2.1 Area i polära koordinater

Polära koordinater är användbara i situationer då vi har lättare att beskriva hur långt från origo något befinner sig än att precisera hur variation ser ut direkt i x - och y -koordinater. Vi har som bekant $x = r \cos \varphi$ och $y = r \sin \varphi$ och kan då betrakta områden som ges på formen

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq r \leq h(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta\}$$

där $h(\varphi)$ är någon kontinuerlig funktion och $\alpha \leq \beta$. Vi skissar upp hur situationen ser ut.



Arean av detta område kan beräknas enligt följande:

$$A(D) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{h(\varphi)^2}{2} d\varphi.$$

Motiveringen till areaformeln kommer från att vi kan betrakta ett litet areaelement vid vinkeln φ enligt

$$dA = \pi h(\varphi)^2 \cdot \frac{d\varphi}{2\pi} = \frac{h(\varphi)^2}{2} d\varphi$$

eftersom det är en del av en disk med radien $h(\varphi)$. Vi summerar dessa areaelement och erhåller formeln ovan.

3 Volym

Både rotationsarea- och rotationsvolymberäkningar hör egentligen hemma i en flervariabelanalyskurs, men på grund av rotationssymmetrin kan vi ofta reducera area- och volymberäkningar till ett fall med bara en variabel. Mycket av kommande formler är lite "handviftande" men visar ändå på hur kraftfulla verktyg integral- och differentialkalkyl är.

3.1 Rotationsvolym via skivor

Vi börjar med att beskriva det som brukar kallas skivformeln. Vi betraktar en icke-negativ funktion $f(x)$ och låter området

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$$

rotera ett varv kring x -axeln. För varje värde $x \in [a, b]$ uppstår då en disk (skiva) med area $A(x) = \pi f(x)^2$ eftersom radien för disken ges av funktionsvärdet i punkten x : $r = f(x)$. Vi multiplicerar med dx för att få en infinitesimal cylinder (höjden är alltså dx) som har

volymen $dV = A(x) dx = \pi f(x)^2 dx$. Vi summerar dessa och erhåller då den så kallade skivformeln:

$$V = \int_a^b dV = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$



Skivformeln

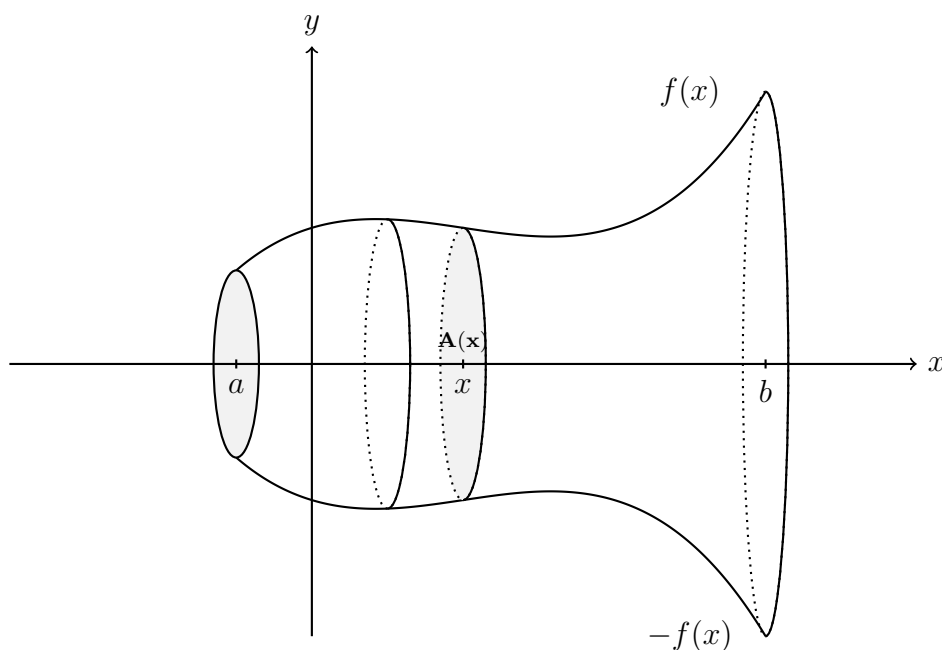
Sats. Om $f(x) \geq 0$ är kontinuerlig så ges volymen V som uppstår då området

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$$

roterar ett varv kring x -axeln av

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Vi bevisar inte satsen utan nöjer oss med argumentet ovan. En principskiss visar också hur vi summerar små skivor för att få hela volymen. Formeln är även känd som brödskeivformeln. Varför tror du formeln fått det namnet?



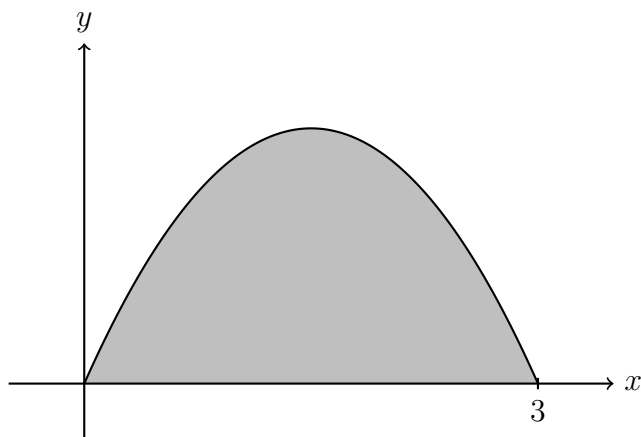
Exempel

Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området som begränsas av kurvan $y = 3x - x^2$ och x -axeln roteras ett varv kring x -axeln.

Lösning. Kurvan $y = 3x - x^2$ skär x -axeln då $3x - x^2 = 0$, vilket sker precis då $x = 0$ och $x = 3$. För $0 \leq x \leq 3$ är $3x - x^2 \geq 0$, så volymen vi söker ges av

$$\pi \int_0^3 (3x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^3 (9x^2 - 6x^3 + x^4) dx = \pi \left[3x^3 - \frac{3x^4}{2} + \frac{x^5}{5} \right]_0^3 = \pi \left(81 - \frac{3^6}{10} \right).$$

Man bör se till att detta uttryck åtminstone är positivt (varför?). En figur är också på sin plats:



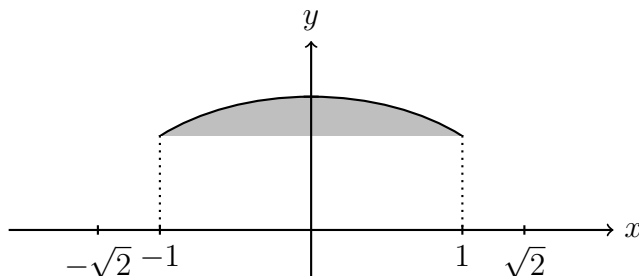
Vi kan även ta hänsyn till ihåligheter i rotationskroppen som i följande exempel.



