TATA42 Envariabelanalys 2 2023-03-20, lösningsförslag

1. (a) Vi får successivt

$$f(x) = (1+x)^{1/2},\ f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2},\ f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2},\ f'''(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-5/2},$$

så

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 1/2, \quad f''(0) = -1/4, \quad f'''(\xi) = 3(1+\xi)^{-5/2}/8,$$

varför

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3 \\ &= \underline{\underline{1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16(1+\xi)^{5/2}} \quad \text{för något } \xi = \xi(x) \text{ mellan 0 och } x}} \quad = \quad \underline{\text{Svar}}.\end{aligned}$$

(b) Nämnaren $= e^x - x - \cos x = (1 + x + x^2/2! + \mathcal{O}(x^3)) - x - (1 - x^2/2! + \mathcal{O}(x^4)) = x^2 + \mathcal{O}(x^3)$, så vi utvecklar täljaren t.o.m. grad 2: $\sin x - \ln(1+x) = (x + \mathcal{O}(x^3)) - (x - x^2/2 + \mathcal{O}(x^3)) = x^2/2 + \mathcal{O}(x^3)$, och vi får

$$\frac{\sin x - \ln(1+x)}{e^x - x - \cos x} = \frac{x^2/2 + \mathcal{O}(x^3)}{x^2 + \mathcal{O}(x^3)} = \frac{1/2 + \mathcal{O}(x)}{1 + \mathcal{O}(x)} \to \frac{1/2 + 0}{1+0} = \frac{1}{2} \quad \text{då } x \to 0.$$

<u>Svar</u>: 1/2.

(c) Standardutvecklingar ger

$$\begin{aligned}f(x) &= \sqrt{1 + \arctan x} = \left(1 + x - x^3/3 + \mathcal{O}(x^5)\right)^{1/2} = \Big/ \begin{matrix} t = x - x^3/3 + \mathcal{O}(x^5), \\ x \to 0 \ \Rightarrow\ t \to 0 \end{matrix} \Big/ \\ &= (1+t)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}t + \binom{1/2}{2}t^2 + \binom{1/2}{3}t^3 + \mathcal{O}(t^4) = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} + \mathcal{O}(t^4) \\ &= \Big/ \begin{matrix} t^2 = t \cdot t = \left(x + \mathcal{O}(x^3)\right)\left(x + \mathcal{O}(x^3)\right) = x^2 + \mathcal{O}(x^4), \\ t^3 = t^2 \cdot t = \left(x^2 + \mathcal{O}(x^4)\right)\left(x + \mathcal{O}(x^3)\right) = x^3 + \mathcal{O}(x^5), \\ \mathcal{O}(t^4) = \mathcal{O}(x^4) \end{matrix} \Big/ \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(x - x^3/3 + \mathcal{O}(x^5)\right) - \frac{1}{8}\left(x^2 + \mathcal{O}(x^4)\right) + \frac{1}{16}\left(x^3 + \mathcal{O}(x^5)\right) + \mathcal{O}(x^4) \\ &= \underline{\underline{1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{5x^3}{48} + \mathcal{O}(x^4)}} \quad = \quad \underline{\text{Svar}}.\end{aligned}$$

2. (a) En integrerande faktor är $e^{G(x)}$, där $G'(x) = g(x) = -3x^2$; alltså duger I.F. $= e^{-x^3}$. Vi får

$$\begin{aligned} y' - 3x^2 y = 8x\, e^{x^3} \quad &\Leftrightarrow \quad e^{-x^3}y' - 3x^2 e^{-x^3} y = 8x \quad \Leftrightarrow \quad \left(e^{-x^3}y\right)' = 8x \\ &\Leftrightarrow \quad e^{-x^3}y = 4x^2 + C,\end{aligned}$$

där $y(0) = 2$ ger $e^0 \cdot 2 = 4 \cdot 0^2 + C$, d.v.s. $C = 2$, så $y = (4x^2+2)e^{x^3}$.

<u>Svar</u>: $y = (4x^2+2)e^{x^3}$.

(b) Eftersom $e^y \neq 0$ kan vi utan problem dividera med e^y:

$$y' - x\, e^y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-y}y' = x \quad \Leftrightarrow \quad \int e^{-y}\,dy = \int x\,dx \quad \Leftrightarrow \quad -e^{-y} = x^2/2 + C.$$

Villkoret $y(0) = 0$ ger $-e^0 = 0^2/2 + C$, d.v.s. $C = -1$, så

$$-e^{-y} = x^2/2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = -\ln(1 - x^2/2).$$

Det största öppna intervall som innehåller $x = 0$ och där $y(x)$ är en lösning är alltså där $1 - x^2/2 > 0$, d.v.s. där $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$.

<u>Svar</u>: $y = -\ln(1 - x^2/2)$, $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$.

