TATA42 Envariabelanalys 2 2024-03-18, lösningsförslag

1. (a) Vi utvecklar nämnaren så långt att vi ser den ledande termen där. Standardutvecklingen $(1+t)^{1/2} = 1 + t/2 + \binom{1/2}{2}t^2 + \mathcal{O}(t^3) = 1 + t/2 - t^2/8 + \mathcal{O}(t^3)$ med $t = -x^2$ (notera att $x \to 0 \Rightarrow t \to 0$) ger

$$\sqrt{1-x^2} - \cos x = \left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \mathcal{O}(x^6)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \mathcal{O}(x^6)\right) = -\frac{x^4}{6} + \mathcal{O}(x^6).$$

Vi utvecklar därför täljaren till och med grad 4 i x (med rest $\mathcal{O}(x^5)$ eller högre). Standardutvecklingen $e^t = 1 + t + t^2/2! + \mathcal{O}(t^3)$, också med $t = -x^2$, ger

$$x^2 + e^{-x^2} - 1 = x^2 + \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^6)\right) - 1 = \frac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^6),$$

så

$$\frac{x^2 + e^{-x^2} - 1}{\sqrt{1-x^2} - \cos x} = \frac{x^4/2 + \mathcal{O}(x^6)}{-x^4/6 + \mathcal{O}(x^6)} = \frac{1/2 + \mathcal{O}(x^2)}{-1/6 + \mathcal{O}(x^2)} \to \frac{1/2 + 0}{-1/6 + 0} = -3 \quad \text{då } x \to 0.$$

<u>Svar</u>: -3.

(b) Vi Maclaurinutvecklar funktionen så långt att vi ser den ledande *variabla* termen. Standardutvecklingen $\ln(1+t) = t + \mathcal{O}(t^2)$ med $t = x^4$ ger

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 - x^2 \sin^2 x + \ln(1+x^4) = 2 - x^2\left(x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5)\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5)\right) + \left(x^4 + \mathcal{O}(x^8)\right) \\ &= 2 + \frac{x^6}{3} + \mathcal{O}(x^8) = 2 + x^6\left(\frac{1}{3} + \mathcal{O}(x^2)\right). \end{aligned}$$

Eftersom $x^6 > 0$ då $x \neq 0$ och $1/3 + \mathcal{O}(x^2) > 0$ då x är nära 0 ser vi att $f(x) > 2 = f(0)$ då x är nära 0 men $x \neq 0$. Således har f (strängt) lokalt minimum i $x = 0$.

<u>Svar</u>: f har lokalt minimum i $x = 0$.

(c) Vi får successivt $f(x) = x^{3/2}$, $f'(x) = 3\,x^{1/2}/2$, $f''(x) = 3\,x^{-1/2}/4$ och $f'''(x) = -3\,x^{-3/2}/8$, så $f(1) = 1$, $f'(1) = 3/2$, $f''(1) = 3/4$ och $f'''(\xi) = -3\,\xi^{-3/2}/8$, varför

$$\begin{aligned} x^{3/2} &= f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-1)^3 \\ &= \underline{\underline{1 + \frac{3}{2}(x-1) + \frac{3}{8}(x-1)^2 - \frac{1}{16\,\xi^{3/2}}(x-1)^3 \quad \text{för något } \xi = \xi(x) \text{ mellan 1 och } x.}} \end{aligned}$$

2. (a) Det karakteristiska polynomet $p(r) = r^3 + 6r^2 + 13r = r\left((r+3)^2 + 2^2\right)$ har nollställena $r_1 = 0$ och $r_{2,3} = -3 \pm 2i$, så lösningarna är $y = A + e^{-3x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$.

<u>Svar</u>: $y = A + e^{-3x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$.

(b) Eftersom $y^2 + 2 > 0$ kan differentialekvationen skrivas om och integreras på följande sätt:

$$2yy' = 3y^2 + 6 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2yy'}{y^2+2} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{2y\,dy}{y^2+2} = \int 3\,dx \quad \Leftrightarrow \quad \ln(y^2+2) = 3x + C.$$

Bivillkoret $y(0) = -2$ ger $C = \ln 6$, och

$$\ln(y^2+2) = 3x + \ln 6 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 + 2 = 6\,e^{3x} \quad \Leftrightarrow \quad y = -\sqrt{6\,e^{3x} - 2},$$

där '$-$' gäller i sista steget eftersom $y(0) = -2$.