Exempel

Beräkna volymen av ett klot med radie $\sqrt{2}$ där vi skär ut en cylinder med radie 1 som har x -axeln som sin symmetriaxel.

Lösning. Vi tänker oss att klotet uppstår vid rotation av disken $x^2 + y^2 \leq 2$ kring x -axeln. Cylindern uppstår när vi roterar området mellan $y = 1$ och x -axeln kring x -axeln. Cylindern får oändlig volym så hur reder vi ut hur mycket som ligger i klotet? Ett sätt är skissa upp situationen.



Kurvan $x^2 + y^2 = 2$ skär linjen $y = 1$ precis då $x = \pm 1$. Vi ser då att skivformeln med en undre gräns $y = 1$ istället för $y = 0$ (x -axeln) ger att den eftersökta volymen blir

$$V = \pi \int_{-1}^1 (\sqrt{2 - x^2} - 1) dx = \pi \int_{-1}^1 (\sqrt{2 - x^2} - 1) dx = \frac{4\pi}{3}.$$



Rotation kring axlar parallella med x -axeln

Vi kan rotera kring en linje $y = c$ i stället för kring x -axeln om vi kräver att $f(x) \geq c$. Det enda som ändras är radien eftersom det nu är relativt $y = c$ och inte $y = 0$, så skivformeln får utseendet

$$\pi \int_a^b (f(x) - c)^2 dx.$$

Samma formel gäller om $f(x) \leq c$. Det viktiga är att vi ligger på ena sidan av rotationsaxeln.

3.2 Rotationsvolym via cylindrar

Om vi vill rotera kring y -axeln i stället är det ofta enklast att göra med "rörformeln." Vi betraktar samma område $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$ med tillägget att $a \geq 0$ (så hela området är på ena sidan av rotationsaxeln). Vid ett fixt $x \in [a, b]$ tänker vi oss en cylinder med höjden $f(x)$ och radien x . Detta ger mantelarean $M(x) = 2\pi x f(x)$. Vi multiplicerar med en liten tjocklek för att få ett volymselement $dV = M(x) dx = 2\pi x f(x) dx$. Vi summerar dessa volymelement och erhåller då den så kallade cylinderformeln:

$$V = \int_a^b dV = \int_a^b M(x) dx = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$



Cylinderformeln

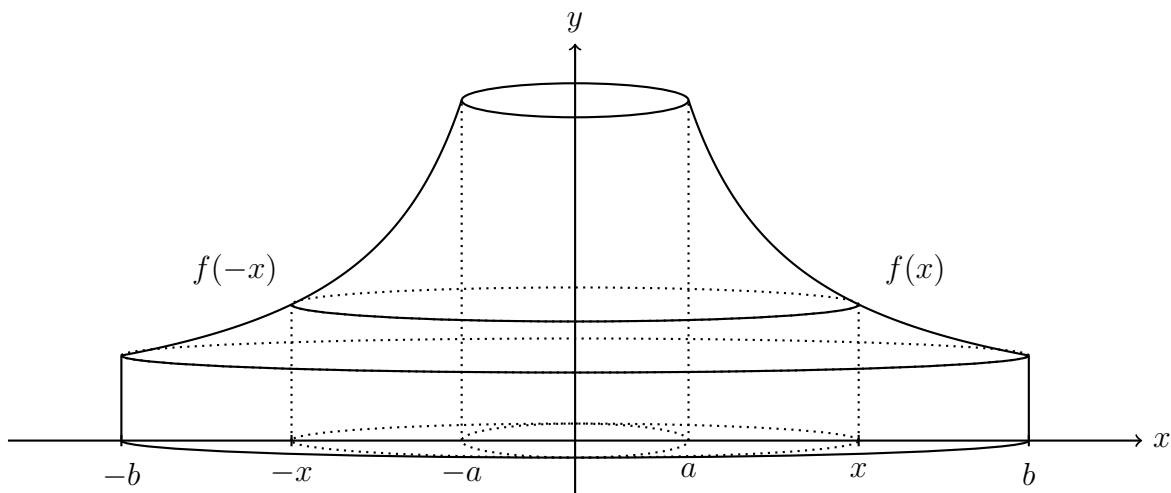
Sats. Låt $a \geq 0$ och $f(x) \geq 0$. Volymen V som uppstår då området

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$$

roteras ett varv kring y -axeln ges av

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

Vi försöker skissa upp situationen.





Exempel

Beräkna rotationsvolymen som uppstår då området mellan kurvan $y = 3/x$, x -axeln och $1 \leq x \leq 4$ roteras ett varv kring y -axeln.

Lösning. För givet $x \in [1, 4]$ är radien för vår cylinder x (avståndet till y -axeln) och höjden ges av $3/x$. Alltså är mantelarean $2\pi(3/x)x = 6\pi$ och vårt volymselement blir helt enkelt $6\pi dx$. Alternativt direkt via rörformeln:

$$2\pi \int_1^4 x \frac{3}{x} dx = 2\pi \int_1^4 3 dx = 18\pi.$$



Rotation kring axlar parallella med y -axeln

Det är inget magiskt med y -axeln, utan rotation kan ske kring vilken linje $x = c$ som helst utan större modifikation. Det enda som ändras är kravet att $a \geq 0$ byts ut mot att $a \geq c$ och att radien för våra cylindrar nu ges av $r = x - c$, eller att $b \leq c$ och $r = c - x$.



Exempel

Beräkna rotationsvolymen som uppstår då området mellan kurvan $y = 3/x$, x -axeln och $1 \leq x \leq 4$ roteras ett varv kring (a) linjen $x = 1$ (b) linjen $x = 5$.

Lösning. (a) För givet $x \in [1, 4]$ är radien för vår cylinder $x-1$ (avståndet till rotationsaxeln) och höjden ges av $3/x$. Rörformeln ger nu att volymen ges av

$$2\pi \int_1^4 (x-1) \frac{3}{x} dx = 2\pi \int_1^4 \left(3 - \frac{3}{x}\right) dx = 6\pi [x - \ln|x|]_1^4 = 6\pi (3 - 2\ln 2).$$

Observera att denna volym är strikt mindre än volymen i förra exemplet. Precis som sig bör. (b) Nu befinner vi oss på andra sidan rotationsaxeln, och "radien" för rotationen ges av $r = 5 - x$. Sålunda,

$$V = 2\pi \int_1^4 (5-x) \frac{3}{x} dx = 2\pi (15\ln 3 - 9).$$

Volymen är åtminstone större än noll (eftersom $\ln 3 > 1$) så inget direkt orimligt.