3. (a) Eftersom

$$0 \le \frac{2x}{4x^5+1} \le \frac{2x}{4x^5+0} = \frac{1}{2x^4}, \quad x > 1,$$

och integralen av den större funktionen

$$\int_1^\infty \frac{1}{2x^4}\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^{-3}}{-3}\right]_{x=1}^{x\to\infty} = \frac{1}{6}$$

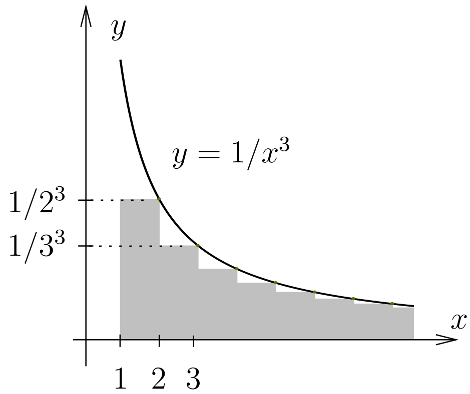
och således är konvergent, är också $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2x}{4x^5+1}\,dx$ konvergent, enligt jämförelsekriteriet. (Att $\int_1^\infty (1/x^4)\,dx$ är konvergent är standard, så integralen ovan behöver inte beräknas.)

<u>Svar</u>: Integralen är konvergent.

(b) Eftersom termerna är positiva ger uppskattning med integral (se figur) omedelbart

$$\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k^3} = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots$$
$$\le \int_1^\infty \frac{dx}{x^3} = \left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_{x=1}^{x\to\infty} = \frac{1}{2},$$

vilket skulle bevisas.



(c) Sätt $a_k = \dfrac{8^k k\, x^{3k}}{k^2+100}$ för fixt $x \ne 0$. Eftersom

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{8^{k+1}(k+1)|x|^{3(k+1)}}{(k+1)^2+100} \Big/ \frac{8^k k |x|^{3k}}{k^2+100} = 8|x|^3 \cdot \frac{(1+1/k)(1+100/k^2)}{(1+1/k)^2+100/k^2} \to 8|x|^3 = Q$$

då $k \to \infty$ medför kvotkriteriet att serien $\sum_{k=1}^\infty a_k$ är absolutkonvergent då $Q < 1$, d.v.s. då $|x| < 1/2$, och divergent då $Q > 1$, d.v.s. då $|x| > 1/2$; alltså är konvergensradien $R = 1/2$.

<u>Svar</u>: $R = 1/2$.

4. (a) För kurvan $y = x^4/4 - 7$, $2 \le x \le 4$ blir bågelementet (för växande x)

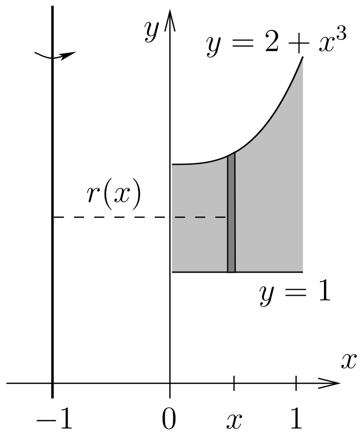
$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\,dx = \sqrt{1 + (x^3)^2}\,dx = \sqrt{1+x^6}\,dx = ds(x),$$

så kurvlängden

$$L = \int_2^4 ds(x) = \underline{\underline{\int_2^4 \sqrt{1+x^6}\,dx}} \quad = \quad \underline{\text{Svar}}.$$

(b) När den mörkare tunna stapeln i figuren roterar ett varv kring linjen $x = -1$ genereras ett tunt rör med

höjd $h(x) = (2+x^3) - 1 = 1 + x^3$,
radie $r(x) = x - (-1) = x + 1$,
tjocklek $= dx$.



Rörets volym blir därför

$$dV(x) = 2\pi r(x) h(x)\,dx = 2\pi(x+1)(1+x^3)\,dx$$
$$= 2\pi(1 + x + x^3 + x^4)\,dx,$$

och hela rotationskroppens volym blir

$$V = \int_0^1 dV(x) = \int_0^1 2\pi(1+x+x^3+x^4)\,dx = 2\pi\left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{39\pi}{10}}} \quad = \quad \underline{\text{Svar}}.$$

5. Vi ser att den givna summan

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n\,2^n} \quad \text{är värdet för potensserien} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} x^n \quad \text{då } x = \frac{1}{2}.$$

Vi beräknar därför denna potensserie, och utgår från den geometriska serien

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

Integrering av (1) ger

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots = \int \frac{dx}{1-x} = -\ln(1-x) + C, \quad |x| < 1,$$

där konstanten C bestäms genom att sätta in $x = 0$; vi får $C = 0$. Alltså får vi, genom att justera summationsindexet,