Det största öppna intervall som innehåller $x = 0$ och där $y(x)$ är en lösning fås ur kravet

$$6\,e^{3x} - 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{1}{3}\ln\frac{1}{3} = -\frac{\ln 3}{3}.$$

Efterfrågad kontroll: Bivillkoret: $y(0) = -\sqrt{6\,e^{3\cdot 0} - 2} = -\sqrt{4} = -2$; differentialekvationen:

$$\text{VL} = 2yy' = 2\left(-\sqrt{6\,e^{3x} - 2}\right)\left(-\frac{6\,e^{3x}\cdot 3}{2\sqrt{6\,e^{3x} - 2}}\right) = 18\,e^{3x} \quad \text{och}$$

$\text{HL} = 3y^2 + 6 = 3\left(-\sqrt{6\,e^{3x} - 2}\right)^2 + 6 = 18\,e^{3x} = \text{VL}.$ <u>Svar</u>: $y = -\sqrt{6\,e^{3x} - 2}$, $x > -\dfrac{\ln 3}{3}$.

3. (a) Sätt $a_k = \dfrac{x^{2k}}{2^k(k+k^2)}$ för fixt $x \neq 0$. Eftersom

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{x^{2(k+1)}}{2^{k+1}((k+1)+(k+1)^2)} \Big/ \frac{x^{2k}}{2^k(k+k^2)}\right| = \frac{|x|^2}{2}\cdot\frac{1/k+1}{(1/k+1/k^2)+(1+1/k)^2} \to \frac{|x|^2}{2}$$

då $k \to \infty$ medför kvotkriteriet att serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är absolutkonvergent då $|x|^2/2 < 1$, d.v.s. då $|x| < \sqrt{2}$, och divergent då $|x|^2/2 > 1$, d.v.s. då $|x| > \sqrt{2}$; alltså är konvergensradien $R = \sqrt{2}$.

Det återstår att undersöka vad som händer i ändpunkterna $x = \pm R = \pm\sqrt{2}$. I båda punkterna blir $a_k = 1/(k+k^2)$, och eftersom

$$0 \leq \frac{1}{k+k^2} \leq \frac{1}{k^2} \qquad \text{då } k \geq 1$$

och $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k^2)$ är konvergent (standardserie) följer det att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent, enligt jämförelsekriteriet för positiva serier. Alltså är potensserien konvergent även i $x = \pm\sqrt{2}$.

<u>Svar</u>: $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.

(b) Vi noterar att

$$\sqrt{x} + e^x - 1 \geq \sqrt{x} > 0 \quad \text{då } x > 0$$

och

$$\sqrt{x} + e^x - 1 \geq e^x > 0 \quad \text{då } x \geq 1.$$

Speciellt är integranden positiv, och integralen

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+e^x-1} &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+e^x-1} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+e^x-1} \\ &\leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int_1^{\infty} e^{-x}dx = \left[2\sqrt{x}\right]_{x\to 0+}^{x=1} + \left[-e^{-x}\right]_{x=1}^{x\to\infty} \\ &= 2 + \frac{1}{e} \leq 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2},\end{aligned}$$

eftersom $e > 2$, vilket skulle bevisas.

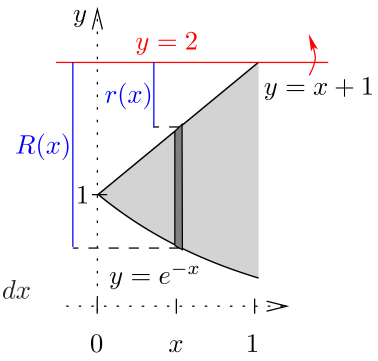
4. (a) Areaelementet $dA(v) = \big((2\sin v)^2/2\big)dv$, så områdets area är

$$A = \int_0^{\pi} dA(v) = \int_0^{\pi} 2\sin^2 v\, dv = \int_0^{\pi}(1-\cos 2v)\, dv = \left[v - \frac{\sin 2v}{2}\right]_0^{\pi} = \pi.$$

<u>Svar</u>: π.

(Anmärkning: Området är faktiskt cirkelskivan $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$. Hur kan man se det?)

(b) När den mörkare tunna stapeln i figuren roterar ett varv kring linjen $y = 2$ genereras en tunn cirkelring (ett ihåligt mynt) med



ytterradie $R(x) = 2 - e^{-x}$,
innerradie $r(x) = 2 - (x+1) = 1 - x$,
tjocklek $= dx$.