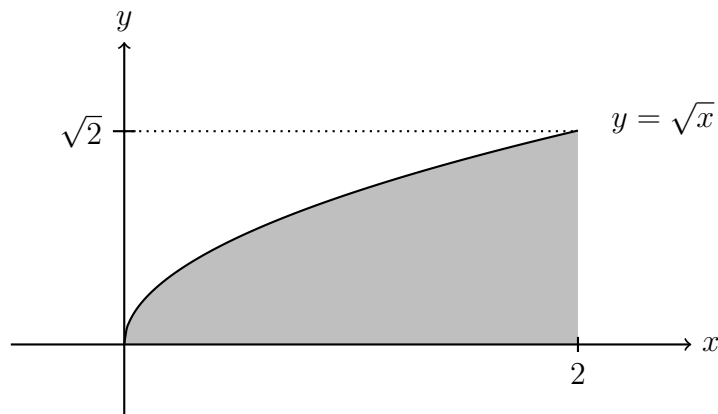
4 Sammanfattande exempel för rotationsvolymer



Exempel

Låt området D ges av det begränsade området mellan kurvan $y = \sqrt{x}$, x -axeln och linjen $x = 2$. Bestäm volymen V_x då D roterar ett varv kring x -axeln och volymen V_y då D roterar ett varv kring y -axeln.

Lösning. Vi börjar med att rita en figur (alltid en bra idé).



Vi ser att för kurvan gäller att $y = \sqrt{x}$ om och endast om $y^2 = x$ (både x och y är icke-negativa). Vi kan alltså uttrycka kurvan både som en funktion av x och som en funktion av y . På detta sätt kan alla rotationsvolymen ställas upp på två olika sätt: med avseende på x och med avseende på y . Vi ställer upp volymen som uppstår vid rotation kring x -axeln först:

$$V_x = \pi \int_0^2 (\sqrt{x})^2 dx = \frac{\pi}{2} [x^2]_0^2 = 2\pi$$

alternativt

$$V_x = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} y(2 - y^2) dy = 2\pi \left[y^2 - \frac{y^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi.$$

Angående den andra formeln kan vi säga att vi egentligen roterar en cylinder med basradie $\sqrt{2}$ och höjd 2 (längs x -axeln) och drar bort volymen som uppstår från kurvan $x = y^2$.

Om vi roterar kring y -axeln i stället erhåller vi via "rörformeln" att

$$V_y = 2\pi \int_0^2 x\sqrt{x} dx = 2\pi \left[\frac{2}{5} x^{5/2} \right]_0^2 = \frac{16\pi\sqrt{2}}{5}.$$

Alternativt kan vi använda skivformeln där vi återigen måste skära bort delar ur rotationen med hjälp av en cylinder:

$$V_y = \pi \int_0^{\sqrt{2}} (2^2 - (y^2)^2) dx = \pi \left(4\sqrt{2} - \frac{2^{5/2}}{5} \right) = \frac{16\pi\sqrt{2}}{5}.$$

TATA42: Föreläsning 12

Rotationsarea, tyngdpunkter och Pappos-Guldins formler

Johan Thim*

10 januari 2017

1 Rotationsarea

När vi ska beräkna rotationsarea kommer vi att utföra liknande manövrar som vi gjorde för rotationsvolym, men vi kommer så klart att betrakta små areaelement i stället för små volymselement.

1.1 Rotationsarea kring x -axeln

Vi betraktar en funktion $f(x) \geq 0$ och låter kurvan

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = f(x), a \leq x \leq b\}$$

rotera ett varv kring x -axeln, där $a < b$. För varje värde $x \in [a, b]$ uppstår då en cirkel som har omkrets $2\pi f(x)$ eftersom radien för cirkeln ges av funktionsvärdet: $r = f(x)$ (avståndet till rotationsaxeln). Vi multiplicerar med bagelementet ds för att få en infinitesimal cylinder (höjden är alltså ds) vars mantelarea blir $dA = 2\pi f(x)ds$. Vi summerar dessa och erhåller då följande.



Sats. Om $f(x) \geq 0$ är kontinuerligt deriverbar och $a < b$ så ges arean A som uppstår då kurvan

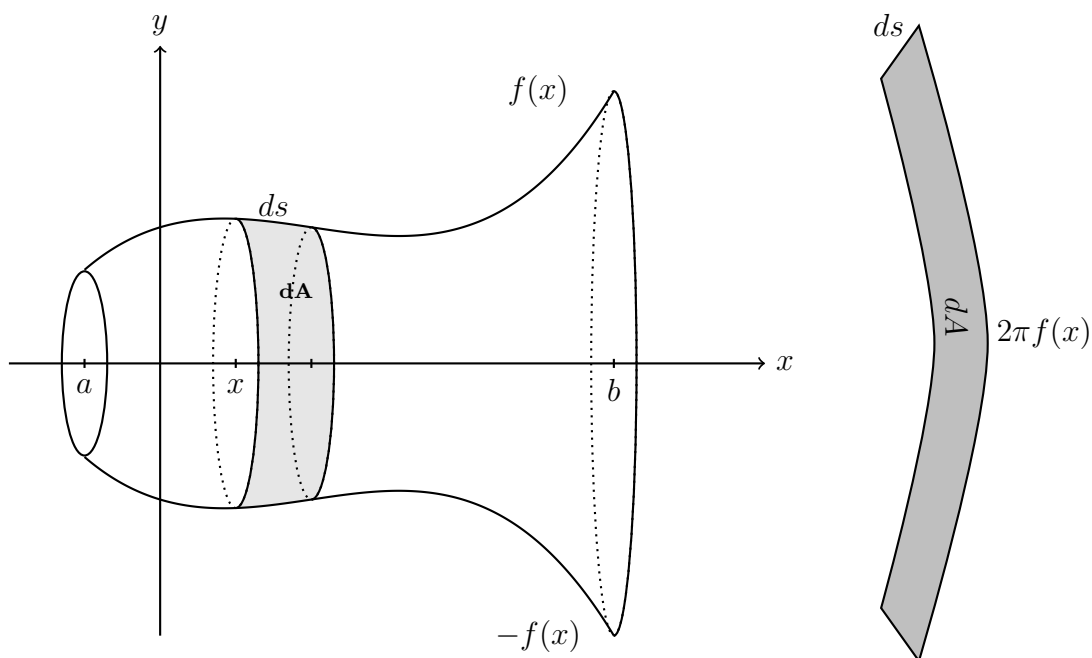
$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = f(x), a \leq x \leq b\}$$

roterar ett varv kring x -axeln av

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) ds = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

*johan.thim@liu.se

Vi bevisar inte satsen utan nöjer oss med argumentet ovan. En principskiss visar också hur vi summerar mantelarean av dessa små cylindrar för att få hela rotationsarean.



I den högra figuren har vi "klippt upp" bandet som skapas när vi roterar ds kring x -axeln. Vi ser här att "kantlängderna" blir precis ds och $2\pi f(x)$, så det är rimligt att area-elementet ges av $dA = 2\pi f(x) \cdot ds$.