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots = -\ln(1-x), \quad |x| < 1,$$

och sedan, med hjälp av (1) och (2),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n + \frac{x^n}{n} \right) \overset{*}{=} \sum_{n=1}^{\infty} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right) - \ln(1-x), \quad |x| < 1,$$

där steg $*$ är tillåtet eftersom båda serierna omedelbart till höger är konvergenta då $|x| < 1$. Vi noterar att $|1/2| = 1/2 < 1$, så insättning av $x = 1/2$ ovan ger till slut

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{1-1/2} - 1 \right) - \ln(1-1/2) = \underline{\underline{1 + \ln 2}} \quad = \quad \underline{\text{Svar}}.$$

6. Det karakteristiska polynomet $p(r) = r^3 - r^2 - r + 1 = (r-1)(r^2-1) = (r-1)^2(r+1)$ har nollställena $r_{1,2} = 1$ och $r_3 = -1$, så $y_h = (A + Bx)e^x + C\,e^{-x}$.

Ansatsen $y_p = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ger $y_p' = 3ax^2 + 2bx + c$, $y_p'' = 6ax + 2b$ och $y_p''' = 6a$, och därmed

$$\begin{aligned} y_p''' - y_p'' - y_p' + y_p &= 6a - (6ax + 2b) - (3ax^2 + 2bx + c) + (ax^3 + bx^2 + cx + d) \\ &= ax^3 + (b - 3a)x^2 + (c - 2b - 6a)x + (d - c - 2b + 6a), \end{aligned}$$

som $= -x^3 + 3x^2 + 6x - 5$ om $a = -1$, $b - 3a = 3$, $c - 2b - 6a = 6$ och $d - c - 2b + 6a = -5$, d.v.s. om $a = -1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$; alltså duger $y_p = 1 - x^3$.

Differentialekvationen har därför den allmänna lösningen

$$y = y_h + y_p = (A + Bx)e^x + C\,e^{-x} + 1 - x^3.$$

För att hitta vilka av dessa funktioner som har lokalt minimum i $x = 0$ Maclaurinutvecklar vi:

$$\begin{aligned} y &= (A + Bx)\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \mathcal{O}(x^5)\right) + C\left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \mathcal{O}(x^5)\right) + 1 - x^3 \\ &= (A + C + 1) + (A + B - C)x + \left(\frac{A}{2} + B + \frac{C}{2}\right)x^2 \\ &\quad + \left(\frac{A}{6} + \frac{B}{2} - \frac{C}{6} - 1\right)x^3 + \left(\frac{A}{24} + \frac{B}{6} + \frac{C}{24}\right)x^4 + \mathcal{O}(x^5). \end{aligned}$$

Eftersom det är den ledande variabla termen som bestämmer om y har lokalt extremvärde i $x = 0$ och i så fall vilken typ får vi följande fall:

1: Om $A + B - C \neq 0$ har y inte lokalt extremvärde i $x = 0$.

2: Om $A + B - C = 0$, d.v.s. om $C = A + B$, får vi

$$y = (2A + B + 1) + \left(A + \frac{3B}{2}\right)x^2 + \left(\frac{B}{3} - 1\right)x^3 + \left(\frac{A}{12} + \frac{5B}{24}\right)x^4 + \mathcal{O}(x^5),$$

så i detta fall får vi följande delfall:

2.1: Om $A + 3B/2 > 0$ har y (strängt) lokalt minimum i $x = 0$.

2.2: Om $A + 3B/2 < 0$ har y *inte* lokalt minimum i $x = 0$ (y har strängt lokalt maximum).

2.3: Om $A + 3B/2 = 0$, d.v.s. om $A = -3B/2$, får vi

$$y = (1 - 2B) + \left(\frac{B}{3} - 1\right)x^3 + \frac{B}{12}x^4 + \mathcal{O}(x^5),$$

så i detta delfall får vi följande del-delfall:

2.3.1: Om $B/3 - 1 \neq 0$ har y inte lokalt extremvärde i $x = 0$.

2.3.2: Om $B/3 - 1 = 0$, d.v.s. om $B = 3$, får vi

$$y = -5 + \frac{1}{4}x^4 + \mathcal{O}(x^5),$$

som har (strängt) lokalt minimum i $x = 0$.

Alltså har vi lokalt minimum i fallen 2.1 och 2.3.2, d.v.s. då ($C = A + B$ och $A + 3B/2 > 0$) respektive ($C = A + B$, $A = -3B/2$ och $B = 3$), vilket vi kan skriva mera kompakt som:

Svar: $y = (A + Bx)e^x + (A + B)e^{-x} + 1 - x^3$, där $A + 3B/2 > 0$ eller $(A, B) = (-9/2, 3)$, är de lösningar till differentialekvationen som har lokalt minimum i $x = 0$.