Lösningsförslag Envariabelanalys 2 2023-06-03

1. (a) Enligt Sats 8.2, sid 354 (Taylors formel) gäller att Taylorutvecklingen av ordning 2 kring $x = 1$ ges av

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \mathcal{O}\big((x-1)^3\big)\,.$$

För den aktuella funktionen fås då

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{e}^{3x}, & f'(x) &= 3\mathrm{e}^{3x}, & f''(x) &= 9\mathrm{e}^{3x}, \\ f(1) &= \mathrm{e}^{3}, & f'(1) &= 3\mathrm{e}^{3}, & f''(1) &= 9\mathrm{e}^{3}, \end{aligned}$$

vilket ger

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{e}^3 + 3\mathrm{e}^3(x-1) + \frac{9\mathrm{e}^3}{2}(x-1)^2 + \mathcal{O}\big((x-1)^3\big) = \\ &= \mathrm{e}^3\left(1 + 3(x-1) + \frac{9}{2}(x-1)^2\right) + \mathcal{O}\big((x-1)^3\big) \end{aligned}$$

(b) Tänker vi $t = x^3$ ger Maclaurinutveckling av nämnaren att

$$\sin x^3 = x^3 + \mathcal{O}\big((x^3)^3\big) = x^3 + \mathcal{O}\big(x^9\big)$$

Ur detta ser vi att vi måste utveckla termerna i täljaren till ordning 3.

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}\big(x^4\big)\,, \\ \sqrt{1+2x} &= (1+(2x))^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}(2x) + \binom{1/2}{2}(2x)^2 + \binom{1/2}{3}(2x)^3 + \mathcal{O}\big((2x)^4\big) = \\ &= \left[\binom{1/2}{2} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2} = -\frac{1}{8}, \binom{1/2}{3} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}-2}{3} = \frac{1}{16},\right] = \\ &= 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}\big(x^4\big) \end{aligned}$$

så att

$$\begin{aligned} \frac{1+\ln(1+x)-\sqrt{1+2x}}{x^3+\mathcal{O}(x^9)} &= \frac{1+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3+\mathcal{O}(x^4)}{x^3+\mathcal{O}(x^9)} = \\ &= \frac{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)x^3+\mathcal{O}\big(x^4\big)}{x^3+\mathcal{O}(x^9)} = \frac{-\frac{1}{6}+\mathcal{O}(x)}{1+\mathcal{O}(x^6)} \to -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

då $x \to 0$.

(c) Då x är stort är $1/x$ litet och positivt varvid det är lämpligt med variabelbytet $t = \frac{1}{x} \to 0^+$ då $x \to \infty$. Vi får

$$\begin{aligned} x^2\left(\mathrm{e}^{1/x} - 1 - \sin\frac{1}{x}\right) &= \left[x = \frac{1}{t}\right] = \frac{1}{t^2}\left(\mathrm{e}^t - 1 - \sin t\right) = \\ &= \frac{1}{t^2}\left(1 + t + \frac{1}{2}t^2 - 1 - t + \mathcal{O}\big(t^3\big)\right) = \frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{2}t^2 + \mathcal{O}\big(t^3\big)\right) = \\ &= \frac{1}{2} + \mathcal{O}(t) \to \frac{1}{2} \end{aligned}$$

då $t \to 0^+$.

2. (a) Skriv ekvationen med hjälp av deriveringsoperatorn D.

$$y^{(4)} - 2y''' + 5y'' = D^4 y - 2D^3 y + 5D^2 y = (D^4 - 2D^3 + 5D^2)y = P(D)y = 0$$

Vi löser sedan den karakteristiska ekvationen

$$P(r) = r^4 - 2r^3 + 5r^2 = r^2(r^2 - 2r + 5) = r^2((r-1)^2 + 4) = 0 \iff$$
$$\iff r = 0 \text{ (dubbel)}, 1 \pm 2i.$$

Därmed är den sökta lösningen

$$y = C_0 + C_1 x + \mathrm{e}^x (C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x).$$

(b) Då den undre integrationsgränsen är 0 ger insättning av $x = 0$ i ekvationen att integralen är 0 oavsett vilken (integrerbar) funktion vi sätter in. Detta ger

$$y(0) = 2 + \int_0^0 y(t)^2 t dt = 2$$

Derivering av ekvationen ger sedan med hjälp av Sats 6.7, sid 285 (Analysens huvudsats)

$$y'(x) = D\left(2 + \int_0^x y(t)^2 t dt\right) = xy(x)^2 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \frac{y'}{y^2} = x$$

under förutsättning att $y \neq 0$. Då $y(0) = 2$ är detta ingen inskränkning. Då detta är en separabel ekvation ger integration enligt standardreceptet att