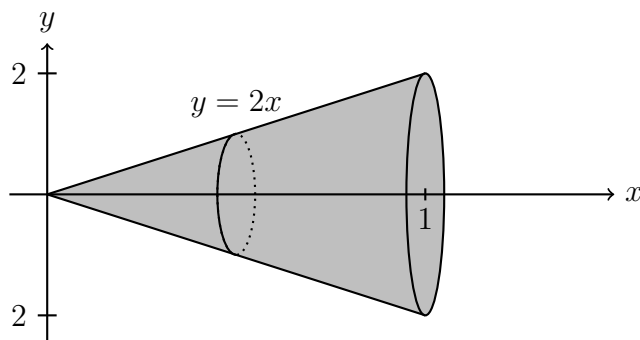
Exempel

Beräkna volymen av den kropp som uppstår då kurvan $y = 2x$, $0 \leq x \leq 1$, roteras ett varv kring x -axeln.

Lösning. Areal kommer att ges av

$$\pi \int_0^1 (2x)^2 \sqrt{1 + 2^2} dx = 4\sqrt{5}\pi \int_0^1 x^2 dx = \frac{4\sqrt{5}\pi}{3}.$$

Precis som för rotationsvolymen bör man se till att detta uttryck åtminstone är positivt (varför?). Vidare är det objekt som uppstår en kon i detta fall (med basradien 2 och höjden 1) och vi räknar alltså ut mantelarean på denna!





Rotation kring axlar parallella med x -axeln

Vi kan rotera kring en linje $y = c$ i stället för kring x -axeln om vi bara kräver att endera $f(x) \geq c$ eller $f(x) \leq c$ (att vi befinner oss på ena sidan av rotationsaxeln med andra ord). Det som ändras är radien eftersom det nu är relativt $y = c$ och inte $y = 0$, så

$$A = 2\pi \int_a^b |f(x) - c| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

1.2 Rotationsarea för rotationer kring y -axeln

Om vi vill rotera kring y -axeln i stället använder vi oss av ett liknande argument som i "rörformeln" för rotationsvolym. Vi betraktar samma kurva

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = f(x), a \leq x \leq b\}$$

med tillägget att $a \geq 0$ (så hela kurvan är på ena sidan av rotationsaxeln). Däremot måste inte $f(x) \geq 0$ längre. Vid ett fixt $x \in [a, b]$ tänker vi oss ett litet bågsegment ds på höjden $f(x)$. Detta roteras kring y -axeln och det uppstår då en liten rotationsarea $dA = 2\pi x \cdot ds$ eftersom omkretsen för cirkeln är $2\pi x$ för radien x . Vi summerar dessa areaelement och erhåller följande formel.



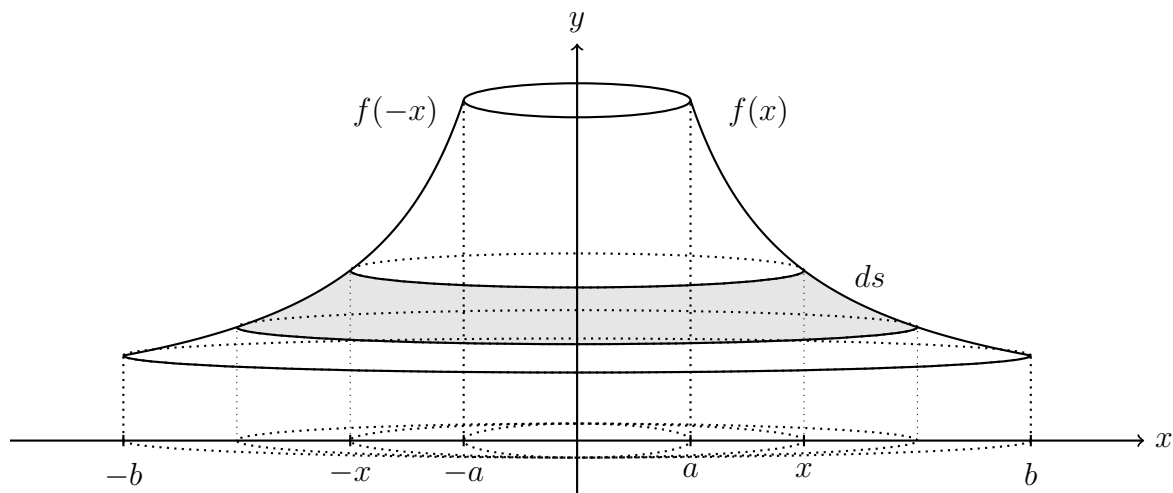
Sats. Låt $0 \leq a < b$. Arean A som uppstår då kurvan

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = f(x), a \leq x \leq b\}$$

roteras ett varv kring y -axeln ges av

$$A = 2\pi \int_a^b x ds = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Vi försöker skissa situationen.



Man kan göra samma sorts ”uppklippning” här som i fallet då vi roterade kring x -axeln, vilket motiverar formeln $dA = 2\pi x \cdot ds$ för areaelementet.



Exempel

Beräkna rotationsarean som uppstår då kurvan $y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$ roteras ett varv kring y -axeln.

Lösning. Eftersom $y' = 2x$ erhåller vi arean

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^2 x \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \frac{\pi}{4} \int_0^2 8x \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{\pi}{4} \left[\frac{2(1 + 4x^2)^{3/2}}{3} \right]_0^2 \\ &= \frac{(17^{3/2} - 1)\pi}{6} = \frac{(17\sqrt{17} - 1)\pi}{6}. \end{aligned}$$

Rimligt svar? Våldigt svårt att säga, men det är åtminstone positivt!



Rotation kring axlar parallella med y -axeln

Precis som för rotationsvolymer är det inget magiskt med y -axeln, utan rotation kan ske kring vilken linje $x = c$ som helst. Det enda som ändras är kravet att $a \geq 0$ byts ut mot att $a \geq c$ eller $c \geq b$ och att radien nu ges av $r = |x - c|$.

