Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA42
Modul: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2023-03-20 kl 08.00–13.00

Inga hjälpmedel. Fullständiga lösningar krävs, om inget annat sägs i uppgifterna.

Tentamen består av två delar: A och B.

- **Del A** består av 4 uppgifter, numrerade 1–4, värda 3p var.
- **Del B** består av 2 uppgifter, numrerade 5–6, värda 3p var.

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2p.

För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) räcker krav K1 och K2, där

K1: 1 poäng på varje uppgift på del A, och

K2: 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng totalt.

Svar finns tidigast kl 15.00 på kursens hemsida.

Del A

1. (a) Härled Maclaurinutvecklingen av ordning 2 till funktionen

$$f(x) = \sqrt{1+x},$$

med restterm i Lagranges form (ordning 3).

(b) Beräkna

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{\mathrm{e}^x - x - \cos x}.$$

(c) Bestäm Maclaurinutvecklingen till

$$f(x) = \sqrt{1+\arctan x}$$

av ordning 3 med restterm på ordoform (av ordning 4).

2. (a) Lös differentialekvationen

$$y' - 3x^2 y = 8x\,\mathrm{e}^{x^3}$$

med bivillkoret $y(0) = 2$. (1p)

(b) Bestäm en lösning till differentialekvationen

$$y' - x\,\mathrm{e}^y = 0, \quad y(0) = 0,$$

och ange största öppna intervall där $y(x)$ är en lösning. (2p)

Var god vänd!

3. (a) Avgör konvergens: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2x}{4x^5+1}\,dx$.

   (b) Visa att $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{2}$.

   (c) Bestäm konvergensradien R till potensserien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8^k k}{k^2+100}\, x^{3k}.$$

   (OBS! Ändpunkterna $x = \pm R$ ska alltså ej undersökas.)

4. (a) Teckna som en integral, som inte ska beräknas, längden av kurvan

$$y = \frac{x^4}{4} - 7, \quad 2 \leq x \leq 4.$$

(1p)

   (b) Beräkna volymen av den kropp som uppstår då det begränsade området som ges av olikheterna

$$0 \leq x \leq 1, \quad 1 \leq y \leq 2 + x^3,$$

   roterar ett varv kring linjen $x = -1$.
   Inkludera en principskiss som motiverar formeln som används. (2p)

Del B

5. Beräkna summan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n\,2^n}.$$

6. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen

$$y''' - y'' - y' + y = -x^3 + 3x^2 + 6x - 5$$

   som har lokalt minimum i $x = 0$.