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y^2} &= -\frac{1}{y} = \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C, \\ -\frac{1}{y(0)} &= -\frac{1}{2} = 0 + C = C, \\ -\frac{1}{y} &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} = \frac{x^2 - 1}{2} \iff y = \frac{2}{1 - x^2}, \ x \neq \pm 1. \end{aligned}$$

Eftersom en lösning skall vara definierad på ETT intervall som innehåller startpunkten $x = 0$ följer det att den sökta lösningen är

$$y = \frac{2}{1 - x^2}, \quad -1 < x < 1.$$

3. (a) Integralen är generaliserad i $x = 0$ och integranden är positiv. Då integranden kan skrivas

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}} - 1}{x} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{g(x)} \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{x}}}_{h(x)}$$

där $h(x) \to 1 > 0$ då $x \to 0^+$ (standardgränsvärde) så är förutsättningarna i Sats 10.7, sid. 446 (Jämförelse på kvotform) uppfyllda. Då

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}\,dx \text{ är konvergent eftersom } \tfrac{1}{2} < 1$$

är också

$$\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x} dx$$

konvergent.

(b) Integranden är positiv så om vi visar att integralen är uppåt begränsad så följer det också att den är konvergent och vår skattning är meningsfull. Då $x \geq 1$ är $x^4 \geq \sqrt{x}$ så att x^4 dominerar i nämnaren. För att hitta en skattning uppåt av kvoten gör vi täljaren större och/eller nämnaren mindre.

$$\int_1^\infty \frac{x + |\sin x|}{x^4 + \sqrt{x}}\,dx \leq \int_1^\infty \frac{x+1}{x^4}\,dx \leq \int_1^\infty \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right) dx = \left[-\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3}\right]_1^\infty =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \leq 1$$

(c) Vi börjar med att se vad som händer med seriens termer

$$a_k = (-1)^k \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{k}}}{\arctan \frac{1}{k}}$$

då $k \to \infty$. Sätter vi $t = \frac{1}{\sqrt{k}}$ så ser vi att

$$|a_k| = \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{k}}}{\arctan \frac{1}{k}} = \frac{\sin t}{\arctan t^2} = \frac{\sin t}{t} \cdot \frac{t^2}{\arctan t^2} \cdot \frac{t}{t^2} = \underbrace{\frac{\sin t}{t}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{t^2}{\arctan t^2}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{t} \to \infty$$

då $t \to 0^+$ ($k \to \infty$) med hänvisning till välkända standardgränsvärden (det fungerar utmärkt att Maclaurinutveckla också). Då seriens termer INTE går mot 0 är serien divergent enligt Sats 10.1, sid 436 (Divergenstestet).

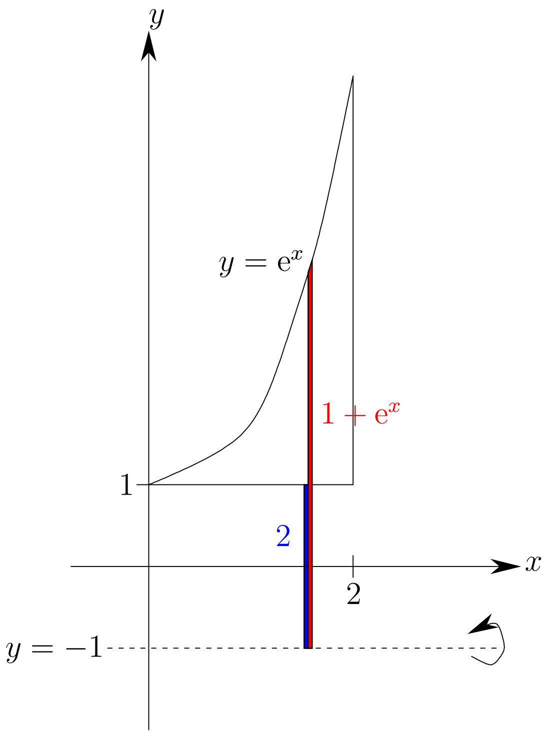
4. (a) Området ges av $0 \leq r \leq \varphi^2 = h(\varphi)$ och $0 \leq \varphi \leq \pi$. För ett område givet på detta sätt i polära koordinater ges areaelementet av