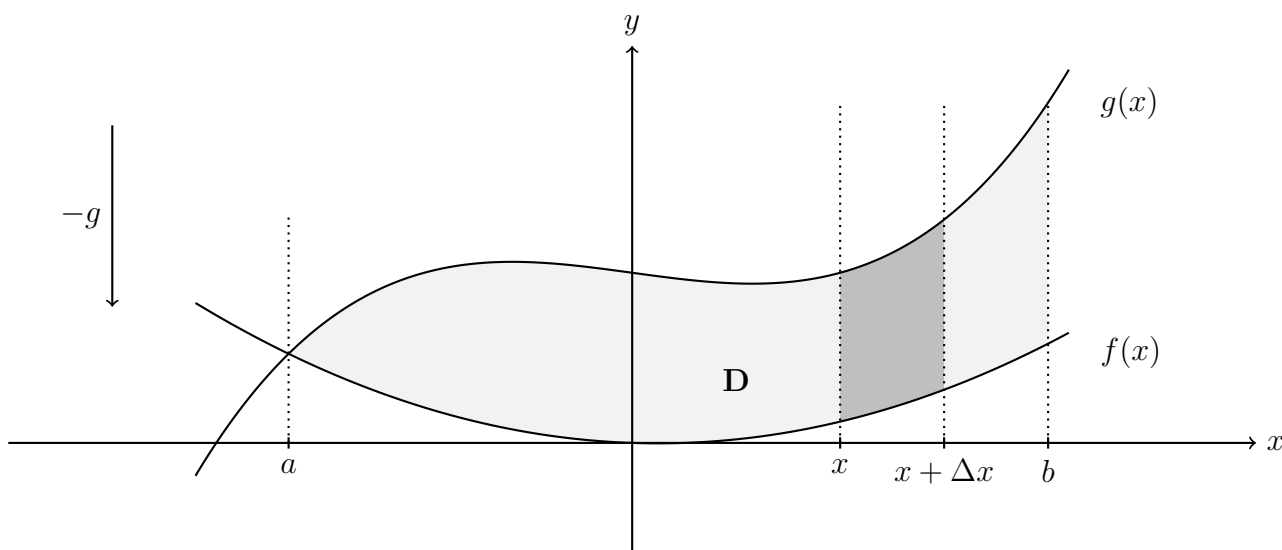
2 Tyngdpunkter

Låt oss fokusera på det plana fallet i 2 dimensioner. Generalisering till 3 dimensioner sker naturligt efter det med volym i stället för area (dA blir dV och så vidare). I det 2-dimensionella fallet inkluderar vi även fallet med kurvor och i det fallet behöver dA bytas ut mot bågelementet ds . Vi tänker oss också att densiteten är konstant lika med ett så att area (eller volym respektive kurvängd) är det samma som massa.

Låt oss fokusera på situationen där ett område D beskrivs av

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x) \leq y \leq g(x), a \leq x \leq b\}$$

där vi antar att $f(x) \leq g(x)$. Vidare tänker vi oss att gravitationen verkar i negativa y -axelns riktning. Vi markerar ett litet område mellan x och $x + \Delta x$ i figuren nedan.



Detta område ger upphov till ett vridande moment kring origo som approximativt har storleken $x(g(x) - f(x))\Delta x$. Massan för motsvarande område ges av $(f(x) - g(x))\Delta x$ (densiteten är ett) och vi vet från fysiken att tyngdpunkt ges av totalt moment delat på total massa. Det förefaller alltså rimligt att definiera området D :s tyngdpunkt x_t med avseende på y -axeln genom

$$x_t = \frac{\int_a^b x(g(x) - f(x)) dx}{\int_a^b (g(x) - f(x)) dx} = \frac{\int_a^b x dA}{\int_a^b dA}$$

där dA är area-elementet $(f(x) - g(x)) dx$. Vidare kan vi även använda detta element för att definiera D :s tyngdpunkt y_t med avseende på x -axeln:

$$y_t = \frac{\int_a^b y dA}{\int_a^b dA}.$$

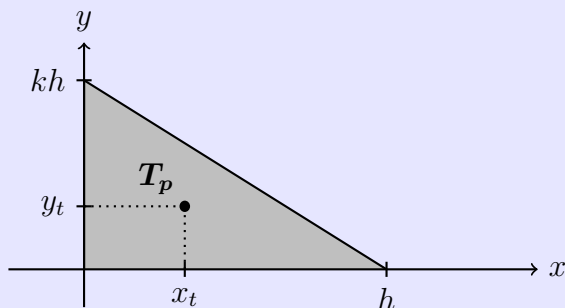
Ofta behöver man här arbeta lite med dA för att uttrycka detta i y i stället för x när vi söker y_t .

För enkla geometriska objekt är det ganska enkelt att se vart tyngdpunkten ligger. I en cirkel är det i mitten och samma sak gäller en rektangel. Hur går det med en triangel?



Exempel

Betrakta en rätvinklig triangel där hypotenusan ges av $y = -kx + kh$, $0 \leq x \leq h$ och $k > 0$.



Tyngdpunkten x_t med avseende på y -axeln ges av

$$\frac{1}{A} \int_0^h x(-kx + kh) dx = \frac{kh^3}{6A}, \quad \text{där } A = \int_0^h (-kx + kh) dx = \frac{kh^2}{2},$$

så $x_t = \frac{h}{3}$. På en tredjedel av höjden alltså. Samma gäller så klart y_t (på en tredjedel av höjden i y -axelns riktning alltså) pga symmetriskäl. Men vi kan räkna ut det också om vi vill. Vi har

$$y_t = \frac{1}{A} \int_0^{kh} y \left(h - \frac{y}{k} \right) dy = \dots = \frac{kh}{3},$$

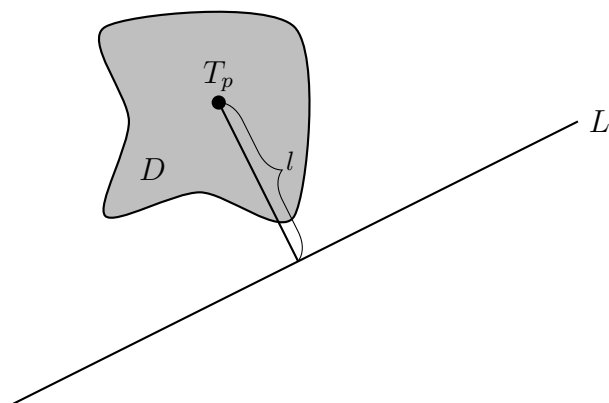
där vi skrivit om $dA = (h - y/k) dy$ med avseende på y .

3 Pappos-Guldins regler

Vi ska nu ställa upp kraftfulla regler för både rotationsvolym och rotationsareor där vi utnyttjar tyngdpunkter. Problemet flyttas nu till att bestämma tyngdpunkten i stället för böjiga rotationsuppställningar. Därmed har vi inte sagt att det alltid är enklare att räkna ut tyngdpunkten, men vissa fall förenklas avsevärt med de tekniker vi nu går genom (speciellt kommer vi åt fallen med lutande rotationsaxlar).

3.1 Rotationsvolym

Vi låter D vara ett plant område som ligger helt på ena sidan av en linje L . Beteckna det vinkelräta avståndet mellan tyngdpunkten T_p och linjen L med l . Detta är alltså det kortaste avståndet mellan T_p och linjen L .



Om D roteras ett varv kring linjen L uppstår en rotationsvolym. Denna volym kan då beräknas med hjälp av Pappos-Guldins regel som säger att volymen som uppstår ges av arean för D gånger tyngdpunktens väg vid rotationen:

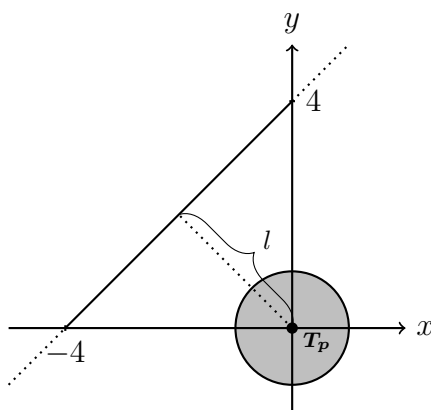
$$V = A(D) \cdot 2\pi l.$$



Exempel

Låt disken $x^2 + y^2 \leq 1$ rotera ett varv kring linjen $y = 4 + x$. Bestäm rotationsvolymen som uppstår.