Cirkelringens volym blir därför

$$\begin{aligned}dV(x) &= \big(\pi R(x)^2 - \pi r(x)^2\big)dx = \pi\big((2-e^{-x})^2 - (1-x)^2\big)dx \\ &= \pi(3 + 2x - x^2 - 4\,e^{-x} + e^{-2x})\, dx\end{aligned}$$

och hela rotationskroppens volym blir

$$\begin{aligned}V &= \int_0^1 dV(x) = \int_0^1 \pi(3 + 2x - x^2 - 4\,e^{-x} + e^{-2x})\, dx \\ &= \pi\left[3x + x^2 - \frac{x^3}{3} + 4\,e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2}\right]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{6} + \frac{4}{e} - \frac{1}{2e^2}\right).\end{aligned}$$

<u>Svar</u>: $\pi\left(\dfrac{1}{6} + \dfrac{4}{e} - \dfrac{1}{2e^2}\right)$.

5. Vi ska beräkna
$$s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + (-1)^n}{3^n},$$
och väljer att studera
$$s_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} \qquad \text{och} \qquad s_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$$
separat; om dessa båda serier är konvergenta är också ursprungsserien konvergent, och $s = s_1 + s_2$. Vi ser att s_2 är en geometrisk serie med kvot $q = -1/3$, och eftersom $|q| = |-1/3| = 1/3 < 1$ får vi genast
$$s_2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{1}{3})^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-(-1/3)} = \frac{3}{4}.$$
Serien s_1 får vi om vi sätter $x = 1/3$ i potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$. Vi beräknar därför denna potensseries summa, och utgår då från den geometriska serien:
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1.$$
Termvis derivering av denna likhet, följd av multiplikation med x, ger
$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = 0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots = x \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1,$$
och gör vi detta en gång till får vi
$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = 0 + x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + \ldots = x \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right) = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}, \quad |x| < 1.$$
Sätter vi in $x = 1/3$ här, vilket vi kan göra eftersom $|1/3| = 1/3 < 1$, får vi $s_1 = 3/2$. Både s_1 och s_2 är alltså konvergenta, så s är konvergent, med summa $s = s_1 + s_2 = 3/2 + 3/4 = 9/4$.

Svar: $9/4$.

6. Bågelementet på kurvan $y = x^3/3$ är $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\,dx = \sqrt{1+x^4}\,dx$, så längden av kurvan
$$L = \int_0^{1/2} \sqrt{1+x^4}\,dx.$$
Sätt $g(t) = (1+t)^{1/2}$. Maclaurinutveckling av $g(t)$ av ordning 1, med rest i Lagranges form, ger
$$(*) \quad (1+t)^{1/2} = g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{g''(\xi)}{2!}t^2 = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8(1+\xi)^{3/2}} \quad \text{för något } \xi \text{ mellan 0 och } t.$$
Om vi sätter $t = x^4$ i $(*)$ och därefter integrerar från 0 till 1/2 i variabeln x får vi
$$\underbrace{L = \int_0^{1/2} \sqrt{1+x^4}\,dx}_{\text{Exakt värde}} = \underbrace{\int_0^{1/2} \left(1 + \frac{x^4}{2}\right) dx}_{\text{Approximation}} \underbrace{- \int_0^{1/2} \frac{x^8}{8(1+\xi(x))^{3/2}}\,dx}_{\text{Approximationsfel}}$$
för något $\xi = \xi(x)$ mellan 0 och x^4. Vi får approximationen
$$\int_0^{1/2} \left(1 + \frac{x^4}{2}\right) dx = \left[x + \frac{x^5}{10}\right]_0^{1/2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{32 \cdot 10} = \frac{161}{320}$$
och, eftersom $x^4 \geq 0$ och därmed $\xi(x) \geq 0$ och $1 + \xi(x) \geq 1$, följande uppskattning av beloppet av approximationsfelet (**obs!** ξ beror på x och är alltså *inte* konstant):
$$\left|L - \frac{161}{320}\right| = \left|-\int_0^{1/2} \frac{x^8}{8(1+\xi(x))^{3/2}}\,dx\right| \leq \int_0^{1/2} \left|\frac{x^8}{8(1+\xi(x))^{3/2}}\right| dx = \int_0^{1/2} \frac{x^8}{8(1+\xi(x))^{3/2}}dx$$
$$\leq \int_0^{1/2} \frac{x^8}{8}\,dx = \left[\frac{x^9}{8 \cdot 9}\right]_0^{1/2} = \frac{1}{2^{12} \cdot 9} = \frac{1}{4 \cdot 1024 \cdot 9} \leq \frac{1}{10\,000} \quad \text{(med marginal)},$$
vilket skulle bevisas.