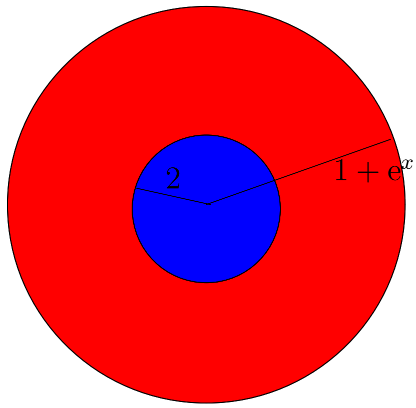
$$dA = \frac{1}{2} h(\varphi)^2\, d\varphi = \frac{1}{2}\varphi^4\, d\varphi$$

så att

$$A = \int dA = \frac{1}{2}\int_0^\pi \varphi^4 d\varphi = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}\varphi^5\right]_0^\pi = \frac{\pi^5}{10}.$$

(b) Vi börjar med figuren.





Med skivformeln så inses att vid rotation av remsorna kring linjen $y = -1$ erhålls två skivor, en större med radie $1+\mathrm{e}^x$ och en mindre med konstant radie 2, båda med "tjocklek" dx, d.v.s.

$$\begin{aligned} dV &= dV_1 - dV_2 = \pi \left((1+\mathrm{e}^x)^2 - 2^2 \right) dx = \pi \left(\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x - 3 \right) dx, \\ V &= \int dV = \pi \int_0^2 \left(\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x - 3 \right) dx = \pi \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x - 3x \right]_0^2 = \\ &= \pi \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^4 + 2\mathrm{e}^2 - 6 - \left(\frac{1}{2} + 2 \right) \right) = \pi \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^4 + 2\mathrm{e}^2 - \frac{17}{2} \right) = \pi \frac{\mathrm{e}^4 + 4\mathrm{e}^2 - 17}{2}. \end{aligned}$$

5. Bestäm Maclaurinutvecklingen av ordning 6 till $\sqrt{1+x^3}$ med restterm på Lagrange-liknande form genom att använda motsvarande utveckling för $f(t) = \sqrt{1+t} = (1+t)^{1/2}$ och sen sätta in $t = x^3$. Då vi skall ha ett polynom av grad 6 inses att det räcker att ta fram utvecklingen av ordning 2 med restterm av grad 3. Vi får

$$\begin{aligned} &f(t) = (1+t)^{1/2}, && f'(t) = \frac{1}{2}(1+t)^{-1/2}, && f''(t) = -\frac{1}{4}(1+t)^{-3/2}, && f'''(t) = \frac{3}{8}(1+t)^{-5/2} \\ &f(0) = 1, && f'(0) = \frac{1}{2}, && f''(0) = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

vilket ger

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x^3} &= f\left(x^3\right) = 1 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}\left(x^3\right)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}\left(x^3\right)^3 = \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^6 + \frac{1}{16(1+\xi)^{5/2}}x^9 = p_6(x) + r_9(x) \end{aligned}$$

för något ξ mellan 0 och $t = x^3$. Med $p(x) = p_6(x)$ fås

$$\left| \int_0^1 \left(\sqrt{1+x^3} - p(x) \right) dx \right| = \left| \int_0^1 r_9(x) dx \right| = \frac{1}{16} \int_0^1 \frac{x^9 dx}{(1+\xi)^{5/2}}.$$

eftersom $r_9(x) \geq 0$ då $0 \leq \xi \leq x^3 \leq x \leq 1$. Därur följer det också att

$$\frac{1}{(1+\xi)^{5/2}} \leq 1$$

så att

$$\left| \int_0^1 \left(\sqrt{1+x^3} - p(x) \right) dx \right| = \frac{1}{16} \int_0^1 \frac{x^9 dx}{(1+\xi)^{5/2}} \leq \frac{1}{16} \int_0^1 x^9 dx = \frac{1}{16} \left[\frac{1}{10} x^{10} \right]_0^1 = $$
$$= \frac{1}{160} \qquad \text{VSB.}$$