Lösning. Diskens tyngdpunkt ligger i centrum som i detta fall är origo. Det kortaste avståndet från origo till tyngdpunkten blir $\sqrt{8}$ (betrakta triangeln med hörn i $(-4, 0)$, $(0, 4)$ och $(0, 0)$) samt cirkeln).

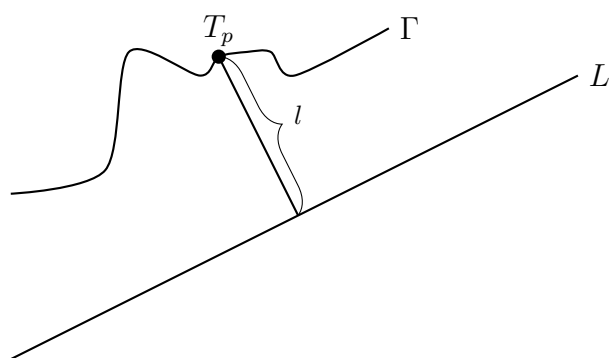


Tyngdpunktens väg blir alltså $2\pi\sqrt{8} = 4\pi\sqrt{2}$. Pappos-Guldin ger nu att den eftersökta volymen blir

$$V = \pi \cdot 4\pi\sqrt{2} = 4\pi^2\sqrt{2}.$$

3.2 Rotationsarea

Vi låter Γ vara en plan kurva som ligger helt på ena sidan av en linje L . Beteckna det vinkelräta avståndet mellan tyngdpunkten T_p för den plana kurvan och linjen L med l . Precis som tidigare är detta det kortaste avståndet mellan T_p och linjen L .



Om Γ roteras ett varv kring linjen L uppstår en rotationsarea. Denna area kan beräknas med hjälp av Pappos-Guldins regel som säger att arean som uppstår ges av kurvlängden s för Γ gånger tyngdpunktens väg vid rotationen:

$$A = s \cdot 2\pi l.$$

Observera att tyngdpunkten i allmänhet inte hamnar på tråden (den behöver inte hamna inne i området i det två-dimensionella fallet heller).

3.3 Pappos-Guldin lokalt och baklänges

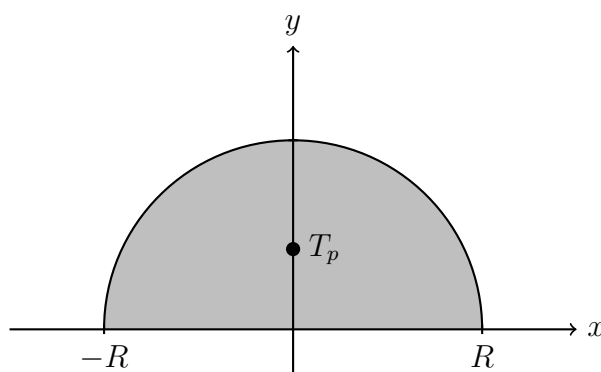
Faktum är att vi kan använda Pappos-Guldins regler "baklänges" för att hitta tyngdpunkten för en kurva eller ett område i planet. Vi illustrerar med ett exempel.



Pappos-Guldin för att hitta T_p

Hitta tyngdpunkten för en halvdisk $x^2 + y^2 \leq R^2$, $y \geq 0$.

Lösning. Tyngdpunkten med avseende på y -axeln ligger så klart i $x_t = 0$. Hur hittar vi tyngdpunkten y_t med avseende på x -axeln? Vi skissar lösningen och grafiskt borde y_t ligga lite lägre än mittpunkten på y -axeln.



Vi ser att arean av det plana området ges av $A = \frac{\pi R^2}{2}$ samt att om detta område roteras kring x -axeln uppstår en rotationsvolym $V = \frac{4\pi R^3}{3}$ eftersom detta är ett klot. Tyngdpunktens väg under rotationen är helt enkelt $2\pi y_t$. Pappos-Guldins regel implicerar nu att

$$\frac{\pi R^2}{2} \cdot 2\pi y_t = \frac{4\pi R^3}{3} \quad \Leftrightarrow \quad y_t = \frac{4R}{3\pi}.$$

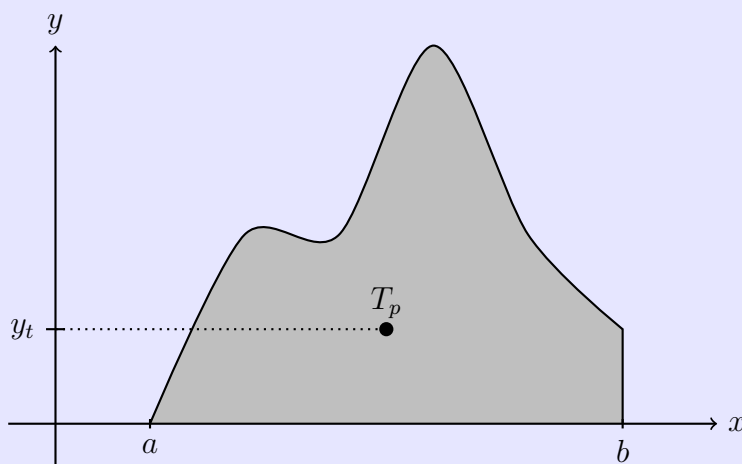


Tyngdpunkt för område givet som funktionsgraf

Exemplet ovan är ett specialfall av en mer generell situation då ett område ges som arean mellan en funktionskurva $y = f(x)$, x -axeln, $x = a$ och $x = b$ (förutsatt att $f \geq 0$). Man kan då visa att tyngdpunkten y_t ges av

$$y_t = \frac{\int_a^b f(x)^2 dx}{2 \int_a^b f(x) dx}.$$

Detta följer från Pappos-Guldin. En principfigur kan se ut enligt nedan.



Arean ges då av $A = \int_a^b f(x) dx$ och om vi roterar området ett varv kring x -axeln uppstår en rotationsvolym som av skivformeln beräknas till $V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$. Enligt Pappos-Guldins regler följer nu att $A \cdot 2\pi y_t = V$ ur vilket sambandet ovan kan lösas ut.

Vad skulle hända med motsvarande kalkyl för tyngdpunkten x_t och rotation kring y -axeln? Använda cylinderformeln och se vad som trillar ut. Bekant?

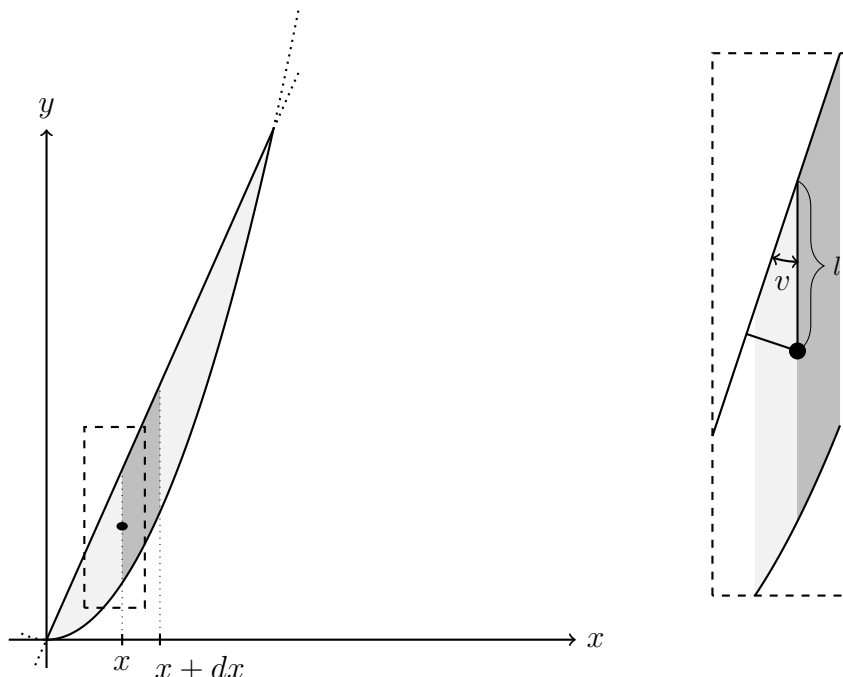
Pappos-Guldins regler kan även med fördel användas lokalt. Med detta menar vi att de små area- och volymelement vi tidigare betraktat vid rotation kan användas tillsammans med de typer av summationsargument vi ägnat oss åt. Speciellt är detta lämpligt när man roterar kring lutande axlar. Vi illustrerar med ett exempel.



Lutande rotationsaxel

Räkna ut rotationsvolymen som uppstår när det begränsade området mellan $y = 3x$ och $y = x^2$ roterar ett varv kring $y = 3x$.

Lösning. Rotationsaxeln är inte parallell med vare sig y - eller x -axeln, men vi kan komma åt problemet med hjälp av Pappos-Guldin. Kurvorna skär varandra i $x = 0$ och $x = 3$ så det är området $x^2 \leq y \leq 3x$, $0 \leq x \leq 3$, som ska rotera kring $y = 3x$. Vi skissar problemet.



Tyngdpunkten för det mörkare skuggade areaelementet ligger approximativt i $x_t = x$ och y_t som mitt mellan $y = 3x$ och $y = x^2$. Låt l vara halva lodräta avståndet mellan $y = 3x$ och $y = x^2$, dvs $l = \frac{3x - x^2}{2}$. Detta är alltså det lodräta avståndet mellan $y = 3x$ och tyngdpunkten. Vi söker dock det vinkelräta avståndet för att kunna använda Pappos-Guldins formler (det är detta avstånd som ger sträckan tyngdpunkten förflyttar sig vid rotation). Lite geometri visar att vinkeln v kan uttryckas som $v = \arctan \frac{1}{k}$ om lutningen för linjen är $k > 0$. Därmed blir det vinkelräta avståndet $l \sin v = \frac{l}{\sqrt{1+k^2}}$. Pappos-Guldins formel medför nu att rotationselementet dV kan ställas upp enligt

$$dV = 2\pi l \cdot dA = 2\pi l \cdot (3x - x^2)dx = \frac{\pi(3x - x^2)^2 dx}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{\pi(3x - x^2)^2 dx}{\sqrt{10}}$$

eftersom $k = 3$ i vårt fall. Vi summerar våra dV och erhåller då volymen av rotationskroppen:

$$V = \int_0^3 dV = \frac{\pi}{\sqrt{10}} \int_0^3 (9x^2 - 6x^3 + x^4) dx = \frac{81\pi}{10\sqrt{10}} = \frac{81\pi\sqrt{10}}{100}.$$

4 Rotationsvolym och rotationsarea i polära koordinater

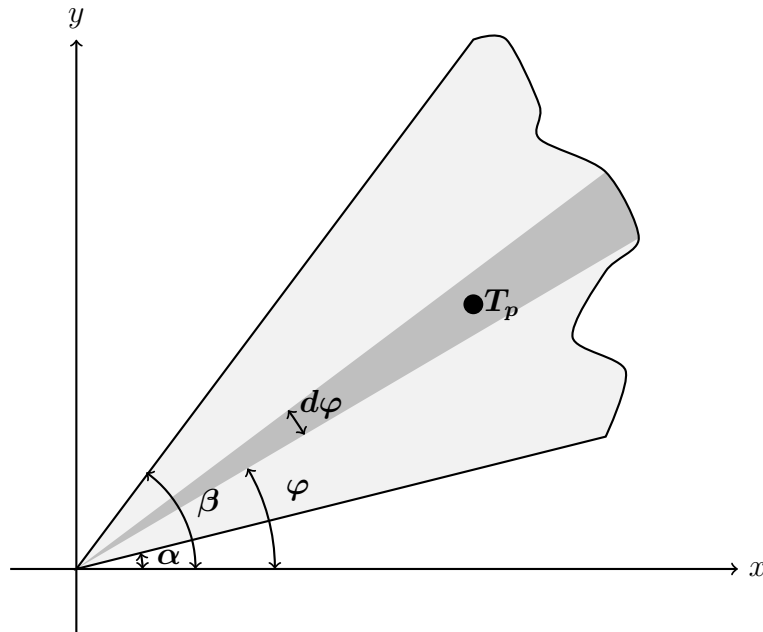
Låt $x = r \cos \varphi$ och $y = r \sin \varphi$ som vanligt när vi använder polära koordinater.

4.1 Rotationsvolym

Betrakta ett område

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq r \leq h(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta\}$$

där $h(\varphi)$ är någon kontinuerlig funktion. Vi skissar hur situationen ser ut. Det mörkare området är en mindre del för en liten vinkel $d\varphi$ vid någon vinkel φ .



Areal för detta area-element ges approximativt av $\pi h(\varphi)^2 \frac{d\varphi}{2\pi} = \frac{h(\varphi)^2}{2} d\varphi$, och eftersom vi kan betrakta det lilla området som en triangel finns tyngdpunkten T_p på $2/3$ av sträckan från origo. Alltså blir det vinkelräta avståndet från x -axeln till T_p approximativt $\frac{2}{3} h(\varphi) \sin \varphi$ och den väg tyngdpunkten förflyttar sig blir således $\frac{4\pi}{3} h(\varphi) \sin \varphi$. Volymselementet dV som uppstår ges alltså av Pappos-Guldins formel enligt $dV = \frac{4\pi}{3} h(\varphi) \sin \varphi \cdot \frac{h(\varphi)^2}{2} d\varphi$ och vi kan summera för att erhålla följande uttryck.



Rotationsvolym på polär form

Sats. Om området D roteras ett varv kring x -axeln ges rotationsvolymen av

$$V(D) = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} h(\varphi)^3 \sin \varphi d\varphi.$$

Det är inte direkt meningen att ni ska memorera formlerna här utan mer kunna upprepa principen. Låt oss betrakta ett exempel.