6. Ansätt $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ och antag att serien har konvergensradie $R > 0$ (vilket senare kalkyl kommer visa att den har). Därmed är serien deriverbar för $|x| < R$ och de deriverade serierna har även de konvergensradie R enligt Sats 10.18, sid. 465. Från begynnelsedata får vi $y(0) = c_0 = 0$ och $y'(0) = c_1 = 1$. Derivatorna av serien blir enligt samma sats

$$y' = D\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\right) = D\left(c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k D x^k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1},$$
$$y'' = Dy' = D\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1}\right) = D\left(c_1 + \sum_{k=2}^{\infty} c_k k x^{k-1}\right) = \sum_{k=2}^{\infty} c_k k D x^{k-1} =$$
$$= \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1) x^{k-2} = c_2 \cdot 2 \cdot 1 + c_3 \cdot 3 \cdot 2 x^1 + c_4 \cdot 4 \cdot 3 x^2 + \ldots =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+2}(k+2)(k+1) x^k.$$

Sätt in i ekvationen och skriv som EN potensserie

$$(2+x^2)y'' - y = 2y'' + x^2 y'' - y =$$
$$= 2\sum_{k=0}^{\infty} c_{k+2}(k+2)(k+1)x^k + x^2 \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1)x^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} 2c_{k+2}(k+2)(k+1)x^k + \sum_{k=2}^{\infty} c_k \left(k^2 - k\right) x^k - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k =$$
$$= (4c_2 - c_0) + (12c_3 - c_1)x + \sum_{k=2}^{\infty} \left(2(k+2)(k+1)c_{k+2} + (k^2 - k - 1)c_k\right) x^k = 0.$$

Entydighetssatsen för potensserier (formel (10.17), sid 469) ger att den enda potensserie som är 0 för $|x| < R$ är den vars koefficienter alla är 0 vilket ger

$$4c_2 - c_0 = 0 \iff c_2 = \frac{c_0}{2} = \frac{0}{2} = 0, \tag{1}$$

$$12c_3 - c_1 = 0 \iff c_3 = \frac{c_1}{12} = \frac{1}{12}, \tag{2}$$

$$2(k+2)(k+1)c_{k+2} + (k^2 - k - 1)c_k = 0 \iff c_{k+2} = -\frac{k^2 - k - 1}{2(k+2)(k+1)} c_k, \ k \geq 2. \tag{3}$$

Ur (1) och (3) inses att alla koefficienter med jämnt index är $= 0$, d.v.s. $c_{2n} = 0$ för alla n. För udda värden på k fås

$$\underline{\underline{k=3}}: \quad c_5 = -\frac{9-3-1}{2 \cdot 5 \cdot 4} c_3 = -\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{12} = -\frac{1}{96},$$
$$\underline{\underline{k=5}}: \quad c_7 = -\frac{25-5-1}{2 \cdot 7 \cdot 6} c_3 = -\frac{19}{84} \cdot \frac{-1}{96} = \frac{19}{8064}, \quad \ldots$$

Detta ger

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = x + \frac{1}{12} x^3 + \frac{1}{96} x^5 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n-1} x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n-1} x^{2n-1}$$

där (sätt $k = 2n - 1$ i (3) ovan)

$$c_{(2n-1)+2} = c_{2n+1} = -\frac{(2n-1)^2 - (2n-1) - 1}{2((2n-1)+2)((2n-1)+1)} c_{2n-1} = -\frac{4n^2 - 6n + 1}{8n^2 + 4n} c_{2n-1}. \qquad (4)$$

Vi använder kvotkriteriet med $a_n = c_{2n-1} x^{2n-1}$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{c_{2n+1}}{c_{2n-1}} \right| \cdot \left| \frac{x^{2n+1}}{x^{2n-1}} \right| \overset{(4)}{=} \frac{4n^2 - 6n + 1}{8n^2 + 4n} |x|^2 = \frac{4 - \frac{6}{n} + \frac{1}{n^2}}{8 + \frac{4}{n}} |x|^2 \to \frac{1}{2} |x|^2 = Q$$

då $n \to \infty$ vilket ger att serien är absolutkonvergent om

$$Q = \frac{1}{2} |x|^2 < 1 \iff |x| < \sqrt{2} = R,$$

d.v.s. seriens konvergensradie är $\sqrt{2}$.
Vi har alltså visat att potensserien

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n-1} x^{2n-1} = x + \frac{1}{12} x^3 - \frac{1}{96} x^5 + \ldots,$$
$$c_{2n+1} = -\frac{4n^2 - 6n + 1}{8n^2 + 4n} c_{2n-1}, \quad n \geq 2$$

har konvergensradien $\sqrt{2}$ och löser den givna ekvationen.