Exempel

Området $0 \leq r \leq \cos t$, $0 \leq t \leq \pi/2$, roteras ett varv kring linjen $x = -1$. Bestäm volymen för kroppen som uppstår.

Lösning. Sträckan från tyngdpunkten för ett litet vinkelområde vid vinkel t till y -axeln ges som $\frac{2}{3}h(t)\cos t = \frac{2\cos^2 t}{3}$ och således blir sträckan som tyngdpunkten förflyttar sig vid rotation

$$2\pi \left(\frac{2}{3} \cos^2 t + 1 \right)$$

Vi kan nu ställa upp ett volymselement enligt Pappos-Guldins formel:

$$dV = 2\pi \left(\frac{2}{3} \cos^2 t + 1 \right) \cdot \frac{\cos^2 t}{2} dt.$$

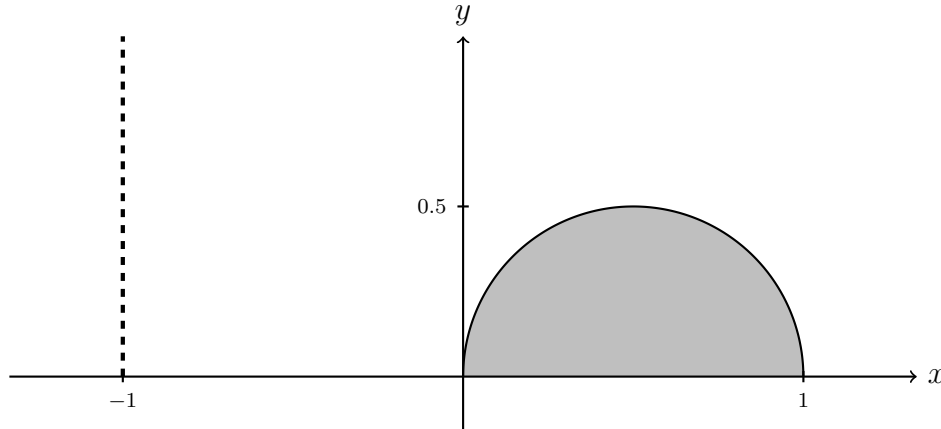
Här har vi utnyttjat att ett litet areaelement i polära koordinater kan skrivas $dA = \frac{h(t)^2}{2} dt$. Eftersom

$$\left(\frac{2}{3} \cos^2 t + 1 \right) \cdot \frac{\cos^2 t}{2} = \left(\frac{1}{3} (1 + \cos 2t) + 1 \right) \cdot \frac{1 + \cos 2t}{4} = \frac{3}{8} + \frac{5}{12} \cos 2t + \frac{1}{24} \cos 4t$$

följer det att

$$\int_0^{\pi/2} dV = 2\pi \int_0^{\pi/2} \left(\frac{3}{8} + \frac{5}{12} \cos 2t + \frac{1}{24} \cos 4t \right) dt = \frac{3\pi^2}{8}.$$

Låt oss även rita situationen.



En liten anmärkning. Området ser cirkulärt ut eller hur? Om $h(t) = \cos t$, $x = h(t)\cos t$ samt $y = h(t)\sin t$, ser vi att

$$x^2 + y^2 = \cos^4 t + \cos^2 t \sin^2 t = \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t) = \cos^2 t = x,$$

så

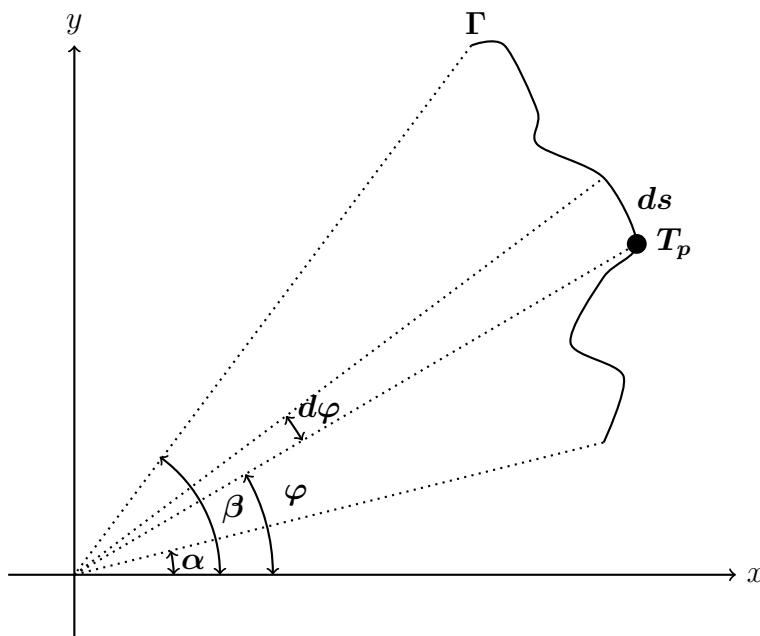
$$x^2 + y^2 = x \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}.$$

Alltså en cirkel med radie $1/2$ och centrum i $(1/2, 0)$. Då vet vi att arean av området är $\pi/8$ (halva disken) och att tyngdpunkten ligger vid $x_t = 1/2$. Alltså kan vi använda Pappos-Guldin på hela området direkt:

$$V = 2\pi \left(1 + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi^2}{8}.$$

4.2 Rotationsarea

En kurva Γ ges av $r = h(\varphi)$ där $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ och $h(\varphi)$ är någon kontinuerligt deriverbar funktion roteras kring x -axeln. Det uppstår en rotationsarea och vi försöker skissa vad som händer.



Det lilla bågelementet ds ges som bekant av $ds = \sqrt{h(\varphi)^2 + h'(\varphi)^2} d\varphi$ och eftersom tyngdpunkten approximativt ligger vid $r = h(\varphi)$, så erhåller vi att tyngdpunktens väg vid rotation kring x -axeln blir $2\pi h(\varphi) \sin \varphi$ (jämför med rotationsvolymfallet ovan). Arean som uppstår ges alltså av Pappos-Guldins formel:



Rotationsarea på polär form

Sats. Om kurvan Γ roteras ett varv kring x -axeln uppstår rotationsarean

$$A(D) = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} h(\varphi) \sin \varphi \sqrt{h(\varphi)^2 + h'(\varphi)^2} d\varphi.$$



Exempel

Visa att arean för ett klot med radie R ges av den bekanta formeln $A = 4\pi R^2$.

Lösning. Vi kan tänka oss kurvan som ges av $h(\varphi) = R$ för $0 \leq \varphi \leq \pi$ och låta den rotera ett varv kring x -axeln. Rotationsarean som uppstår ges då enligt ovan av

$$2\pi \int_0^{\pi} R \sin \varphi \sqrt{R^2 + 0^2} d\varphi = 2\pi R |R| \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi = 4\pi R^2,$$

eftersom $|R| = R$ då $R > 0$.

